УДК 517.944:519.46

В. И. Фущич, А. Ф. Баранник

Максимальные подалгебры ранга n—1 алгебры $AP(1, n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. II

Описаны максимальные подалгебры L ранга n расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1, n)$, удовлетворяющие условию $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$, где $V = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n \rangle$ — пространство трансляций. Построены инварианты этих максимальных подалгебр, проведена редукция уравнений Даламбера и Лиувилля по каждой из них, и найдены широкие классы точных решений данных уравнений.

Описані максимальні підалгебри L рангу n розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1, n)$, які задовольняють умові $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$, де $V = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n \rangle$ — простір трансляцій. Побудовані інваріанти цих максимальних підалгебр, проведена редукція рівнянь Даламбера і Ліувілля за кожною з них, і знайдені широкі класи точних розв'язків даних рівнянь.

Настоящая статья является продолжением [1].

6. Максимальные подалгебры ранга n алгебры $A\tilde{P}(1, n)$. Опишем максимальные подалгебры ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, не содержащиеся в $AP(1, n)$ и удовлетворяющие условию $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$. Центральное место занимает следующее предложение.

Таблица 1

Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1, n)$	Нормализатор алгебры в $A\tilde{P}(1,n)$
$L_1 = AE(n-1)$	$L_1 \dotplus \langle J_{0n}, P_0, P_n, S \rangle$
$L_2 = AO(l) \oplus AE(n-l)$	$L_2 \dotplus \langle S \rangle$
$L_3 = AE'(l) \oplus AE(n-l-1)$	$L_3 \dotplus \langle J_{0n}, P_0 + P_n, S \rangle$
$L_4 = \langle J_{0n} \rangle \oplus AO(l) \oplus AE(n-l-1)$	$L_4 \dotplus \langle S \rangle$
$L_5 = A\tilde{E}'(l) \oplus AE(n-l-2)$	$L_5 \dotplus \langle S, P_{l+1} \rangle$
$L_6 = A\tilde{E}'(l_1) \dotplus AO(l_1, l_2) \dotplus AE(n-l-1)$	$L_6 \dotplus \langle S \rangle$
$L_7 = \langle G_1 + P_0 - P_n \rangle \oplus AE(n-2)$	$L_7 \dotplus \langle J_{0n} - 2S \rangle$
$L_8 = \Phi_1 \oplus \ldots \oplus \Phi_t \oplus AE(n-\sigma-r_t-1)$	$L_8 \dotplus \langle J_{0n} - S \rangle$
$L_9 = \langle J_{0n} + \alpha P_1 \rangle \oplus AE(n-2)$	L_9
$L_{10} = (A\tilde{E}'(l) \dotplus \langle J_{0n} + dP_{l+1} \rangle) \oplus AE(n-l-2)$	L_{10}
$L_{11} = \langle J_{12} + \alpha P_0 \rangle \oplus AE(n-2)$	L_{11}

Предложение 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга r, $2 \leqslant r \leqslant n$, алгебры $A\tilde{P}(1, n)$. Если $L \not\subset AP(1, n)$, то $L = K \dotplus \langle S' \rangle$, где K — максимальная подалгебра ранга $r-1$ алгебры $AP(1, n)$, а $S' = S + X$, $X \in AP(1, n)$.*

Предложение 3 легко доказывается на основании теоремы об универсальном инварианте. Из этого предложения вытекает, что описание максимальных подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{P}(1, n)$, не содержащихся в $AP(1, n)$, сводится к нахождению всех расширений максимальных подалгебр ранга $n-1$ алгебры $AP(1, n)$ с помощью одномерных подалгебр вида $\langle S + X \rangle$, $X \in AP(1, n)$. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Пусть K — произвольная максимальная подалгебра ранга $n-1$ алгебры $AP(1, n)$. Из табл. 1 вытекает, что ее нормализатор в алгебре $A\tilde{P}(1, n)$ представляется в виде $K \dotplus F$, где F — подалгебра. Следовательно, максимальная подалгебра L ранга n алгебры $A\tilde{P}(1, n)$, содержащая K, является полупрямой суммой $L = K \dotplus \langle S + X \rangle$, где $S + X \in F$. Пусть $L' = K \dotplus \langle S + X' \rangle$, $S + X' \in F$,— какая-нибудь другая максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde{P}(1, n)$. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение 4. *Две подалгебры $L = K \dotplus \langle S + X \rangle$ и $L' = K \dotplus \langle S + X' \rangle$ $\tilde{P}(1, n)$-сопряжены тогда и только тогда, когда $\langle S + X \rangle$ и $\langle S + X' \rangle$ сопряжены относительно группы внутренних автоморфизмов алгебры F.*

Из предложений 3 и 4 вытекает следующий алгоритм построения максимальных подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{P}(1, n)$, не содержащихся в $AP(1, n)$.

1) Проводим классификацию всех максимальных подалгебр ранга $n-1$ алгебры $AP(1, n)$ с точностью до $P(1, n)$-сопряженности.

2) Для максимальной подалгебры $K \subset AP(1, n)$ ранга $n-1$ находим ее нормализатор $\mathrm{Nor}_{\widetilde{AP}(1,n)} K$ в алгебре $\widetilde{AP}(1, n)$ (см. табл. 1). Пусть, например, $\mathrm{Nor}_{\widetilde{AP}(1,n)} K = K \dotplus F$.

3) Проводим классификацию с точностью до группы внутренних автоморфизмов всех одномерных подалгебр алгебры F с ненулевой проекцией на $\langle S \rangle$.

4) Если $\langle S + X_1 \rangle, \ldots, \langle S + X_t \rangle$ — все одномерные подалгебры алгебры F, то $K_1 = K \dotplus \langle S + X_1 \rangle, \ldots, K_t = K \dotplus \langle S + X_t \rangle$ — все максимальные подалгебры ранга n алгебры $\widetilde{AP}(1, n)$, являющиеся расширениями подалгебры K.

Используя указанный алгоритм и результаты, изложенные в п. 5, находим список максимальных подалгебр ранга n алгебры $\tilde{AP}$ (1, n), не содержащихся в AP (1, n) и удовлетворяющих условию $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$.

Теорема 4. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга n алгебры $\widetilde{AP}(1, n)$ с ненулевой проекцией на $\langle S \rangle$ и $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$. Тогда L $\widetilde{P}(1, n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр*:

$$1)\ L_{1,1} = L_1 \dotplus \langle S \rangle;\quad 2)\ L_{1,2} = L_1 \dotplus \langle J_{0n} + \alpha S \rangle\quad (\alpha \neq 0);$$

$$3)\ L_{1,3} = L_1 \dotplus \langle J_{0n} + S + P_0 + P_n \rangle;\quad 4)\ L_{2,1} = L_2 \dotplus \langle S \rangle;$$

$$5)\ L_{3,1} = L_3 \dotplus \langle S \rangle;\quad 6)\ L_{3,2} = L_3 \dotplus \langle J_{0n} + \alpha S \rangle\ (\alpha \neq 0);$$

$$7)\ L_{3,3} = L_3 \dotplus \langle J_{0n} + S + P_0 + P_n \rangle;\quad 8)\ L_{4,1} = L_4 \dotplus \langle S \rangle;$$

$$9)\ L_{5,1} = L_5 \dotplus \langle S \rangle;\quad 10)\ L_{6,1} = L_6 \dotplus \langle S \rangle;\quad 11)\ L_{7,1} = L_7 \dotplus \langle J_{0n} - 2S \rangle;$$

$$12)\ L_{8,1} = L_8 \dotplus \langle J_{0n} - S \rangle.$$

Введем далее в рассмотрение расширенную алгебру Евклида $A\widetilde{E}(n)$, обладающую базисом $J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b$, $P_a = \partial_a$, S_1, где $S_1 = -x^a \partial_a + 2\partial_u$ или $S_1 = -x^a \partial_a + \dfrac{2u}{k-1} \partial_u$; $a, b = 1, \ldots, n$. Генераторы поворотов J_{ab} порождают ортогональную алгебру $AO(n)$. Используя указанный выше алгоритм, приходим к следующим результатам.

Предложение 5. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $A\widetilde{E}(3)$. Тогда L $\widetilde{E}(3)$-сопряжена с одной из следующих алгебр*:

$$1)\ L_1 = \langle J_{12}, S_1 \rangle;\quad 2)\ L_2 = \langle P_3, S_1 \rangle;\quad 3)\ L_3 = \langle J_{12} + cS_1, P_3 \rangle\ (c > 0);$$

$$4)\ L_4 = \langle J_{12}, P_1, P_2 \rangle;\quad 5)\ L_5 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle;\quad 6)\ L_6 = \langle J_{12}, P_3 \rangle.$$

Предложение 6. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $A\widetilde{E}(4)$ и $L \cap \langle P_1, \ldots, P_n \rangle = 0$. Тогда L $\widetilde{E}(4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр*:

$$1)\ L_1 = \langle J_{12}, J_{34}, S_1 \rangle;\quad 2)\ L_2 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, S_1 \rangle;\quad 3)\ L_3 = AO(4).$$

7. Редукция и точные решения уравнения Лиувилля. В настоящем пункте подалгебры алгебр $A\tilde{P}$ (1, n) и $A\tilde{E}$ (n) используются для поиска инвариантных решений уравнения (1) при $F(u) = \lambda \exp u$. Пусть L — произвольная подалгебра алгебры $A\tilde{P}$ (1, n) и подпространство $L \cap V$ изотропно. В силу теоремы Витта можно предполагать, что $P_0 + P_1 \in L \cap V$. Тогда любое решение уравнения (1), инвариантное относительно L, имеет вид $u = u(x_0 - x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$, и потому

$$u_{11} + \ldots + u_{n-1,n-1} - \lambda \exp u = 0. \tag{7}$$

Таким образом, указанный случай сводится к рассмотрению уравнения (7) в евклидовом пространстве R_{n-1}. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (7) является расширенная алгебра Евклида $A\tilde{E}(n-1)$, обладающая базисом $J_{ab}=x_b\partial_a-x_b\partial_a$, $P_a=\partial_a$, $S_1=-x^a\partial_a+2\partial_u$; $a, b=1, \ldots, n-1$. Следовательно, подалгебры алгебры $A\tilde{E}(n-1)$ можно использовать для поиска инвариантных решений уравнения (7), а значит, и уравнения (1). Для иллюстрации остановимся подробно на случае $n=4$. Запишем полные системы инвариантов подалгебр, представленных в предложении 5; запись L: $f_1, \ldots, f_s$ будет означать, что функции $f_1, \ldots, f_s$ образуют полную систему инвариантов алгебры L:

$$L_1: \omega'=u+2\ln x_3, \quad \omega=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2};$$

$$L_2: \omega'=u+\ln(x_1^2+x_2^2), \quad \omega=\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1};$$

$$L_3: \omega'=u+\ln(x_1^2+x_2^2), \quad \omega=\ln(x_1^2+x_2^2)+c\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1};$$

$$L_4: \omega'=u, \quad \omega=x_3; \quad L_5: \omega'=u, \quad \omega=x_1^2+x_2^2+x_3^2; \quad L_6: \omega'=u,$$
$$\omega=x_1^2+x_2^2.$$

Анзац $\omega'=\varphi(\omega)$ редуцирует уравнение (7) к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\omega(\varphi)$:

$$L_1: 4(\omega+\omega^2)\ddot{\varphi}+(6\omega+4)\dot{\varphi}-2-\lambda\exp\varphi=0;$$

$$L_2, L_4: \ddot{\varphi}-\lambda\exp\varphi=0; \quad L_3: (4+c^2)\ddot{\varphi}-\lambda\exp\varphi=0;$$

$$L_5: 4\omega\ddot{\varphi}+6\dot{\varphi}-\lambda\exp\varphi=0; \quad L_6: 4\omega\ddot{\varphi}+4\dot{\varphi}-\lambda\exp\varphi=0.$$

Каждому решению редуцированного уравнения соответствует решение уравнения (7), а значит, и уравнения (1). Рассмотрим, например, уравнение $\ddot{\varphi}-\lambda_1\exp\varphi=0$, $\lambda_1=\lambda/(4+c^2)$. Оно имеет следующие решения [2]:

$$\varphi=\ln\left\{\frac{C_1}{2\lambda_1}\sec^2\left[\frac{\sqrt{C_1}}{2}(\omega+C_2)\right]\right\}, \quad C_1>0, \quad \lambda_1>0, \quad C_2\in R,$$

$$\varphi=\ln\left\{\frac{2C_1C_2\exp(\sqrt{C_1}\omega)}{\lambda_1[1-C_2\exp(\sqrt{C_1}\omega)]^2}\right\}, \quad C_1>0, \quad \lambda_1C_2>0,$$

$$\varphi=-\ln\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}\,\omega+C\right)^2.$$

Следовательно, получаем такие решения уравнения (1):

$$u=\ln\left\{\frac{\theta_1}{2\lambda_1\omega_1}\sec^2\left[\frac{\sqrt{\theta_1}}{2}(\omega+\theta_2)\right]\right\},$$

$$u=\ln\left\{\frac{2\theta_1\theta_3\exp\sqrt{\theta_1}\omega}{\lambda_1\omega_1[1-\theta_3\exp\sqrt{\theta_1}\omega]^2}\right\},$$

$$u=-\ln\left\{\omega_1\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}\,\omega+\theta_2\right)^2\right\},$$

где $\omega_1=x_1^2+x_2^2$, $\theta_1-\theta_1(x_0-x_4)$ и $\lambda_1\theta_3=\lambda_1\theta_3(x_0-x_4)$ — положительно определенные дифференцируемые функции от переменной x_0-x_4, $\theta_2=\theta_2(x_0-x_4)$ — произвольная дифференцируемая функция от переменной x_0-x_4.

Пусть далее L — произвольная подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1, n)$ и подпространство $L \cap V$ не вырождено. С учетом рассмотренного случая можно предполагать, что $L \cap V = \langle P_0 \rangle$ или $L \cap V \cap \langle P_1, \ldots, P \rangle$. Если $L \cap V = \langle P_0 \rangle$, то любое решение $u = u(x)$ уравнения (1), инвариантное относительно L, не зависит от x_0, и потому

$$u_{11} + \ldots + u_{nn} - \lambda \exp u = 0. \tag{8}$$

Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (8) является расширенная алгебра Евклида $A\tilde{E}(n)$. Поэтому подалгебры L алгебры $A\tilde{E}(n)$, удовлетворяющие условию $L \cap \langle P_1, \ldots, P_n \rangle = 0$, можно использовать для поиска решений уравнения (8), а значит, и уравнения (1). Рассмотрим случай $n = 4$. Запишем полные системы инвариантов подалгебр, представленных в предложении 6:

$$L_1 : \omega' = u + \ln(x_1^2 + x_2^2), \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2 + x_4^2},$$

$$L_2 : \omega' = u + \ln(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_4^2},$$

$$L_3 : \omega' = u, \quad \omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 .$$

Применяя анзац $\omega' = \varphi(\omega)$, редуцируем уравнение (8) к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$:

$$L_1 : 4\omega^2 (1 + \omega) \ddot{\varphi} + 4\omega (1 + \omega) \dot{\varphi} - \lambda \exp \varphi = 0;$$

$$L_2 : 4\omega^2 (1 + \omega) \ddot{\varphi} + 6\omega (1 + \omega) \dot{\varphi} - 2 - \lambda \exp \varphi = 0;$$

$$L_3 : 4\omega\ddot{\varphi} + 8\dot{\varphi} - \lambda \exp \varphi = 0.$$

Каждому решению редуцированного уравнения соответствует решение уравнения (8), а значит, и уравнения (1).

Рассмотрим случай, когда $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$. Будем предполагать, что L не содержится в $AP(1, n)$ и ее ранг равен n. Запишем полные системы инвариантов подалгебр, представленных в теореме 4:

$$L_{1,1} : \omega' = u + 2\ln(x_0 + x_n), \quad \omega = x_0/x_n,$$

$$L_{1,2} : \omega' = u - \frac{2\alpha}{1-\alpha} \ln(x_0 + x_n), \ \omega = (1 + \alpha)\ln(x_0 + x_n) + $$

$$+ (1 - \alpha)\ln(x_0 - x_n),$$

$$L_{1,3} : \omega' = u + \ln(x_0 - x_n), \quad x_0 + x_n + \ln(x_0 - x_n) = \omega,$$

$$L_{2,1} : \omega' = u + 2\ln x_0, \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_l^2}{x_0^2},$$

$$L_{3,1} : \omega' = u + 2\ln(x_0 - x_n), \ \omega = \frac{(x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2 - x_n^2)^{1/2}}{x_0 - x_n},$$

$$L_{3,2} : \omega' = u + \ln(x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2 - x_n^2),$$

$$\omega = \delta \ln(x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2 - x_n^2) - \ln(x_0 - x_n),$$

$$L_{3,3} : \omega' = u + \ln(x_0 - x_n), \quad \omega = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2 - x_n^2}{x_0 - x_n} + \ln(x_0 - x_n),$$

$$L_{4,1} : \omega' = u + \ln(x_1^2 + \ldots + x_l^2), \quad \omega = \frac{x_1^2 + \ldots + x_l^2}{x_0^2 - x_n^2},$$

$$L_{5,1}: \omega' = u + 2\ln x_{l+1}, \quad \omega = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2 - x_n^2}{x_{l+1}^2},$$

$$L_{6,1}: \omega' = u + \ln(x_{l_1+1}^2 + \ldots + x_{l_1+l_2}^2), \quad \omega = \frac{x_{l_1+1}^2 + \ldots + x_{l_1+l_2}^2}{x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_{l_1}^2 - x_n^2},$$

$$L_{7,1}: \omega' = u + 2\ln[(x_0 - x_n)^2 - 4x_1],$$

$$\omega = \frac{[(x_0 - x_n)^2 - 4x_1]^3}{[6(x_0 + x_n) - 6x_3(x_0 - x_n) + (x_0 - x_n)^3]^2},$$

$$L_{8,1}\ \omega = x_0 - x_n,\ \omega' = u + \ln\Big[-x_0^2 + \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \lambda_1}(x_1^2 + \ldots + x_{r_1}^2) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \lambda_t}(x_{\sigma+1}^2 + \ldots + x_{\sigma+r_t}^2) + x_n^2\Big].$$

Анзац $\omega' = \varphi(\omega)$ редуцирует уравнение Лиувилля к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$:

$$L_{1,1}: (1+\omega)^2(1-\omega^2)\ddot{\varphi} - 2\omega(1+\omega)^2\dot{\varphi} + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{1,2}: 4(1-\alpha^2)\exp(-\omega)\ddot{\varphi} + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{1,3}: 4\ddot{\varphi} + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{2,1}: 4\omega(\omega-1)\ddot{\varphi} + (6\omega - 2l)\dot{\varphi} + 2 + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{3,1}\ 4\omega^3\ddot{\varphi} + 2\omega^2(2+l)\dot{\varphi} - \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{3,2}: 4\delta(\delta-1)\ddot{\varphi} + 2\delta l\dot{\varphi} - 2l + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{3,3}: 4\ddot{\varphi} + 2l\dot{\varphi} + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{4,1}: 4\omega^2(\omega-1)\ddot{\varphi} + (4\omega^2 - 2l\omega)\dot{\varphi} - 2l - 4 + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{5,1}: 4\omega(1-\omega)\ddot{\varphi} + (4 + 2l - 6\omega)\dot{\varphi} - 2 + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{6,1}: 4\omega(1-\omega)\ddot{\varphi} + (4 + 2l_1 + 2l_2\omega - 8\omega)\dot{\varphi} + 2l_2 - 4 + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{7,1}: 144\omega^2(\omega-1)\ddot{\varphi} + 24\,\omega(9\omega-4)\dot{\varphi} - 32 + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{8,1}: \left(1 + \frac{\omega}{\omega+\lambda_1} + \ldots + \frac{\omega}{\omega+\lambda_t}\right) - \lambda\exp\varphi = 0.$$

Используя редуцированные уравнения, соответствующие подалгебрам $L_{4,1}$ и $L_{3,2}$, получаем такие решения уравнения Лиувилля:

$$L_{4,1}: u = \ln\frac{4-2l}{\lambda(x_1^2 + \ldots + x_l^2)},$$

$$L_{3,2}(\delta = 0): u = \ln\frac{2l}{\lambda(x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2 - x_n^2)},$$

$$L_{3,2}(\delta = 1): u = -\ln\left\{\left(-\frac{\lambda}{2Cl}\right)[x_0 - x_n - C(x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2 - x_n^2)]\right\}.$$

8. Редукция и точные решения уравнения Даламбера. В настоящем пункте подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1, n)$ использу-

ются для поиска инвариантных решений нелинейного уравнения (1) при $F(u) = \lambda u^k$. Следуя п. 7, мы должны рассмотреть три случая в зависимости от структуры пространства $L \cap V$, где L — подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1, n)$. Рассмотрим один из этих случаев, а именно: будем предполагать, что $L \not\subset AP(1, n)$, $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$ и ранг L равен n. Запишем полные системы инвариантов подалгебр, представленных в теореме 4, за исключением подалгебр $L_{1,i}$, $i = 1, 2, 3$; $L_{7,1}$ и $L_{8,1}$:

$$L_{2,1}: \omega' = \frac{u}{x_0^{2/(1-k)}}, \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_l^2}{x_0^2},$$

$$L_{3,1}: \omega' = \frac{u}{(x_0 - x_n)^{2/(1-k)}}, \quad \omega = \frac{(x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_l^2 - x_n^2)^{1/2}}{x_0 - x_n},$$

$$L_{3,2}: \omega' = \frac{u}{(x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_l^2 - x_n^2)^{1/(1-k)}}, \quad \omega = \delta \ln (x_0^2 - x_1^2 - \dots$$

$$\dots - x_l^2 - x_n^2) - \ln (x_0 - x_n),$$

$$L_{3,3}: \omega' = \frac{u}{(x_0 - x_n)^{1/(1-k)}}, \quad \omega = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_l^2 - x_n^2}{x_0 - x_n} + \ln (x_0 - x_n),$$

$$L_{4,1}: \omega' = \frac{u}{(x_1^2 + \dots + x_l^2)^{1/(1-k)}}, \quad \omega = \frac{x_1^2 + \dots + x_l^2}{x_0^2 - x_n^2},$$

$$L_{5,1}: \omega' = \frac{u}{x_{l+1}^{2/(1-k)}}, \quad \omega = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_l^2 - x_n^2}{x_{l+1}^2},$$

$$L_{6,1}: \omega' = \frac{u}{(x_{l_1+1}^2 + \dots + x_{l_1+l_2}^2)^{1/(1-k)}}, \quad \omega = \frac{x_{l_1+1}^2 + \dots + x_{l_1+l_2}^2}{x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_{l_1}^2 - x_n^2}.$$

Применяя анзац $\omega' = \varphi(\omega)$, редуцируем уравнение Даламбера к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$:

$$L_{2,1}: 4(\omega^2 - \omega)\ddot{\varphi} + \left(-\frac{8}{1-k} + 6\omega - 4l\right)\dot{\varphi} + \frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k = 0,$$

$$L_{3,1}: -\ddot{\varphi} + \frac{4 + l(1-k)}{1-k}\frac{1}{\omega}\dot{\varphi} + \lambda\varphi^k = 0,$$

$$L_{3,2}: 4\delta(\delta - 1)\ddot{\varphi} + \left(\frac{8\delta - 4}{1-k} + 2\delta l\right)\dot{\varphi} + \left[\frac{4k}{(1-k)^2} + \frac{2(l+2)}{1-k}\right]\varphi + \lambda\varphi^k = 0,$$

$$L_{3,3}: 4\ddot{\varphi} + \frac{4 + 2l - 2lk}{1-k}\dot{\varphi} + \lambda\varphi^k = 0,$$

$$L_{4,1}: 4\omega^2(1 - \omega)\ddot{\varphi} + \left(-\frac{8}{1-k} + 4\omega^2 - 2\omega l\right)\dot{\varphi} -$$

$$-\frac{2l(1-k) + 4k}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k = 0,$$

$$L_{5,1}: 4(\omega - \omega^2)\ddot{\varphi} + \left(\frac{8}{1-k} + 2l + 4 - 6\omega\right)\dot{\varphi} - \frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k = 0.$$

$$L_{6,1}: 4(\omega - \omega^2)\ddot{\varphi} + \left(\frac{8}{1-k}2l_1 + 4 - 8\omega + 2\omega l_2\right)\dot{\varphi} -$$

$$-\frac{2l_2(1-k) + 4k}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k = 0.$$

Запишем некоторые точные решения уравнения Даламбера

$$L_{3,1}: u^{-4/l} = \sigma(l)[(x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2 - x_n^2)^{1/2} + C(x_0 - x_n)]^2,$$

$$\sigma(l) = \frac{4\lambda}{l(l-2)}, \quad k = \frac{4+l}{l}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n-1,$$

$$L_{3,2}(\delta = 0): u^{1-k} =$$

$$= \frac{\lambda(1-k)^2(x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2 - x_n^2)}{2C\sigma(k, l)} \frac{1 - C(x_0 - x_n)^{\sigma(k,l)/2}}{(x_0 - x_n)^{\sigma(k,l)/2}},$$

$$\sigma(k, l) = l + 2 - kl, \quad 1 \leqslant l \leqslant n-1,$$

$$L_{3,2}(\delta = 1): u^{1-k} = \sigma(k, l)[x_0 - x_n - C(x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2 - x_n^2)],$$

$$\sigma(k, l) = \frac{\lambda(1-k)^2}{2C(l - lk + 2)}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n-1,$$

$$L_{3,2}: u^{1-k} = \sigma(k, l)(x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2 - x_n^2),$$

$$\sigma(k, l) = -\frac{\lambda(1-k)^2}{2(l - lk + 2)}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n-1,$$

$$L_{3,2}: u^{1-k} = \sigma_1(k, l)\frac{[(x_0 - x_n)^{\sigma_2(k,l)} - C(x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2 - x_n^2)]^2}{(x_0 - x_n)^{\sigma_2(k,l)}},$$

$$\sigma_1(k, l) = \frac{\lambda(1-k)^2}{4C(1+k)(2+l-kl)}, \quad \sigma_2(k, l) = \frac{4+l-kl}{2},$$

$$L_{3,3}: u^{2/l} = \sigma(l)\frac{x_0 - x_n}{[(x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2 - x_n^2) + (x_0 - x_n)\{\ln(x_0 - x_n) + C\}]^2},$$

$$k = \frac{2+l}{l}, \quad \sigma(l) = -\frac{4l(l+1)}{\lambda}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n-1,$$

$$L_{4,1}: u^{1-k} = \sigma(k, l)(x_1^2 + \ldots + x_l^2),$$

$$\sigma(k, l) = \frac{\lambda(1-k)^2}{2(l - lk + 2k)}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n-1.$$

1. *Фущич В. И., Баранник А. Ф.* Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1, n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I//Укр. мат. журн.—1990.—**42**, № 11.— С. 1552—1559.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М. : Наука, 1971.— 576 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 03.03.90