УДК 519.21

А. В. СКОРОХОД, акад. АН УССР (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Динамические системы под влиянием быстрых случайных возмущений

Рассматриваются динамические системы, зависящие от случайно меняющегося параметра. Изучаются условия, при которых такая динамическая система превращается в диффузионный процесс.

Розглядаються динамічні системи, що залежать від випадково змінного параметра. Вивчаються умови, за яких така динамічна система перетворюється у дифузійний процес.

Введение. Динамические системы со случайными возмущениями естественным образом возникали в механике и физике, когда приходилось иметь дело с весьма нерегулярными силами воздействия, которые лучше всего было трактовать как случайные. Именно представление о таких системах привело А. Н. Колмогорова [1] к определению общего марковского процесса. Различные конкретные задачи, связанные с системами, находящимися под влиянием случайных воздействий, рассматривали Н. Н. Боголюбов и Н. М. Крылов [2—4] (см. также книгу Н. Н. Боголюбова [5]). Особо стоит обратить внимание на работу [4], в которой рассматривается динамическая система, на которую воздействует случайная сила, превращающаяся в пределе в «белый шум». Здесь впервые получена некоторая предельная теорема о сходимости решения дифференциального уравнения со случайной правой частью к диффузионному процессу, когда случайные возмущения становятся «быстрыми». Представление о динамической системе, находящейся под случайным воздействием, было развито далее И. И. Гихманом [6—8], на этом пути им построена общая теория стохастических дифференциальных уравнений [9]. Однако задачи изучения асимптотического поведения динамических систем со случайными возмущениями остаются в центре внимания многих математиков. Не упоминая многочисленные работы прикладного характера, а также работы, не содержащие новых результатов вероятностного характера, укажем работы И. И. Гихмана [10, 11], Р. З. Хасьминского [12—15], А. Д. Вентцеля и М. И. Фрейдлина [16], В. В. Сарафяна и А. В. Скорохода [17]. В книге [18] рассмотрены асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений, в частности, рассматриваются и динамические системы со случайными воздействиями. Настоящий обзор посвящен в основном динамическим системам, на которые воздействует скачкообразный марковский процесс, вообще говоря, испытывающей обратное воздействие системы. В предположении роста интенсивности скачков к бесконечности исследуется сходимость процесса, описывающего эволюцию системы, к диффузионному процессу.

1. Постановка задачи. Можно представить два вида случайного воздействия на динамическую систему: при одном в результате случайного воздействия система перескакивает на некоторую другую траекторию той же динамической системы, при другом — изменяется сама динамическая система и движение продолжается из того же положения, в котором она была в момент воздействия, по траектории новой динамической системы. Будем рассматривать только второй случай. Пусть X — конечномерное евклидово пространство — фазовое пространство динамической системы. Будем предполагать, что система определяется дифференциальным

уравнением вида $dx/dt = a(x)$. Функция, стоящая в правой части, должна зависеть от некоторого параметра, случайное изменение которого и приводит к изменению динамической системы. Пусть измеримое пространство $(Y, \mathcal{C})$ — пространство случайных воздействий и оно же есть пространство параметров, от которого зависит система. Таким образом, имеется функция $a(x, y): X \times Y \to X$, $\mathcal{C}$-измеримая по y и такая, что для всех $y \in Y$ уравнение $dx_t/dt = a(x_t, y)$ определяет динамическую систему (т. е. уравнение имеет единственное решение для любых начальных данных). Это будет, например, если существует и локально ограничена по x производная $a'_x(x, y)$. Будем предполагать, что такое условие всегда выполнено. Случайные воздействия определяются некоторым Y-значным процессом $y(t)$. В простейшем случае $y(t)$ — однородный скачкообразный марковский процесс в Y. Такой процесс определяется своим производящим оператором Π, заданным на пространстве функций $\mathbf{B}_Y$ — $\mathcal{C}$-измеримых ограниченных функций из Y в R, для $g \in \mathbf{B}_Y$

$$\Pi g(y) = \int [g(y') - g(y)] \Pi(y, dy'), \tag{1}$$

где $\Pi(y, C)$ — конечная мера на $\mathcal{C}$, $\Pi(y, C)$ измеримо по y, $\Pi(y, Y) \in \mathbf{B}_Y$. В этом случае пара $(x(t), y(t))$, где

$$dx(t)/dt = a(t, x(t), y(t)), \tag{2}$$

образует однородный марковский процесс в X, Y, его производящий оператор определен на измеримых функциях $f(x, y)$ из $X \times Y$ в R, для которых существует непрерывная по x производная $f'_x(x, y)$ и выражение

$$Af(x, y) = (a(x, y), f'_x(x, y)) + \int (f(x, y) - f(x, y')) \Pi(y, dy') \tag{3}$$

ограничено и непрерывно по x. Если вместо марковского процесса $y(t)$ рассмотреть процесс $y_\varepsilon(t) = y\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, где $y(t)$ такой, как указано выше, то в формуле (1) в правой части появится множитель ε^{-1}. При $\varepsilon \to 0$ случайные возмущения будут учащаться и в пределе их частота будет стремиться к бесконечности. Именно это будем иметь в виду, когда речь будет идти о «быстрых» возмущениях. Наконец, возможна еще «обратная связь» — производящий оператор возмущающего процесса может зависеть от x (т. е. от состояния динамической системы). Таким образом, приходим к рассмотрению семейства однородных марковских процессов $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$, зависящих от параметра $\varepsilon > 0$, определяемых производящими операторами

$$A_\varepsilon f(x, y) = (a(x, y), f'_x(x, y)) + \frac{1}{\varepsilon} \int (f(x, y') - f(x, y)) \Pi^x(y, dy'), \tag{4}$$

где функция $a(x, y)$ из $X \times Y$ в X непрерывно дифференцируема по x, а $\Pi^x(y, B)$ непрерывна по x, измерима по паре $(x; y)$ и положительная конечная мера по $B \in \mathcal{C}$. Область определения A_ε — совокупность измеримых функций f из $X \times Y$ в R, которые непрерывно дифференцируемы по x, и выражение в правой части — ограниченная, непрерывная по x функция. Основная задача данной статьи — исследование условий слабой сходимости процесса $x_\varepsilon(t)$ или $x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ к некоторому диффузионному процессу.

Для изучения слабой сходимости к диффузионному процессу (в том числе и к процессу с нулевым диффузионным оператором, такой процесс является решением обыкновенного дифференциального уравнения, порождающего динамическую систему) используем следующий факт (см. [19, с. 415], теорема 9, [18, с. 82], теорема 1).

Предложение. *Пусть $a(t, x)$, $B(t, x)$ — непрерывные функции из $R \times X$ в X и $L^{(s)}(X)$ соответственно ($L^{(s)}(X)$ — пространство неот-*

рицательных симметричных операторов из X в X), для которых выполнены условия: для всех $s > 0$ существует такое k_s, что при $t \leqslant s$

$$|a(t, x) - a(t, y)| + \| B(t, x) - B(t, y) \| \leqslant k_s |x - y|.$$

Положим для $\varphi \in C_0^{(2)}(X)$ ($C_0^{(m)}$ — m раз непрерывно дифференцируемые финитные функции из X в R)

$$L_t \varphi(x) = (\varphi'(x), a(t, x)) + \frac{1}{2} \operatorname{sp} B(t, x) \varphi''(x) \tag{5}$$

($\varphi'(x)$ — вектор из X, $\varphi''(x)$ — оператор из $L^{(s)}(X)$).

Предположим, что для последовательности случайных процессов $\xi_n(t)$, $t \in R_+$ со значениями в X выполнено условие: для всех r, $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_r < t$, функций $f(x_1, \ldots, x_r) \in C_0^{(2)}(X^r)$, $\varphi \in C^{(3)}(X)$ существует такая последовательность $h_n > 0$, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{h_n} M f(\xi_n(t_1), \ldots, \xi_n(t_r)) \times$$

$$\times [\varphi(\xi_n(t + h)) - \varphi(\xi_n(t)) - h_n L_t \varphi(\xi_n(t))] = 0. \tag{6}$$

Если распределение $\xi_n(0)$ сходится к распределению $x(0)$, то распределения процессов $\xi_n(t)$ слабо сходятся к распределениям процесса $x(t)$, являющимся решением стохастического уравнения

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(s, x(s))\, ds + \int_0^t B^{1/2}(s, x(s))\, dw(s), \tag{7}$$

где $w(t)$ — винеровский процесс в X.

2. Предварительные результаты. Рассмотрим простейший случай: $a(x, y) = a(y)$ есть ограниченная измеримая функция, $y_\varepsilon(t) = y\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, где $y(t)$ — марковский процесс в Y с производящим оператором вида (1). Таким образом,

$$x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(0) + \int_0^t a\left(y\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right) ds = x_\varepsilon(0) +$$

$$+ \varepsilon \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} a(y(s))\, ds = x_\varepsilon(0) + t\left(\frac{\varepsilon}{t} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} a(y(s))\, ds\right). \tag{8}$$

Будем предполагать, что процесс $y(t)$ является эргодическим, его эргодическое распределение $\rho(dy)$. Это означает, что каково бы ни было начальное значение y процесса $y(t)$,

$$P_y \left\{\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M g(y(s))\, ds = \int g(y') \rho(dy')\right\} = 1 \tag{9}$$

для всякой функции $g \in \mathbf{B}_Y$ ($P_y(\cdot) = P(\cdot / y(0) = y)$). Из (8) и (9) вытекает

$$x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(0) \sim t \int g(y) \rho(dy). \tag{10}$$

Если $x_\varepsilon(0) = x$ не зависит от ε, то $x_\varepsilon(t)$ сходится к $x + t\bar{a}$, где $\bar{a} = \int a(y) \rho(dy)$. Этот результат можно сформулировать так:

А $x_\varepsilon(t)$ сходится (в том числе и слабо по распределениям) к функции $\bar{x}(t)$, являющейся решением «усредненного» уравнения $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{a}$. В случае, когда $\bar{a} = 0$, $x_\varepsilon(t)$ сходится к своему начальному положению.

Этот случай естественно назвать равновесным. Но при больших временах, порядка $\frac{1}{\varepsilon}$, при определенных условиях процесс $x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ будет сходиться к некоторому диффузионному процессу. В рассматриваемом случае условия нужно налагать лишь на $y(t)$.

I. Предположим, что вероятность перехода $P(t, y, C)$ процесса $y(t)$ такова, что для всех $C \in \mathcal{C}$ существует

$$\int_0^\infty |P(t, y, C) - \rho(C)|\, dt,$$

где $\rho(C)$ — эргодическое распределение, и пусть

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{y\in Y, C\in\mathcal{C}} \left(T \int_T^\infty |P(t, y, C) - \rho(C)|\, dt\right) = 0. \tag{11}$$

В. Если $\bar{a} = 0$, выполнено I и $x_\varepsilon(0) = x$, то процесс $\tilde{x}_\varepsilon(t) = x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ слабо сходится к гауссовскому процессу с независимыми приращениями $x(t)$ со средним нуль и корреляционным оператором

$$M(x(t) - x(0), z)^2 = t(Bz, z) =$$
$$= \int\int (a(y), z)(a(y'), z)\rho(dy) R(y, dy'), \tag{12}$$

где

$$R(y, C) = \int_0^\infty (P(t, y, C) - \rho(C))\, dt. \tag{13}$$

Указанный процесс $x(t)$ является диффузионным с диффузионными коэффициентами $a(t, x) = 0$, $B(t, x) = B$. Поэтому можно воспользоваться предложением п. 1. Используем равенство

$$Mf\left(x_\varepsilon\left(\frac{t_1}{\varepsilon}\right), \ldots, x_\varepsilon\left(\frac{t_r}{\varepsilon}\right)\right)\left[\varphi\left(x_\varepsilon\left(\frac{t+h}{\varepsilon}\right) - \varphi\left(x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) -\right.\right.$$
$$\left.- \frac{h}{2} \operatorname{sp} B\varphi''\left(x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right] = Mf\left(x_\varepsilon\left(\frac{t_1}{\varepsilon}\right), \ldots, x_\varepsilon\left(\frac{t_r}{\varepsilon}\right)\right) =$$

$$= M_{x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), y_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}\left[\varphi\left(x + \int_0^{h/\varepsilon} a(y_\varepsilon(s))\, ds\right) - \varphi(x) - \frac{h}{2}\operatorname{sp} B\varphi''(x)\right]_{x=x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}.$$

Здесь $M_{x,y}$ — математическое ожидание для процесса $x_\varepsilon(t)$, $y_\varepsilon(t)$ при условии $x_\varepsilon(0) = x$, $y_\varepsilon(0) = y$.

Выберем $h = h(\varepsilon)$ так, чтобы $\varepsilon^{-1}h(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon^{-2}h(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Имеем

$$\varphi\left(x + \int_0^{h/\varepsilon} a(y_\varepsilon(s))\, ds\right) - \varphi(x) = \int_0^{h/\varepsilon} \varphi'\left(x + \int_0^s a(y_\varepsilon(u))\, du\right), a(y_\varepsilon(s)))\, ds =$$

$$= \int_0^{h/\varepsilon} (\varphi'(x), a(y_\varepsilon(s)))\, ds +$$

$$+ \int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s \left(\varphi''\left(x + \int_0^u a(y_\varepsilon(v))\, dv\right) a(y_\varepsilon(u)), a(y_\varepsilon(s))\right) du ds =$$

$$= \int_0^{h/\varepsilon} (\varphi'(x), a(y_\varepsilon(s)))\, ds +$$

$$+\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s (\varphi''(x)\,a(y_\varepsilon(u)),\ a(y_\varepsilon(s)))\,duds\,+$$

$$+\,O\left(\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s \left\|\varphi''\left(x+\int_0^u a(y_\varepsilon(v))\,dv\right)-\varphi''(x)\right\|\cdot|a(y_\varepsilon(u))|\cdot|a(y_\varepsilon(s))|\,duds\right).$$

Поскольку $\varphi\in C^{(3)}(X)$, то $\|\varphi''(x+z)-\varphi''(x)\|\leqslant C|z|$. Из ограниченности $|a(y)|$ вытекает, что выражение под знаком O есть

$$O\left(\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s ududs\right)=O\left(\frac{h^3}{\varepsilon^3}\right).$$

Значит,

$$M_{x,y}\left[\varphi\left(x_\varepsilon\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)\right)-\varphi(x)\right]=M_{x,y}\int_0^{h/\varepsilon}(\varphi'(x),\ a(y_\varepsilon(s)))\,ds\,+$$

$$+\,M_{x,y}\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s(\varphi''(x)\,a(y_\varepsilon(u),\ a(y_\varepsilon(s)))\,duds+O(h^3/\varepsilon^3). \tag{14}$$

Для второго слагаемого в правой части, используя обозначение $R(s,y,C)=$ $=P(s,y,C)-\rho(C)$, имеем представление

$$\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s\int\int(\varphi''(x)\,a(y'),\ a(y''))\,P\left(\frac{u}{\varepsilon},\ y,\ dy'\right)P\left(\frac{s-u}{\varepsilon},y',dy''\right)=$$

$$=\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s\int\int(\varphi''(x)\,a(y'),\ a(y''))\,\rho(dy')\,R\left(\frac{s-u}{\varepsilon},y',dy''\right)duds\,+$$

$$+\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s\int\int(\varphi''(x)\,a(y'),\ a(y'')\,R\left(\frac{u}{\varepsilon},\ y,\ dy'\right)R\left(\frac{s-u}{\varepsilon},y',dy''\right).$$

Заметим, что

$$\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s R\left(\frac{s-u}{\varepsilon},y',C\right)duds=$$

$$=\varepsilon^2\int_0^{h/\varepsilon^2}\int_0^s R(s-u,y',C)\,dsdu=hR(y',C)+o(h),$$

а

$$\left|\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s R\left(\frac{u}{\varepsilon},y,\ C_1\right)R\left(\frac{s-u}{\varepsilon},y',\ C_2\right)duds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon^2\int_0^\infty|R(u,y,C_1)|\,du\int_0^\infty|R(v,y',C_2)|\,dv=O(\varepsilon^2).$$

Следовательно,

$$M_{x,y}\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s(\varphi''(x)\,a(y_\varepsilon(u)),\ a(y_\varepsilon(s)))\,duds=\frac{h}{2}\,\mathrm{Sp}\,B\varphi''(x)+o(h)+O(\varepsilon^2). \tag{15}$$

Для первого интеграла справа в (14) имеем оценку

$$M_{x,y}\int_0^{h/\varepsilon}(\varphi'(x),\ a(y_\varepsilon(s)))\,ds=\varepsilon\left(\varphi'(x),\ \int R(y,dy')\right)a(y'))\,+$$

$$+\,O\left(\varepsilon\int_{h/\varepsilon^2}^\infty\left|\int a(y')\,R(s,y,dy')\right|ds\right)=\varepsilon\left(\varphi'(x),\ \int R(y,dy')\,a(y')\right)+$$

$$+\,hO\left(\frac{\varepsilon^3}{h^2}\left(\frac{h}{\varepsilon^2}\int_{h/\varepsilon^2}^\infty\left|\int R(s,y,dy')\,a(y')\right|ds.\right.\right.$$

Из условия (11) вытекает, что $\alpha(T) \to 0$ при $T \to \infty$, где

$$\alpha(T) = T \int_T^{\infty} \left| \int R(s, y, dy') a(y') \right| ds. \tag{16}$$

Поэтому

$$M_{x,y}\left[\varphi\left(x_\varepsilon\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)\right) - \varphi(x) - \frac{h}{2}\operatorname{Sp} B\varphi''(x)\right] =$$

$$= \varepsilon \int (\varphi'(x), a(y')) R(y, dy') + O\left(\varepsilon^2 + \frac{h^3}{\varepsilon^3} + \frac{\varepsilon^3}{h}\alpha\left(\frac{h}{\varepsilon^2}\right)\right) + o(h). \tag{17}$$

Пусть Q_t — полугруппа в $\mathbf{B}_Y$ с производящим оператором П, заданным (1). Тогда $\| Q_t - I \| \leqslant c_1 t$, где $c_1 = \| \Pi \|$. Для функции $a_1(y)$, для которой $\int a_1(y) \rho(dy) = 0$, будет $\int R(s, y, dy') a_1(y) = Q_s a_1(y)$. Из (16) для такой функции получаем неравенство

$$\sup_y \left| \int_T^{T+\tau} Q_s a_1(y) \right| ds \leqslant \alpha_1(T) T^{-1},$$

где $\alpha_1(T) \to 0$ при $T \to \infty$.

Значит,

$$\alpha_1(T) T^{-1} \geqslant \sup_y \int_0^{\tau} (| Q_T a_1(y) | - \| Q_s - I \| \cdot \| Q_T a_1(y) \|) ds \geqslant$$

$$\geqslant \| Q_T a_1(y) \| \tau - c_1 \| Q_T a_1(y) \| \cdot \frac{\tau^2}{2}.$$

Поэтому существует такое $\alpha_2(T)$, что $\alpha_2(T) \to 0$ при $T \to \infty$ и

$$\| Q_T a_1(y) \| \leqslant \alpha_2(T) T^{-1}. \tag{18}$$

Тогда из (17) получаем

$$Mf\left(x_\varepsilon\left(\frac{t_1}{\varepsilon}\right), \dots, x_\varepsilon\left(\frac{t_r}{\varepsilon}\right)\right)\left[\varphi\left(x_\varepsilon\left(\frac{t+h}{\varepsilon}\right)\right) - \varphi\left(x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{h}{2}\operatorname{Sp} B\varphi''\left(x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right] = \varepsilon Mf\left(x_\varepsilon\left(\frac{t_1}{\varepsilon}\right), \dots, x_\varepsilon\left(\frac{t_r}{\varepsilon}\right)\right)\left(\varphi'\left(x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right),\right.$$

$$\left. a_1\left(y_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right) + o(h) + O\left(\frac{h^3}{\varepsilon^3} + \frac{\varepsilon^3}{h}\right)\alpha\left(\frac{h}{\varepsilon^2}\right), \tag{19}$$

где $a_1(y) = \int R(y, dy') a(y')$. Легко проверить, что $\int a_1(y) \rho(dy) = 0$. Далее, при $t - t_r > h/\varepsilon$ и $0 < h_1 < h$

$$Mf\left(x_\varepsilon\left(\frac{t_1}{\varepsilon}\right), \dots, x_\varepsilon\left(\frac{t_r}{\varepsilon}\right)\right)\left(\varphi'\left(x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right), a_1\left(y_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right) =$$

$$= Mf\left(x_\varepsilon\left(\frac{t_1}{\varepsilon}\right), \dots, x_\varepsilon\left(\frac{t_r}{\varepsilon}\right)\right) M_{x_\varepsilon\left(\frac{t-h_1}{\varepsilon}\right),\, y_\varepsilon\left(\frac{t-h_1}{\varepsilon}\right)}\left(\varphi'\left(x_\varepsilon\left(\frac{h_1}{\varepsilon}\right)\right), a_1\left(y_\varepsilon\left(\frac{h_1}{\varepsilon}\right)\right)\right) =$$

$$= Mf\left(x_\varepsilon\left(\frac{t_1}{\varepsilon}\right), \dots, x_\varepsilon\left(\frac{t_r}{\varepsilon}\right)\right) M_{x_\varepsilon\left(\frac{t-h_1}{\varepsilon}\right),\, y_\varepsilon\left(\frac{t-h_1}{\varepsilon}\right)}\left(\varphi'\left(x_\varepsilon\left(\frac{t-h_1}{\varepsilon}\right)\right),\right.$$

$$\left. a_1\left(y\left(\frac{h_1}{\varepsilon^2}\right)\right)\right) + O\left(\frac{h_1}{\varepsilon}\right) \leqslant \| f \| \cdot \| \varphi' \| \cdot \frac{\varepsilon^2}{h_1} \cdot \alpha_2\left(\frac{h_1}{\varepsilon^2}\right) + O\left(\frac{h_1}{\varepsilon}\right).$$

Таким образом, правая часть (19) имеет вид

$$o(h) + O\left(\frac{h^3}{\varepsilon^3} + \frac{\varepsilon^3}{h}\alpha\left(\frac{h}{\varepsilon^2}\right) + h_1 + \frac{\varepsilon^3}{h_1}\alpha_2\left(\frac{h_1}{\varepsilon^2}\right)\right).$$

Для доказательства утверждения достаточно выбрать так $h(\varepsilon)$ и $h_1(\varepsilon)$, чтобы

$$\frac{h_1(\varepsilon)}{h(\varepsilon)} \to 0, \quad \frac{h^2(\varepsilon)}{\varepsilon^3} \to 0, \quad \frac{\varepsilon^3}{h^2(\varepsilon)}\, \alpha\left(\frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right) \to 0 \text{ и } \frac{\varepsilon^3}{h_1^2(\varepsilon)}\, \alpha_2\left(\frac{h_1(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right) \to 0.$$

В случае, когда $\overline{a} \neq 0$, тоже можно получить некоторый диффузионный процесс, рассматривая процесс $x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$. Но в этом случае $x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ должно быть преобразовано. Рассмотрим процесс

$$\overline{x}_\varepsilon(t) = x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \frac{t}{\varepsilon}\,\overline{a} = x_\varepsilon(0) + \int\limits_0^{t/\varepsilon} [a(y_\varepsilon(s)) - \overline{a}]\, ds.$$

Так как $\int [a(y) - \overline{a}]\, \rho(dy) = \overline{a} - \overline{a} = 0$, то применим результат В. Его можно сформулировать так. Положим $u(t, x) = x + t\overline{a}$.

С. Если выполнено условие I и $x_\varepsilon(0) = x_0$, то процесс $\overline{x}_\varepsilon(t) = u\left(-\frac{t}{\varepsilon},\ x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)$ слабо сходится к диффузионному процессу $x(t)$ с коэффициентом переноса $a(t, x) = 0$ и оператором диффузии B, определяемым равенством (12), и начальным значением x_0.

В дальнейшем наша цель — получить результаты типа А, В, С в общем случае.

3. Теорема об усреднении. Рассмотрим процесс с производящим оператором (5). Через $y^x(t)$ обозначим марковский процесс с производящим оператором

$$\Pi^x g(y) = \int [g(y') - g(y)]\, \Pi^x(y, dy'). \tag{20}$$

Будем предполагать выполненным следующее условие:

II. Функция Π^x из X в $L(\mathbf{B}_Y)$ непрерывна (по норме) относительно x, в частности для всех $c > 0$

$$\sup_{|x| \leqslant c} \| \Pi^x \| < \infty, \quad \lim_{\delta \to 0} \sup_{\substack{|x| \leqslant c \\ |x - \overline{x}| \leqslant \delta}} \| \Pi^x - \Pi^{\overline{x}} \| = 0. \tag{21}$$

Пусть $P^x(t, y, C)$ — вероятность перехода для процесса $y^x(t)$. Будем предполагать, что для семейства процессов $\{y^x(t),\ x \in X\}$ выполнено такое условие:

III. Существует семейство $\{\rho^x,\ x \in X\}$ вероятностных мер на C, такое, что для всякой $g \in \mathbf{B}_Y$ и $c > 0$

$$\lim_{T \to \infty} \sup_{|x| \leqslant c,\ y \in Y} \left| \frac{1}{T} \int\limits_0^T \int g(y')\, P^x(s, y, dy') - \int g(y')\, \rho^x(dy) \right| = 0. \tag{22}$$

Очевидно, что ρ^x — эргодическое распределение для $y^x(t)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* II *и* III *и существует такое k, что*

$$\sup_{x, y} | a(x, y) | \leqslant k, \quad | a(x, y) - a(x', y) | \leqslant k\, | x - x' |, \quad y \in Y, \ x, x' \in X.$$

Положим

$$\overline{a}(x) = \int a(x, y)\, \rho^x(dy) \tag{23}$$

и пусть при некотором $k_1 > 0$

$$| \overline{a}(x) - \overline{a}(x') | \leqslant k_1\, | x - x' |, \quad x, x' \in X. \tag{24}$$

Тогда процесс $x_\varepsilon(t)$ с начальным условием $x_\varepsilon(0) = 0$ сходится к решению уравнения

$$d\overline{x}(t)/dt = \overline{a}(\overline{x}(t)), \quad x(0) = x_0. \tag{25}$$

Замечание. В силу условия (24) уравнение (25) имеет единственное решение с данным начальным условием.

Для доказательства этой теоремы понадобится одно вспомогательное утверждение

Лемма 1. *Пусть* $g(y)\in \mathbf{B}_Y$. *Тогда*

$$|M_{x,y}[g(y_\varepsilon(t))-g(y_\varepsilon^x(t))]|\leqslant \frac{t}{\varepsilon}\sup_{|x-x'|\leqslant kt}\|\Pi^x-\Pi^{x'}\|. \tag{26}$$

Доказательство. Рассмотрим марковский случайный процесс в $X\times Y$ с производящим оператором

$$\overline{A}_\varepsilon f(x,y)=(a(x,y),f'_x(x,y))+\varepsilon^{-1}\int \Pi^{\overline{x}}(y,dy')[f(x,y')-f(x,y)]. \tag{27}$$

Пусть T_t — полугруппа с производящим оператором A_ε (4), а T_t — полугруппа с производящим оператором $\overline{A}_\varepsilon$. Тогда

$$T_tf(x,y)-\overline{T}_tf(x,y)=\int_0^t T_s(A_\varepsilon-\overline{A}_\varepsilon)\overline{T}_{t-s}f(x,y)\,ds=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t M_{x,y}\int(\Pi^{x_\varepsilon(s)}(y_\varepsilon(s),dy')-\Pi^{\overline{x}}(y_\varepsilon(s),dy'))\,\overline{T}_{t-s}f(x,y)\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\frac{t}{\varepsilon}M_{x,y}\sup_{s\leqslant t}\|\Pi^{x_\varepsilon(s)}-\Pi^{\overline{x}}\|. \tag{28}$$

Так как $|x_\varepsilon(s)-\overline{x}|\leqslant|x_\varepsilon(s)-x_\varepsilon(0)|+|x_\varepsilon(0)-\overline{x}|\leqslant ks+|x_\varepsilon(0)-\overline{x}|$, то

$$M_{x,y}\sup_{s\leqslant t}\|\Pi^{x_\varepsilon(s)}-\Pi\|\leqslant\sup_{|x'-\overline{x}|\leqslant kt+|x-\overline{x}|}\|\Pi^{x'}-\Pi^{\overline{x}}\|. \tag{29}$$

Чтобы получить (26), нужно (29) подставить в правую часть (28) и положить $\overline{x}=x$.

Лемма 2. *Если выполнено условие* III, *то для всякого* $c>0$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{|x|\leqslant c,y}\left|\frac{1}{T}\int a(x,y')P^x(s,y,dy')\,ds-\overline{a}(x)\right|=0. \tag{30}$$

Доказательство. Пусть $\{x_1,\dots,x_N\}$ — множество точек из шара $\{x:|x|\leqslant c\}$, образующее δ-сеть. При $|x-x_i|\leqslant\delta$ будет

$$\sup_y\left|\frac{1}{T}\int_0^T a(x,y')P^x(s,y,dy')\,ds-\overline{a}(x)\right|=$$

$$=\sup_y\left|\frac{1}{T}\int_0^T\int[a(x,y')-a(x_k,y')]P^x(s,y,dy')+\right.$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T\int a(x_k,y')P^x(s,y,dy')-\int a(x_k,y')\rho^x(dy')+$$

$$\left.+\int(a(x_k,y)-a(x,y))\rho^x(dy')\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2k\delta+\sup_y\left|\frac{1}{T}\int_0^T a(x_k,y')P^x(s,y,dy')-\int a(x_k,y')\rho^x(dy')\right|.$$

Обозначим выражение, стоящее в левой части (30) под знаком предела, через $\widetilde{a}(c,T)$. Тогда

$$\widetilde{a}(c,T)\leqslant 2k\delta+\sup_{1\leqslant i\leqslant N}\sup_y\left|\frac{1}{T}\int_0^T\int a(x_i,y')P^x(s,y,dy')-\int a(x_i,y')P^x(dy')\right|. \tag{31}$$

Значит, в силу условия III $\overline{\lim\limits_{T\to\infty}}\,\tilde{a}(c, T) \leqslant 2k\delta$. Так как $\delta > 0$ произвольно, отсюда вытекает (30).

Доказательство теоремы. Воспользуемся предложением п. 1. Имеем

$$L_t\varphi = (\bar{a}(x),\ \varphi'(x)),$$

$$Mf(x_\varepsilon(t_1), \ldots, x_\varepsilon(t_r))[\varphi(x_\varepsilon(t+h)) - \varphi(x_\varepsilon(t)) -$$

$$- h(\bar{a}(x_\varepsilon(t)),\ \varphi'(x_\varepsilon(t)))] = Mf(x_\varepsilon(t_1), \ldots, x_\varepsilon(t_r))\,\Delta_h\varphi(x_\varepsilon(t),\ y_\varepsilon(t)),$$

где $\Delta_h\varphi(x, y) = M_{x,y}[\varphi(x_\varepsilon(h)) - \varphi(x) - h(\bar{a}(x),\ \varphi'(x))]$.

Далее, используя лемму 1, находим

$$\Delta_h\varphi(x, y) = M_{x,y}\Big(\int_0^h (\varphi'(x_\varepsilon(s)),\ a(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)))\,ds -$$

$$- h(\bar{a}(x), \varphi'(x))\Big) = M_{x,y}\int_0^h (\varphi'(x), a(x, y_\varepsilon(s)))\,ds -$$

$$- h(\bar{a}(x),\ \varphi'(x)) + O(h^2) = M_{x,y}\int_0^h \left(\varphi'(x),\ a\left(x,\ y^x\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\right)ds -$$

$$- h(\bar{a}(x),\ \varphi'(x)) + O(h^2) + \int_0^h M_{x,y}\Big[(\varphi'(x), a(x, y_\varepsilon(s))) -$$

$$- \left(\varphi'(x),\ a\left(x, y^x\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\right)\Big]ds = \varepsilon\int_0^{h/\varepsilon}\int (\varphi'(x), a(x, y'(s)))\,P^x(s, y, dy')\,ds -$$

$$- h(\bar{a}(x), \varphi'(x)) + O\left(h^2 + \frac{h^2}{\varepsilon}\sup_{|x-x'|\leqslant kh}\|\Pi^{x'} - \Pi^x\|\right).$$

Используя обозначения леммы 2, можем записать

$$\sup_{|x|\leqslant c,\,y}|\Delta_h\varphi(x,\ y)| = O\left(h^2 + \frac{h^2}{\varepsilon}\sup_{\substack{|x-x'|\leqslant kh\\ |x|\leqslant c}}\|\Pi^{x'} - \Pi^x\| + h\tilde{a}\left(c, \frac{h}{\varepsilon}\right)\right). \quad (32)$$

Выберем h так, чтобы $h/\varepsilon \to \infty$, и если c таково, что $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geqslant c$, потребуем дополнительно, чтобы

$$\frac{h}{\varepsilon}\sup_{\substack{|x-x'|\leqslant kh\\ |x|\leqslant c}}\|\Pi^{x'} - \Pi^x\| \to 0.$$

Тогда из (32) вытекает

$$\sup_{x,y}|\Delta_h\varphi(x, y)| = o(h).$$

Поэтому

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}Mf(x_\varepsilon(t_1), \ldots, x_\varepsilon(t_r))\,\Delta_h\varphi(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) = 0.$$

Теорема доказана.

4. Диффузия в равновесной системе. Рассмотрим случай, когда $\bar{a}(x) = 0$ (т. е. вариант B п. 2). Наша цель — сформулировать условия, при которых процесс $x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \tilde{x}_\varepsilon(t)$ сходится к диффузионному процессу. Выделим в выражении

$$\Delta_h\varphi(x, y) = M_{x,y}[\varphi(\tilde{x}_\varepsilon(h)) - \varphi(x)] \quad (33)$$

члены порядка h и представим их в виде $hL\varphi(x)$, где L — некоторый дифференциальный оператор второго порядка. Возможность такого представления и есть требуемые условия. Будем их искать постепенно. Введем следующее условие:

IV. Существует такая постоянная k, что $|a(x, y)| \leqslant k$, $\|a'_x(x, y)\| \leqslant k$ и $\|a'_x(x, y) - a'_x(\bar{x}, y)\| \leqslant k|x - y|$ (a'_x — при фиксированных x и y есть оператор из $L(X)$).

При выполнении условия IV

$$\Delta_h\varphi(x, y) = M_{x,y}\int_0^{h/\varepsilon}(\varphi'(x_\varepsilon(s)), a(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)))\,ds =$$

$$= M_{x,y}\int_0^{h/\varepsilon}(\varphi'(x), a(x, y_\varepsilon(s)))\,ds + M_{x,y}\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s[(\varphi''(x_\varepsilon(u))\,a(x_\varepsilon(u), y_\varepsilon(u)),$$

$$a(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s))) + (a'_x(x_\varepsilon(u), y_\varepsilon(u))\,a(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)), \varphi'(x_\varepsilon(s)))]\,du\,ds.$$

Если $\varphi \in C_0^{(3)}(X)$, то $(\varphi''(\tilde{x})\,a(\tilde{x}, y), a(\bar{x}, y_1)) + (a'_x(\tilde{x}, y)\,a(\tilde{x}, y), \varphi'(x))$ удовлетворяет условию Липшица по $\tilde{x}$ и x, поэтому

$$\Delta_h(\varphi(x, y)) = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + O\left(\frac{h^3}{\varepsilon^3}\right), \tag{34}$$

где

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^{h/\varepsilon} M_{x,y}(\varphi'(x), a(x, y_\varepsilon(s)))\,ds, \tag{35}$$

$$\mathcal{J}_2 = \int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s M_{x,y}\,l(\varphi, x, y_\varepsilon(u), y_\varepsilon(s))\,du\,ds, \tag{36}$$

$$l(\varphi, x, y', y'') = (\varphi''(x)\,a(x, y'), a(x, y'')) + (a'_x(x, y'')\,a(x, y'), \varphi'(x)).$$

Для процессов подобного вида (см. п. 2) можно подбирать $h = h(\varepsilon)$ так, чтобы $h/\varepsilon \to 0$, $h/\varepsilon^2 \to \infty$, $h^3/\varepsilon^3 = o(h)$. Используя (26) в предположении, что при некотором k $\|\Pi^x - \Pi^{x'}\| \leqslant k|x - x'|$, можем преобразовать (36) так:

$$\mathcal{J}_2 = \tilde{\mathcal{J}}_2 + \int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s M_{x,y}\Big[M(l(\varphi, x, y_\varepsilon(u), y_\varepsilon(s))/x_\varepsilon(u), y_\varepsilon(u)) -$$

$$-\int P^{x_\varepsilon(u)}(s - u, y_\varepsilon(u), dy')\,l(\varphi, x, y_\varepsilon(u), y')\Big]\,du\,ds = \tilde{\mathcal{J}}_2 + O\left(\frac{h^4}{\varepsilon^5}\right),$$

где

$$\tilde{\mathcal{J}}_2 = M_{x,y}\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s\int P^{x_\varepsilon(u)}\left(\frac{s - u}{\varepsilon}, y_\varepsilon(u), dy'\right)l(\varphi, x, y_\varepsilon(u), y')\,ds.$$

Если для Π^x выполнено условие Липшица (по x), то снова используя (26), можно с ошибкой $O\left(\frac{h^4}{\varepsilon^5}\right)$ заменить в выражении $\tilde{\mathcal{J}}_2$ $x_\varepsilon(u)$ на x. Если теперь в полученном выражении заменить $y_\varepsilon(u)$ на $y^x\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)$, опять будет ошибка $O\left(\frac{h^4}{\varepsilon^5}\right)$. Так что

$$\mathcal{J}_2 = M_{x,y}\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s l\left(\varphi, x, y^x\left(\frac{u}{\varepsilon}\right),\ y^x\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)du\,ds + O(h^4\varepsilon^{-5}). \tag{37}$$

Рассмотрим теперь $\mathcal{J}_1$. Опять нужно заменить $y_\varepsilon(s)$ на $y^x\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$, поскольку условия естественно формулировать для операторов Π^x. В цепочке (28) имеется равенство (если положить $f(x, y) = (\varphi'(x), a(\bar{x}, y))$, а затем $\bar{x}=x$)

$$M_{x,y}(\varphi'(x), a(x, y_\varepsilon(s))) - M_{x,y}\left(\varphi'(x), a\left(x, y^x\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\right) =$$

$$= M_{x,y}\int_0^s \int (\varphi'(x), a(x, y''))\frac{1}{\varepsilon}(\Pi^{x_\varepsilon(u)}(y_\varepsilon(u), dy') -$$

$$- \Pi^x(y^\varepsilon(u), dy'))\, P^x\left(\frac{s-u}{\varepsilon}, y', dy''\right) du.$$

Выражение в правой части преобразуем, предполагая существование $\frac{\partial}{\partial x}\Pi^x$.

V. Существует непрерывная производная $\frac{\partial}{\partial x}\Pi^x$, если $\left(\frac{\partial}{\partial x}\Pi^x, z\right)$ — производная в направлении $z \in X$, то она удовлетворяет условию Липшица по x:

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\Pi^x, z\right)\Big|_{x=x_1} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\Pi^x, z\right)\right\| \leqslant k|x_1 - x_2||z|.$$

Если выполнено это условие, то

$$\mathcal{J}_1 = M_{x,y}\int_0^{h/\varepsilon}\left(\varphi'(x), a\left(x, y^x\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\right) ds +$$

$$+ M_{x,y}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s\int_0^u l_1(\varphi, s-u, x, x_\varepsilon(v), y_\varepsilon(v), y_\varepsilon(u))\, dvduds, \tag{38}$$

где

$$l_1(\varphi, s-u, x, x_1, y_1, y_2) =$$

$$= \int\int (\varphi'(x), a(x, y_1))\left(\frac{\partial}{\partial x}\Pi^{x_1}(y_2, dy'), a(x_1, y_1)\right) P^x\left(\frac{s-u}{\varepsilon}, y', dy''\right).$$

Так как $l_1(\varphi, s-u, x, x_1, y_1, y_2)$ удовлетворяет условию Липшица по x_1, то во втором слагаемом в правой части (38) можно заменить $x_\varepsilon(v)$ на x с ошибкой $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s\int_0^u v dv\right) = O(h^4\varepsilon^{-5})$. После этого, как и для $\mathcal{J}_2$, можем заменить $y_\varepsilon(v)$ и $y_\varepsilon(u)$ на $y^x\left(\frac{v}{\varepsilon}\right)$ и $y^x\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)$, так как при этом

$$M_{x,y}\int_0^s\int_0^u l_1(\varphi, s-u, x, x, y_\varepsilon(v), y_\varepsilon(u))\, dvdu =$$

$$= M_{x,y}\int_0^s\int_0^u l_1\left(\varphi, s-u, x, x, y^x\left(\frac{v}{\varepsilon}\right), y^x\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right) dvdu + O(h^4\varepsilon^{-5}),$$

то

$$\mathcal{J}_1 = M_{x,y}\int_0^{h/\varepsilon}\left(\varphi'(x), a\left(x, y^x\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\right) ds +$$

$$+ M_{x,y}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s\int_0^u l_1\left(\varphi, s-u, x, x, y^x\left(\frac{v}{\varepsilon}\right), y^x\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right) dvduds + O\left(\frac{h^5}{\varepsilon^7}\right). \tag{39}$$

Так как $h/\varepsilon^2 \to \infty$, то выбирая h так, чтобы $h^4/\varepsilon^7 \to 0$, будем иметь $h^3/\varepsilon^5 \to \to 0$, $h^2/\varepsilon^3 \to 0$. Используя представления (34), (37), (39), получаем выражение для $\Delta_h \varphi(x, y)$ через процесс $y^x(t)$. Естественно накладывать на $y^x(t)$ условия, аналогичные условию 1 п. 2, использовавшемуся при рассмотрении случая B.

Пусть, как и в п. 3, $y^x(t)$ — эргодический процесс с эргодическим распределением $\rho^x(C)$. Обозначим

$$R^x(s, y, C) = P^x(s, y, C) - \rho^x(C), \ C \in \mathcal{C}. \tag{40}$$

По предположению $\int a(x, y)\rho^x(dy) = 0$. Поэтому $\int l(\varphi, x, y', y'')\rho^x(dy') = = 0$. Из (37) имеем

$$\mathcal{I}_2 = \varepsilon^2 \int_0^{h/\varepsilon^2}\int_0^s \int\int l(\varphi, x, y', y'')[R^x(u, y, dy') + \rho^x(dy')] \times$$
$$\times [R^x(s-u, y', dy'') + \rho^x(dy'')]\, du ds + o(h) =$$
$$= \varepsilon^2 \int_0^{h/\varepsilon^2}\int_0^s \int\int l(\varphi, x, y', y'')\rho^x(dy')R^x(s-u, y', dy'')\, du ds +$$
$$+ \varepsilon^2 \int_0^{h/\varepsilon^2}\int_0^s \int\int l(\varphi, x, y', y'')R^x(u, y, dy')\rho^x(dy'') +$$
$$+ \varepsilon^2 \int_0^{h/\varepsilon^2}\int_0^s \int\int l(\varphi, x, y', y'')R^x(u, y, dy')R^x(s-u, y', dy'') + o(h). \tag{41}$$

Так как $\int l_1(\varphi, s-u, x, x, y', y'')\rho^x(dy') = 0$, то, обозначив через $\mathcal{I}_1^{(1)}$ и $\mathcal{I}_1^{(2)}$ первое и второе слагаемое в правой части (39), будем иметь

$$\mathcal{I}_1^{(1)} = \varepsilon \int_0^{h/\varepsilon^2}\int (\varphi'(x), a(x, y''))R^x(s, y, dy')\, ds, \tag{42}$$

$$\mathcal{I}_1^{(2)} = \varepsilon^2 \int_0^{h/\varepsilon^2}\int_0^s\int_0^u \int\int l_1(\varphi, \varepsilon s - \varepsilon u, x, x, y', y'')\rho^x(dy') \times$$
$$\times R^x(u-v, y', dy'')\, dv du ds + \tag{43}$$
$$+ \varepsilon^2 \int_0^{h/\varepsilon^2}\int_0^s\int_0^u \int\int l_1(\varphi, \varepsilon s - \varepsilon u, x, x, y', y'') \times$$
$$\times R^x(v, y, dy')\rho^x(dy'')\, dv du ds + \tag{44}$$
$$+ \varepsilon^2 \int_0^{h/\varepsilon^2}\int_0^s\int_0^u \int\int l_1(\varphi, \varepsilon s - \varepsilon u, x, x, y', y'') \times$$
$$\times R^x(v, y, du')R^x(u-v, y', dy'')\, dv du ds. \tag{45}$$

VI. Пусть для всякого $g \in \mathbf{B}_Y$

$$\int_0^\infty \left| \int R^x(s, y, dy')g(y') \right| ds < \infty$$

и при некотором $\beta > 3$ для всякого $c > 0$ существует такое c_1, что при $|x| \leqslant c$

$$\int_T^\infty \left| \int R^x(s, y, dy')g(y') \right| ds \leqslant c_1 T^{-\beta} \| g \|.$$

Обозначим $\int\limits_0^\infty R^x(s, y, C)\,ds = R^x(y, C)$. Легко видеть, что при выполнении условия VI

$$\mathcal{J}_2 = h\int\int l(\varphi, x, y', y'')\,\rho^x(dy')\,R^x(y', dy'') + h\theta_1(x, y) + o(h), \tag{46}$$

где

$$\theta_1(x, y) = \int\int l(\varphi, x, y', y'')\,R^x(y, dy')\,\rho^x(dy'')$$

(выражение (41) есть $O(\varepsilon^2) = o(h)$).

Рассмотрим теперь $\mathcal{J}_1^{(2)}$. Поскольку $\Pi^x C = 0$ (C — константа), то $\frac{\partial}{\partial x}\Pi^x C = 0$, и в выражении (38) $P^x\left(\frac{s-u}{\varepsilon}, y', dy''\right)$ можно заменить на $R^x\left(\frac{s-u}{\varepsilon}, y', dy''\right)$. При выполнении условия VI выражение (43) имеет вид

$$h\int\int\int\int \rho^x(dy')\,R^x(y', dy'')\left(\frac{\partial}{\partial x}\Pi^x(y'', dy_1), a(x, y')\right)\times$$
$$\times(\varphi'(x), a(x, y_2))\,R^x(y_1, dy_2) + o(h),$$

а выражение (44) —

$$h\theta_2(x, y) = h\int\int\int\int R^x(y, dy')\,\rho^x(dy'')\left(\frac{\partial}{\partial x}\Pi^x(y'', dy_1), a(x, y')\right)\times$$
$$\times(\varphi'(x), a(x, y_2))\,R^x(y_1, dy_2) + o(h).$$

Наконец, (45) есть $O(\varepsilon^2) = o(h)$. $\mathcal{J}_1^{(1)}$ в (42) можно переписать так:

$$\mathcal{J}_1^{(1)} = \varepsilon\theta_0(x, y) + O\left(\varepsilon\int\limits_{h/\varepsilon^2}^{\infty}\left|\int(\varphi'(x), a(x, y'))\,R^x(s, y, dy')\right|\right) =$$
$$= \varepsilon\theta_0(x, y) + O\left(\varepsilon\left(\frac{\varepsilon^2}{h}\right)^{\beta}\right),$$

где

$$\theta_0(x, y) = \int(\varphi'(x), a(x, y'))\,R^x(y, dy').$$

Выберем $h = \varepsilon^\alpha$, где $\frac{7}{4} < \alpha < \frac{1+2\beta}{1+\beta}$; при $\beta > 3$ такие α существуют. Тогда $\varepsilon\left(\frac{\varepsilon^2}{h}\right)^{\beta} = o(h)$. Следовательно,

$$\Delta_h\varphi(x, y) = hL\varphi(x) + \varepsilon\theta_0(x, y) + h\theta_1(x, y) + h\theta_2(x, y) + o(h), \tag{47}$$

где

$$L\varphi(x) = (a_1(x) + a_2(x), \varphi'(x)) + \frac{1}{2}\operatorname{Sp} B(x)\,\varphi''(x), \tag{48}$$

$$a_1(x) = \int\int a'_x(x, y'')\,a(x, y')\,\rho^x(dy')\,R^x(y', dy''),$$

$$a_2(x) = \int\int\int\int a(x, y_2)\left(\frac{\partial}{\partial x}\Pi^x(y'', dy_1), a(x, y')\right)\times$$
$$\times\rho^x(dy')\,R^x(y', dy'')\,R^x(y_1, dy_2),$$

$$(B(x)z_1, z_2) = \int\int(a(x, y'), z_1)(a(x, y''), z_2)\,\rho^x(dy')\,R^x(y', dy''),$$

причем если $\varphi \in C_0^{(3)}(X)$, то $o(h)$ равномерно по x и y. Заметим теперь, что $\int \theta_i(x, y)\rho^x(dy) = 0$, $i = 0, 1, 2$.

Наложим условие, обеспечивающее условие Липшица для $\theta_i(x, y)$ по x.

VII. Существует такое k, что для всех $g \in B_Y$

$$\left|\int g(y') R^x(y, dy') - \int g(y'') R^{\bar{x}}(y, dy'')\right| \leqslant k\|g\|\cdot|x - \bar{x}|,$$

$$\left|\int g(y)\rho^x(dy) - \int g(y)\rho^{\bar{x}}(dy)\right| \leqslant k\cdot\|g\|\cdot|x - \bar{x}|.$$

Лемма 3. *Пусть функция $\theta(x, y)$ для всех x принадлежит* B_Y, $\int \theta(x, y)\rho^x(dy) = 0$ *и* $|\theta(x, y) - \theta(\bar{x}, y)| \leqslant k\cdot|x - \bar{x}|$. *Тогда*

$$|M_{\bar{x},\bar{y}}\theta(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))| = O\left(t + \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{-\beta}\right).$$

Доказательство. Воспользовавшись (26), можем записать

$$|M_{\bar{x},\bar{y}}\theta(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))| = O(|x_\varepsilon(t) - \bar{x}|) + |M_{\bar{x},\bar{y}}\theta(\bar{x}, y_\varepsilon(t))| =$$

$$= O\left(t + \left|M_{\bar{x},\bar{y}}\theta(\bar{x}, y_\varepsilon(t)) - \theta\left(\bar{x}, \bar{y}^x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right| + \right.$$

$$+ \left|M_{\bar{x},\bar{y}}\theta\left(\bar{x}, y^{\bar{x}}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right| = O\left(t + \frac{1}{\varepsilon}\left|\int_0^t \int M_{\bar{x},\bar{y}}\left(\Pi^{x_\varepsilon(s)}(y_\varepsilon(s), dy') - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \Pi^{\bar{x}}(y_\varepsilon(s), dy') \int R^{\bar{x}}\left(\frac{t - s}{\varepsilon}, y', dy''\right)\theta(\bar{x}, y'')\right|\right) + \left|M_{\bar{x},\bar{y}}\theta\left(\bar{x}, y^{\bar{x}}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right|,$$

$P^{\bar{x}}$ можно заменить на $R^{\bar{x}}$, так как $\Pi^x c = 0$ для c-константы. Так как $\|\Pi^{x_\varepsilon(s)} - \Pi^x\| = O(t)$, а

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \left|R^x\left(\frac{t - s}{\varepsilon}, y', dy''\right)\right|\theta(\bar{x}, y'') = O(1),$$

то

$$|M_{\bar{x},\bar{y}}\theta(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))| = O(t) + \left|\int R^{\bar{x}}\left(\frac{t}{\varepsilon}, \bar{y}, dy'\right)\theta(\bar{x}, y')\right|.$$

Аналогично неравенству (18) из условия VI можно получить неравенство

$$\left|\int R^{\bar{x}}(T, \bar{y}, dy')\theta(\bar{x}, y')\right| = O(T^{-\beta}),$$

поэтому

$$\left|\int R^{\bar{x}}\left(\frac{t}{\varepsilon}, \bar{y}, dy'\right)\theta(\bar{x}, y')\right| = O\left(\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{-\beta}\right).$$

Отсюда и вытекает утверждение леммы.

Следствие. *Пусть* $\tau = \varepsilon^\gamma$, *где* $\alpha < \gamma < \dfrac{2\beta + 1 - \alpha}{\beta}$ (*из неравенства* $\alpha < \dfrac{2\beta + 1}{\beta}$ *вытекает* $\alpha < \dfrac{2\beta + 1 - \alpha}{\beta + 1}$). *Тогда*

$$\varepsilon M_{\bar{x},\bar{y}}\theta_0\left(x_\varepsilon\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), y_\varepsilon\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) = O\left(\tau + \varepsilon\left(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^\gamma}\right)^\beta\right) =$$

$$= O(\varepsilon^\gamma + \varepsilon^{(2-\gamma)\beta+1}) = o(\varepsilon^\alpha) = o(h).$$

Точно так $hM_{\bar{x},\bar{y}}\theta_i\left(x_\varepsilon\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), y_\varepsilon\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) = o(h)$, $\quad i = 1, 2$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* III — VII, $\int a(x, y)\rho^x(dy) = 0$ *и* $x_\varepsilon(0) = x_0$. *Тогда процесс* $\tilde{x}_\varepsilon(t) = x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ *слабо сходится по распределениям к диффузионному процессу* $x(t)$ *с производящим оператором* L, *определяемым равенством* (48) *и начальным значением* x_0.

Доказательство. Пусть $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_r < t$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ будет $t - \tau > t_r$, где τ таково, как в следствии леммы 3. Значит в силу (47)

$$Mf\left(x_\varepsilon\left(\frac{t_1}{\varepsilon}\right), \ldots, x_\varepsilon\left(\frac{t_r}{\varepsilon}\right)\right)\left[\varphi\left(x_\varepsilon\left(\frac{t+h}{\varepsilon}\right)-\varphi\left(x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)-hL\varphi\left(x_\varepsilon\left(\frac{t}{h}\right)\right)\right]=$$

$$= Mf\left(x_\varepsilon\left(\frac{t_1}{\varepsilon}\right), \ldots, x_\varepsilon\left(\frac{t_r}{\varepsilon}\right)\right)\left[\Delta_h\varphi\left(x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), y_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)-hL\varphi\left(x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right]=$$

$$= Mf\left(x_\varepsilon\left(\frac{t_1}{\varepsilon}\right), \ldots, x_\varepsilon\left(\frac{t_r}{\varepsilon}\right)\right)\left(\varepsilon\theta_0\left(x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), y_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)+\right.$$

$$+ h\sum_1^2\theta_i\left(x_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), y_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) + o(h) = Mf\left(x_\varepsilon\left(\frac{t_1}{\varepsilon}\right), \ldots, x_\varepsilon\left(\frac{t_r}{\varepsilon}\right)\right)\times$$

$$\times M_{x_\varepsilon\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right), y_\varepsilon\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)}\left(\varepsilon\theta_0\left(x_\varepsilon\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), y_\varepsilon\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) + h\sum_1^2\theta_i\left(x_\varepsilon\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), y_\varepsilon\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right)+\right.$$
$$\left. + o(h) = o(h)\right.$$

на основании следствия из леммы 3. Остается воспользоваться предложением п. 1.

5. Диффузия по траекториям усредненной системы. В простейшем случае, рассмотренном в п. 2 как С, мы видели, что и при $\bar{a} \neq 0$ при временах вида t/ε возникает диффузия. Ее легко заметить, если вернуться по траектории усредненной системы к начальному моменту времени: то положение, к которому мы вернемся, изменится, и его изменение имеет диффузионный характер. Исследуем этот вопрос в более общем случае. Обозначим через $\bar{a}(x)$ функцию (23) и пусть $u(t, x)$ решение уравнения

$$\frac{d}{dt}u(t, x) = \bar{a}(u(t, x)),\ u(0, x) = x. \tag{49}$$

Рассмотрим процесс

$$\tilde{x}_\varepsilon(t) = u(-t, x_\varepsilon(t)); \tag{50}$$

$x_\varepsilon(t)$ — то начальное положение, из которого, двигаясь по траектории динамической системы, задаваемой (49), она за время t попадет в состояние $x_\varepsilon(t)$. Положим

$$\tilde{a}(t, x, y) = u'_x(-t, u(t, x))(a(u(t, x), y) - \bar{a}(u(t, x))). \tag{51}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}_\varepsilon(t) = -\frac{\partial}{\partial t}u(-t, x_\varepsilon(t)) + u'_x(-t, x_\varepsilon(t))\,a(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) =$$

$$= \tilde{a}(t, \tilde{x}_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)). \tag{52}$$

Мы воспользовались равенствами

$$u(-t, u(t, x)) = x,\ u'_t(t, x) = u'_x(t, x)\bar{a}(x).$$

По условию

$$\int\tilde{a}(t, x, y)\rho^{u(t,x)}(dy) = 0. \tag{53}$$

Таким образом, для процесса $\widetilde{x}_\varepsilon(t)$ выполняется условие «равновесности», но коэффициент $\widetilde{a}$ теперь уже зависит от t.

Положим

$$\Delta_{t,h}\varphi(x, y) = M\left(\varphi\left(\widetilde{x}_\varepsilon\left(t+\frac{h}{\varepsilon}\right), \ y_\varepsilon\left(t+\frac{h}{\varepsilon}\right)\right) - \right.$$
$$\left. - \varphi(x, y)/\widetilde{x}_\varepsilon(t) = x, \ y_\varepsilon(t) = y\right).$$

Наша цель — выделение в этом выражении членов порядка h. Для краткости положим $M(\cdot/\widetilde{x}_\varepsilon(t) = x, y_\varepsilon(t) = y) = \widetilde{M}^t_{x,y}(\cdot)$. Пусть $h = \varepsilon\tau$, где $\tau \to \infty$, $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ таково, что $\sigma/\varepsilon \to \infty$, $\sigma/h \to 0$, $\sigma^2/\varepsilon \to 0$. Если $\varphi \in C_0^{(3)}(X)$ и a удовлетворяет условию IV, то

$$\Delta_{t,h}\varphi(x, y) = \widetilde{M}^t_{x,y}\int_0^\tau(\varphi'(\widetilde{x}_\varepsilon(t+s), \ \widetilde{a}(t+s, \widetilde{x}_\varepsilon(t+s), y_\varepsilon(t+s)))\,ds =$$
$$= \widetilde{M}^t_{x,y}\int_0(\varphi'_x(\widetilde{x}_\varepsilon(t+s), \widetilde{a}(t+s, \ \widetilde{x}_\varepsilon(t+s), y_\varepsilon(t+s)))\,ds +$$
$$+ \widetilde{M}^t_{x,y}\int_\sigma^\tau(\varphi'_x(\widetilde{x}_\varepsilon(t+s-\sigma), \widetilde{a}(t+s, u(\sigma, \widetilde{x}_\varepsilon(t+s-\sigma)), \ y_\varepsilon(t+s)))\,ds +$$
$$+ \widetilde{M}^t_{x,y}\int_\sigma^\tau\int_0^\sigma l_t(\varphi, u, s, \sigma, \widetilde{x}_\varepsilon(u), y_\varepsilon(u), y_\varepsilon(s))\,du\,ds,$$

где

$$l_t(\varphi, u, s, \sigma, x, y_1, y_2) = (\varphi''(x)\widetilde{a}(t+s, u(\sigma, x), y_2),$$
$$\widetilde{a}(t+u, x, y_1)) + (\widetilde{a}'_x(t+s, u(\sigma, x), y_2)\, u'_x(\sigma, x)\widetilde{a}(t+u, x, y_1), \ \varphi'(x)).$$

Будем предполагать, что $\widetilde{a}(t, x, y)$ ограничено, $\widetilde{a}(t, x, y)$ и $\widetilde{a}'_x(t, x, y)$ удовлетворяют условию Липшица по t и x. Тогда

$$|u(\sigma, x) - x| = O(\sigma), \ \|u'_x(\sigma, x) - I\| = O(\sigma),$$
$$\Delta_{t,h}\varphi(x, y) =$$
$$= \widetilde{M}^t_{x,y}\int_\sigma^\tau(\varphi'_x(\widetilde{x}_\varepsilon(t+s-\sigma), \widetilde{a}(t+s, u(\sigma, \widetilde{x}_\varepsilon(t+s-\sigma)), y_\varepsilon(t+s))\,ds +$$
$$+ \widetilde{M}^t_{x,y}\int_\sigma^\tau\int_0^\sigma l_t(\varphi, u, s, 0, \widetilde{x}_\varepsilon(t+s-\sigma), y_\varepsilon(t+s-u), y_\varepsilon(t+s))\,du\,ds +$$
$$+ \widetilde{M}^t_{x,y}\int_0^\sigma(\varphi'(\widetilde{x}_\varepsilon(t), \widetilde{a}(t, \widetilde{x}_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t+s))\,ds + O(\sigma^2 + \tau\sigma^2). \qquad (54)$$

Будем предполагать, что выполнено условие V. Тогда, используя (26), будем иметь

$$\widetilde{M}^t_{x,y}\int_0^\sigma(\varphi'(\widetilde{x}_\varepsilon(t)), \widetilde{a}(t, \widetilde{x}_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t+s)))\,ds =$$
$$= \widetilde{M}^t_{x,y}\int_0^\sigma\left(\varphi'(x), \widetilde{a}\left(t, x, y^{u(t,x)}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\right)ds +$$
$$+ O\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\sigma s^2 ds\right) = \varepsilon\int_0^{\sigma/\varepsilon}\int(\varphi'(x), R^{u(t,x)}(s, y, dy')\widetilde{a}(t, x, y'))\,ds =$$
$$= O\left(\frac{1}{\varepsilon}\sigma^3 + \varepsilon\right) = O\left(\tau\sigma^2\cdot\frac{\sigma}{h} + \varepsilon\right) = o(h)$$

(последняя оценка может быть получена из леммы 1 и условия V). Точно так, как в предыдущем пункте, можем показать, что в выражении

$$\widetilde{M}^t_{x,y}\int_\sigma^\tau\int_0^\sigma l_t(\varphi, u, s, 0, \widetilde{x}_\varepsilon(t+s-\sigma), y_\varepsilon(t+s-u), y_\varepsilon(t+s))\,duds \qquad (55)$$

с ошибкой $O(\tau\sigma^2)$ можно заменить $y_\varepsilon(v)$ на $y^{x_\varepsilon(t+s-\sigma)}\left(\frac{t+s-\sigma+v}{\varepsilon}\right)$. Используя формулы (43) — (45), можно убедиться, что выражение (54) представимо в виде

$$\varepsilon\int_0^\tau\int\int l_t(\varphi, 0, s, 0, x_\varepsilon(t+s), y', y'')\,\rho^{x_\varepsilon(t+s)}(dy')\,R^{x_\varepsilon(t+s)}(y', dy'')\,ds+o(h).$$

Далее, представим первое слагаемое в правой части (54) в виде

$$\widetilde{M}^t_{x,y}\int_\sigma^\tau(\varphi'(x_\varepsilon(t+s-\sigma)), \widetilde{a}(t+s, u(-\sigma, \widetilde{x}_\varepsilon(t+s-\sigma)), y_\varepsilon(t+s))-$$

$$-\widetilde{a}\left(t+s, u\left(-\sigma, \widetilde{x}_\varepsilon(t+s-\sigma), y^{x_\varepsilon(t+s-\sigma)}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)\right)\right)ds+$$

$$+\widetilde{M}^t_{x,y}\int_\sigma^\tau(\varphi'(\widetilde{x}_\varepsilon(t+s-\sigma)), \int R^{u(t+s,\widetilde{x}_\varepsilon(t+s-\sigma))}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}, y_\varepsilon(t+s-\sigma), dy'\right)\times$$

$$\times\widetilde{a}(t+s, u(-\sigma, \widetilde{x}_\varepsilon(t+s-\sigma), y'))\,ds. \qquad (56)$$

Если выполнено условие VI, то последнее слагаемое есть

$$O\left(\tau\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^\beta\right)=O\left(h\,\frac{\varepsilon^{\beta-1}}{\sigma^\beta}\right)=o(h)$$

при $\sigma=o(\varepsilon^{1-\frac{1}{\beta}})$.

Применим к первому слагаемому в правой части (56) те же преобразования, которые применялись при анализе выражения $\mathcal{J}_1$ (см. (38) в п. 4). После этих преобразований указанное выражение примет вид

$$\varepsilon\widetilde{M}^t_{x,y}\int_\sigma^\tau\int\int\int\int(\varphi'(\widetilde{x}_\varepsilon(t+s-\sigma)), a(t+s, \widetilde{x}_\varepsilon(t+s-\sigma), y'))\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial x}\Pi^{x_\varepsilon(t+s-\sigma)}(y_1, dy''), a(t+s, \widetilde{x}_\varepsilon(t+s-\sigma), y_2)\right)\times$$

$$\times\rho^{x_\varepsilon(t+s-\sigma)}(dy_2)\,R^{x_\varepsilon(t+s-\sigma)}(y_2, dy_1)\,R^{x_\varepsilon(t+s-\sigma)}(y'', dy')+o(h).$$

Положим

$$\widetilde{L}_t\varphi(x)=(\varphi'(x), \widetilde{a}_1(t,x)+\widetilde{a}_2(t,x))+\frac{1}{2}\,\mathrm{sp}\,\widetilde{B}(t,x)\,\varphi''(x),$$

где

$$\widetilde{a}_1(t,x)=\int\int a'_x(t,x,y'')\,a(t,x,y')\,\rho^{u(t,x)}(dy')\,R^{u(t,x)}(y', dy''),$$

$$\widetilde{a}_2(t,x)=\int\int\int\int\widetilde{a}(t,x,y_2)\left(\frac{\partial}{\partial x}\Pi^{u(t,x)}(y'', dy_1), \widetilde{a}(t,x,y')\right)\times$$

$$\times\rho^{u(t,x)}(dy')\,R^{u(t,x)}(y', dy'')\,R^{u(t,x)}(y_1, dy_2),$$

$$(B(t,x)z_1, z_2)=\int\int(\widetilde{a}(t,x,y'), z_1)(\widetilde{a}(t,x,y''), z_2)\,\rho^{u(t,x)}(dy')\,R^{u(t,x)}(y', dy'').$$

Тогда

$$\Delta_{t,h}\varphi(x) = \varepsilon \widetilde{M}^{t}_{x,y} \int\limits_0^{\tau} \widetilde{L}_{t+s}\varphi(\widetilde{x}_\varepsilon(t+s))\,ds + o(h). \tag{57}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* V — VII, *а также следующие:*

IV′. *Функции $a(x, y)$, $\overline{a}(x)$ ограничены, дважды непрерывно дифференцируемы по x и их производные ограничены и удовлетворяют условиям Липшица по x, $u'_x(t, x)$, $u''_{xx}(t, x)$ также ограничены и удовлетворяют условию Липшица по x.*

VIII. *Равномерно по t и локально равномерно по x существуют средние*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}[a_1(s,x)+a_2(s,x)]\,ds = \overline{a}(x), \tag{58}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}B(s,x)\,ds = \overline{B}(x). \tag{59}$$

Тогда если $x_\varepsilon(0) = x_0$, процесс $\widetilde{x}_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ слабо сходится по распределениям к диффузионному процессу $\overline{x}(t)$ с начальным условием x_0 и диффузионными коэффициентами $\overline{a}(x)$ и $\overline{B}(x)$.

Доказательство. Из (57) и ограниченности $\widetilde{L}_t\varphi(x)$ вытекает, что процессы $\widetilde{x}_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ равномерно относительно ε стохастически непрерывны. Поэтому

$$\varepsilon\widetilde{M}^{t/\varepsilon}_{x,y}\int\limits_0^{\tau}\widetilde{L}_{t+s}\varphi\left(\widetilde{x}_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}+s\right)\right)ds = \widetilde{M}^{t/\varepsilon}_{x,y}\int\limits_0^{h}\widetilde{L}_{\frac{t+s}{\varepsilon}}\varphi\left(\widetilde{x}\left(\frac{t+s}{\varepsilon}\right)\right)ds =$$

$$= \widetilde{M}^{t/\varepsilon}_{x}\int\limits_0^{h}\widetilde{L}_{\frac{t+s}{\varepsilon}}\varphi(x)\,ds + o(h) = h\overline{L}\varphi(x) + o(h),$$

где $\overline{L}\varphi(x) = (\overline{a}(x), \varphi'(x)) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sp}\,\overline{B}(x)\,\varphi''(x)$.

Мы воспользовались тем, что в силу условия VIII

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_0^{h}\widetilde{L}_{\frac{t+s}{\varepsilon}}\varphi(x)\,ds = \overline{L}\varphi(x).$$

Теперь доказательство вытекает из предложения п. 1.

1. *Колмогоров А. Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи мат. наук.— 1938.— Вып. 5.— С. 5—41.
2. *Крилов М. М., Боголюбов М. М.* Наслідки дії статистичної зміни параметрів відносно ергодичних властивостей динамічних неконсервативних систем // Зап. каф. мат. фізики АН УРСР.— 1937.— 3.— С. 153—189.
3. *Крилов М. М., Боголюбов М. М.* Загальна теорія міри та її застосування до динамічних систем нелінійної механіки // Там же.— С. 55—112.
4. *Крилов М. М., Боголюбов М. М.* Про рівняння Фоккера — Планка, що виводиться в теорії пертурбацій методом, основаним на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана // Там же.— 1938.— 4.— С. 5—158.
5. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике.— М.: Гостехиздат, 1946.— 119 с.
6. *Гіхман Й. І.* Про вплив випадкового процесу на динамічну систему // Наук. зап. Київ. ун-ту.— 1941.— 5.— С. 119—132.
7. *Гіхман Й. І.* Про граничні переходи в динамічних системах // Там же.— С. 141—149.
8. *Гихман И. И.* О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями // Укр. мат. журн.— 1950.— 2, № 3.— С. 45—69.

9. *Гихман И. И.* К теории дифференциальных уравнений случайных процессов // Там же. — № 4.— С. 37—63; 1951.— 3, № 3.— С. 317—339.
10. *Гихман И. И.* Дифференциальные уравнения со случайными функциями // Зим. шк. по теории вероятностей и мат. статистике.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1964.— С. 41—85.
11. *Гихман И. И.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Предельные теоремы и статистические выводы.— Ташкент: Ин-т математики АН УзССР, 1966.— С. 14—45.
12. *Хасьминский Р. З.* О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром // Теория вероятностей и ее применения.— 1966.— 11, вып. 2.— С. 240—259.
13. *Хасьминский Р. З.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Там же.— Вып. 3.— С. 444—462.
14. *Хасьминский Р. З.* О принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений Ито // Кибернетика (Прага).— 1968.— 4, № 3.— С. 260—279.
15. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М. : Наука, 1969.— 367 с.
16. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под влиянием случайных возмущений.— М. : Наука, 1979.— 424 с.
17. *Сарафян В. В., Скороход А. В.* О динамических системах с быстрыми переключениями // Теория вероятностей и ее применения.— 1986.— 31, вып. 4.— С. 611—612.
18. *Скороход А. В.* Асимптотические методы стохастических дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1987.— 328 с.
19. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 611 с.

Получено 04.07.90