УДК 517.43

М. Н. Феллер

Запас гармонических функций бесконечного числа переменных. II

Необычайно много гармонических функций бесконечного числа переменных. С использованием для оценки бесконечномерного лапласиана, введенного П. Леви, оценок роста сумм ортогональных случайных величин получены оптимальные (в некотором смысле) условия гармоничности функций на гильбертовом пространстве. Вместе с полученными ранее условиями гармоничности, основанными на оценках роста сумм зависимых случайных величин, они позволяют охватить многообразие гармонических функций бесконечного числа переменных.

Незвичайно багато гармонічних функцій нескінченного числа змінних. З використанням для оцінки нескінченновимірного лапласіана, впровадженого П. Леві, оцінок зростання сум ортогональних випадкових величин одержані оптимальні (в деякому розумінні) умови гармонічності функцій на гільбертовому просторі. Разом з одержаними раніше умовами гармонічності, основаними на оцінках зростання сум залежних випадкових величин, вони дозволяють охопити різноманіття гармонічних функцій нескінченного числа змінних.

Запас гармонических функций на гильбертовом пространстве H, связанных с бесконечномерным лапласианом, введенным П. Леви в [1], необычайно велик. В [2] показано, что существование лапласиана Леви тесно связано с условиями, вытекающими из усиленного закона больших чисел. В [3] с использованием оценок роста сумм зависимых случайных величин (в терминах абсолютных первых моментов) получены условия гармоничности функций на гильбертовом пространстве.

В настоящей статье получены оптимальные (в некотором смысле) условия гармоничности функций на гильбертовом пространстве с использованием для оценки лапласиана Леви оценок роста сумм ортогональных случайных величин [4] (в терминах моментов второго порядка). Оба условия гармоничности дополняют друг друга, впрочем, и пересечение их не пусто.

Приведем несколько примеров гармонических функций $F(x)$ на l_2. При $H = l_2$ условие гармоничности из [3] — это

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{l_2} \left| \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_k^2} \right| \mu(dx) = O\left(\frac{n}{\psi_\varepsilon(n)}\right),$$

$$\psi_\varepsilon(n) = \ln n \ldots \underbrace{\ln \ldots \ln}_{m-1} n \, (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{m} n)^{1+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$

а условие гармоничности теоремы в данной статье —

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}} \int_{l_2} \left[\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_k^2}\right]^2 \mu(dx) = O\left(\frac{n^2}{\psi_\varepsilon(n) \ln^2 n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{l_2} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_k^2} \mu(dx) = 0,$$

Γ_n — определитель Грамма функций

$$\left\{ \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_k^2} \Big/ \left(\int_H \left[\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_k^2}\right]^2 \mu(dx) \right)^{1/2} \right\}_1^n.$$

А) Примеры функций, для которых условие гармоничности из [3] не выполняется, но гармоничность которых μ-почти всюду вытекает из приведенной ниже теоремы: $F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_k^2 x_k^4}{12}-\frac{x_k^2}{2}\right)$, $K^{-1/2}e_k=\lambda_k e_k$, K — корреляционный оператор гауссовой меры μ в l_2, $e_k=(0,\dots,1,0,\dots)$, $k=1,2,\dots$; $F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{2p-1}x_k^{2p+1}$, $p\geqslant 1$ — целое.

Б) Противоположный пример, когда гармоничность функции μ-почти всюду следует из [3], но для которой условие гармоничности приведенной ниже теоремы не выполняется:

$$F(x)=\sum_{k=2}^{\infty}\int_{-k\ln^{\varepsilon}k}^{x_k}\int_{-k\ln^{\varepsilon}k}^{y_k}\varphi_k(\lambda_k z_k)\,dz_k dy_k,\quad \varphi_k(\zeta)=\frac{(2\pi)^{1/4}}{f(k)}e^{\zeta^2/4}$$

для $\zeta\in(0,k\ln^{\varepsilon}k)$, $\varphi_k(\zeta)=-\frac{(2\pi)^{1/4}}{f(k)}e^{\zeta^2/4}$ для $\zeta\in(-k\ln^{\varepsilon}k,0)$, $\varphi_k(\zeta)=0$ вне этих интервалов, а $f(k)=\ln^{1+\varepsilon}k$.

В) Если в предыдущем примере положить $f(k)=\ln^{3/2+\varepsilon}k$, то оба условия гармоничности выполняются, а если положить $f(k)=\ln k$, то оба условия не выполняются.

1. Пусть H — счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции $F(x)$ на H, $x\in H$.

Бесконечномерный лапласиан П. Леви ввел формулой

$$\Delta F(x)=2\lim_{\rho\to 0}\frac{\mathfrak{M}F(x+\rho h)-F(x)}{\rho^2},$$

где $\mathfrak{M}\Phi$ — среднее значение функции $\Phi(h)$ по сфере $\|h\|_H^2=1$.

Удобно и такое представление лапласиана Леви (см., например, [5]). Пусть функция $F(x)$ дважды дифференцируема по подпространству Y пространства H (т. е. вторая производная функции $F(x)$ в точке x_0 по подпространству Y — оператор $F''(x_0)\in\{Y\to Y'\}$, Y' — сопряженное к Y пространство). Тогда лапласиан Леви определяется, если он существует, формулой

$$\Delta F(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(F''(x)f_k,f_k)_H, \tag{1}$$

где $\{f_k\}_1^{\infty}$ — выбранный ортонормированный базис в H, $f_k\in Y$.

2. Пусть $\mathfrak{L}_2(H,\mu)$ — гильбертово пространство функций $F(x)$ на H, интегрируемых с квадратом по гауссовой мере μ с корреляционным оператором K и нулевым средним, K — ядерный положительный оператор такой, что $\|x\|_H\leqslant\|K^{-1/2}x\|_H$, $x\in D_{K^{-1/2}}$, $\|F\|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}=\int_H F(x)^2\mu(dx)$, $D_{K^{-1/2}}$ — область определения оператора $K^{-1/2}$.

Пусть $H_\alpha\subset H_0\subset H_{-\alpha}$, $H_0\equiv H$, $\alpha>0$, — цепочка пространств из гильбертовой шкалы пространств $\{H_\beta\}$, $-\infty<\beta<\infty$, с порождающим оператором $K^{-1/2}$, $K^{1/2}$ — оператор Гильберта — Шмидта.

Теорема. *Пусть функция $F(x)$ дважды дифференцируема по подпространству Y, $H_\alpha\subseteq Y\subseteq H$ и $\xi_k(x)=(F''(x)f_k,f_k)_H\in\mathfrak{L}_2(H,\mu)$, $k=1,2,\dots$. Если*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}\|\eta_k(x)\|^2_{\mathfrak{L}_2(N,\mu)}=O\left(\frac{n^2}{\psi_\varepsilon(n)\ln^2 n}\right), \tag{2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{M}\xi_k = 0$, *а* $\frac{\Gamma_n}{\Gamma_{n-1}} = 1 - O\left(\frac{\ln^2 n}{n\psi_\varepsilon(n)}\right)$, *где* $\eta_k(x) = \xi_k(x) - \mathrm{M}\xi_k$, $\mathrm{M}\xi_k = \int\limits_H \xi_k(x)\,\mu(dx)$, Γ_n — *определитель Грамма функций* $\hat{\eta}_k(x) = \eta_k(x)/\|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}$, $k = 1, \ldots, n$, $\psi_\varepsilon(n)$ — *одна из функций* $(\ln n)^{1+\varepsilon}$, $\ln n(\ln\ln n)^{1+\varepsilon}, \ldots, \ln n \ldots \underbrace{\ln \ldots \ln n}_{m-1} (\underbrace{\ln \ldots \ln n}_{m})^{1+\varepsilon}$ $\forall\varepsilon > 0$, $\{f_k\}_1^\infty$ — *некоторый ортонормированный базис в* H, $f_k \in Y$, *то*

$$\Delta F(x) = 0 \text{ почти для всех } x \in H. \tag{3}$$

С другой стороны, существует функция $F(x)$, *для которой при* $\varepsilon = 0$ *оценка* (2) *выполняется, но* (3) *не имеет места.*

Оценка (2) *(а значит, и гармоничность функции* $F(x)$*) не зависит от выбора базиса, если* $\mathrm{M}\,|(F''(x)y, z)_N| \leqslant C\|y\|_H\|z\|_H$, $y, z \in Y$, *из класса квадратично близких базисов. Гармоничность функции* $F(x)$ *не зависит от выбора меры из класса гауссовских эквивалентных мер.*

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что функции $\xi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, линейно независимы; в противном случае можно заменить $F(x)$ функцией $\tilde{F}(x) = F(x) + S(x)$, где $S(x)$ — гармоническая функция такая, что $(\tilde{F}''(x)f_k, f_k)_H$, $k = 1, 2, \ldots$, линейно независимы.

Лапласиан Леви (1) функции $F(x)$ — предел последовательности средних арифметических $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k(x)$, где $\xi_k(x) = (F''(x)f_k, f_k)_H$. Всякая функция $\Phi(x)$ на H, измеримая относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$, — это случайная величина на вероятностном пространстве $\{H, \mathfrak{A}, \mu\}$. При этом ее математическое ожидание $\mathrm{M}\Phi = \int\limits_H \Phi(x)\,\mu(dx)$, дисперсия $\mathbf{D}\Phi = \|\Phi - \mathrm{M}\Phi\|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}$, а сходимости последовательности случайных величин с вероятностью единица соответствует сходимость последовательности измеримых функций почти всюду на H относительно меры μ.

Таким образом, $\{\xi_k(x)\}_1^\infty$ — последовательность зависимых случайных величин, $\{\eta_k(x)\}_1^\infty$ — эта же последовательность, центрированная своими математическими ожиданиями ($\mathrm{M}\eta_k = 0$), а матрица Грамма $\|(\hat{\eta}_i, \hat{\eta}_j)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\|_{i,j=1}^n$ функций $\hat{\eta}_1(x), \ldots, \hat{\eta}_n(x)$ — матрица коэффициентов корреляции случайных величин $\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x)$.

Ортогонализируем нормированную последовательность $\{\hat{\eta}_k(x)\}_1^\infty$ обычным процессом треугольной ортогонализации

$$Y_1(x) = \hat{\eta}_1(x), \quad Y_k(x) = \begin{vmatrix} (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_1)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \ldots (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_{k-1})_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \hat{\eta}_1(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\hat{\eta}_k, \hat{\eta}_1)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \ldots (\hat{\eta}_k, \hat{\eta}_{k-1})_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \hat{\eta}_k(x) \end{vmatrix}$$

$$k = 2, 3, \ldots.$$

Отсюда, разлагая определитель по элементам k-го столбца $\frac{Y_k(x)}{\Gamma_{k-1}} = \hat{\eta}_k(x) + V_k(x)$, где $V_k(x) = \frac{1}{\Gamma_{k-1}(x)}[\eta_{k-1}(x) D_{k-1,k} + \ldots + \hat{\eta}_1(x) D_{1,k}]$,

D_{jk} — алгебраическое дополнение $\hat{\eta}_j(x)$, $j = 1, \ldots, k-1$, и складывая, получаем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}}{\Gamma_{k-1}}Y_k(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}V_k(x). \quad (4)$$

Последовательность $Z_k(x) = \dfrac{\|\eta_k(x)\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}}{\Gamma_{k-1}}Y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность ортогональных случайных величин, $\mathbf{M}Z_k = 0$, $\mathbf{M}Z_iZ_j = 0$, $i \neq j$, $\mathbf{D}Z_k = \dfrac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}\|\eta_k\|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}$. Согласно теореме Петрова [4] если $\{\zeta_k\}_1^\infty$ — последовательность ортогональных случайных величин, $B_n = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}\zeta_k \to \infty$, то $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\zeta_k = o(\sqrt{B_nf(B_n)}\ln n)$ почти наверное, где $f(\tau)$ — положительная функция на $[\tau_0, \infty)$ такая, что $\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{kf(k)} < \infty$ (например, $f(n) = \psi_\varepsilon(n)$, $\varepsilon > 0$). Из этой теоремы следует, что если $\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}\zeta_k = O\left(\frac{n^2}{f(n)\ln^2 n}\right)$, то $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\zeta_k \to 0$ почти наверное. Но по условию (2) теоремы $\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}Z_k = O\left(\frac{n^2}{\psi_\varepsilon(n)\ln^2 n}\right)$, поэтому $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Z_k \to 0$ почти наверное.

Так как $V_n(x) = Y_n(x)/\Gamma_{n-1} - \hat{\eta}_n(x)$, а $(Y_n, Y_n)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = \Gamma_{n-1} \times \Gamma_n$ $(Y_n, \hat{\eta}_n)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = \Gamma_n$, то $(Y_n/\Gamma_{n-1} - \hat{\eta}_n, Y_n/\Gamma_{n-1} - \hat{\eta}_n)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = 1 - \Gamma_n/\Gamma_{n-1}$, и согласно условию теоремы

$$\|V_n\|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = O\left(\frac{\ln^2 n}{n\psi_\varepsilon(n)}\right). \quad (5)$$

Согласно (5) и условию (2)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\int_H|V_k(x)|\mu(dx) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\|V_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} < \infty$$

и

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}V_k(x) \to 0$$

почти наверное.

Из (4) следует, что $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k(x) \to 0$ почти наверное. Но по условию теоремы $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\xi_k \to 0$, поэтому $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(x) \to 0$ почти наверное, т. е.

$$\Delta F(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(F''(x)f_k, f_k)_H = 0$$

почти для всех $x \in H$.

Покажем теперь, что существует функция, для которой при $\varepsilon = 0$ выполняется оценка теоремы, но гармоничность не имеет места.

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \frac{1}{6} \sum_{k=k_0}^{\infty} \sqrt{\frac{k}{\psi_0(k) \ln^2 k}} \prod_{j=1}^{k-1} \lambda_j x_j \lambda_k x_k^3$$

на l_2, где $x_k = (x, e_k)_{l_2}$, $\{e_k\}_1^\infty$ — канонический базис в l_2 (ортобазис из собственных векторов оператора $K^{-1/2}$, нормированных в l_2, $K^{-1/2} e_k = \lambda_k e_k$, λ_k — собственные значения оператора $K^{-1/2}$, $k = 1, 2, \ldots$, номер k_0 выбираем таким, что $\underbrace{\ln \ldots \ln}_{m} k_0 > 0$.

Лапласиан Леви этой функции

$$\Delta F(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=k_0}^{n} \sqrt{\frac{k}{\psi_0(k) \ln^2 k}} \prod_{j=1}^{k} \lambda_j x_j.$$

Случайные величины $\eta_j(x) = \sqrt{\frac{k}{\psi_0(k) \ln^2 k}} \prod_{j=1}^{k} \lambda_j x_j$ ортогональны, $\mathbf{M}\eta_k = 0$, $\mathbf{D}\eta_k = \frac{k}{\psi_0(k) \ln^2 k}$, $\Gamma_k = 1$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}} \mathbf{D}\eta_k = O\left(\frac{n^2}{\psi_0(n) \ln^2 n}\right)$$

и условие (2) выполнено при $\varepsilon = 0$.

В то же время соотношение $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k(x) \to 0$ почти для всех $x \in l_2$ не имеет места, поскольку

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_k(x)}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^{k} \eta_j(x)$$

(преобразование Абеля), ряд $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\eta_k(x)}{k}$ расходится, а ряд $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \times \sum_{j=1}^{k} \eta_j(x)$ сходится почти всюду на l_2. Действительно, $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\eta_k(x)}{k} = \sum_{k=k_0}^{\infty} c_k \hat{\eta}_k(x)$, где $c_k = \frac{1}{\sqrt{k\psi_0(k)} \ln k}$ — положительная монотонно убывающая числовая последовательность, $\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k^2 \ln^2 k = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k\psi_0(k)} = \infty$, и по теореме 2.4.3 из [6] этот ряд расходится. В силу ортогональности $\eta_k(x)$ и условия (2) при $\varepsilon = 0$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \int_{l_2} \left| \sum_{j=1}^{k} \eta_j(x) \right| \mu(dx) \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \left(\sum_{j=1}^{k} \mathbf{D}\eta_i \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant A \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\sqrt{\psi_0(k)} \ln k} < \infty$$

и ряд $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^{k} \eta_j(x)$ сходится почти для всех $x \in l_2$.

Докажем последние утверждения теоремы.

Пусть $\{g_k\}_1^\infty$ — ортонормированный базис в H, $g_k \in Y$, отличный от $\{f_k\}_1^\infty$. Не умаляя общности, будем считать, что $\frac{(F''(x)g_n, g_n)_H}{n} \to 0$ (необходимое условие того, что $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(F''(x)g_k, g_k)_H \to 0$). Тогда

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\int_H (F''(x)g_k, g_k)_H^2 \mu(dx) - \sum_{k=1}^{n}\int_H (F''(x)f_k, f_k)_H^2 \mu(dx)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_H \Big|(F''(x)g_k, g_k)_H - (F''(x)f_k, f_k)_H\Big|\Big|(F''(x)g_k, g_k)_H + (F''(x)f_k, f_k)_H\Big|\mu(dx) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\int_H \Big|(F''(x)(g_k - f_k), g_k)_H + (F''(x)f_k, g_k - f_k)_H\Big|\Big|(F''(x)g_k, g_k)_H +$$

$$+ (F''(x)f_k, f_k)_H\,|\,\mu(dx) \leqslant 4C\sum_{k=1}^{n} k\,\|g_k - f_k\|_H.$$

Но

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\,\|g_k - f_k\|_H}{\sqrt{k^3\psi_\varepsilon(k)}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}\|g_k - f_k\|_H^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\psi_\varepsilon(k)}\right)^{1/2},$$

а

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|g_k - f_k\|_H^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\psi_\varepsilon(k)} < \infty \quad (\varepsilon > 0),$$

и по лемме Кронекера

$$\sum_{k=2}^{n} k\,\|g_k - f_k\|_H = O\big(\sqrt{n^3\psi_\varepsilon(n)}\big).$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\sum_{k=1}^{n}\|(F''(x)f_k, f_k)_H\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}^2 = o\left(\frac{n^2}{\psi_\varepsilon(n)\ln^2 n}\right),$$

имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\|(F''g_k, g_k)_H\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}^2 = o\left(\frac{n^2}{\psi_\varepsilon(n)\ln^2 n}\right).$$

Согласно первому утверждению теоремы

$$\Delta F(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(F''(x)g_k, g_k)_H = 0$$

почти для всех $x \in H$.

Пусть μ и ν — две эквивалентные гауссовы меры с корреляционными операторами K_μ и K_ν и нулевыми средними и $(F''(x)f_k, f_k)_H \in \mathfrak{L}_2(H, \nu)$, $k = 1, 2, \ldots$. Переход к эквивалентной мере не нарушает сходимости почти всюду на H, поэтому, если выражение $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(F''(x)f_k, f_k)_H$ равно нулю μ-почти всюду на H, то оно равно нулю ν-почти всюду на H.

3. Условие гармоничности (2) теоремы, будучи в некотором смысле оптимальным, не является необходимым. Это видно на примере функции

$$F(x) = \frac{1}{6} \sum_{k=k_0}^{\infty} \sqrt{\frac{k}{\psi_\varepsilon(k)}} \lambda_k x_k^3, \quad \varepsilon > 0,$$

на l_2. Для этой функции

$$\Delta F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=k_0}^{n} \sqrt{\frac{k}{\psi_\varepsilon(k)}} \lambda_k x_k.$$

Случайные величины $\eta_k(x) = \sqrt{\frac{k}{\psi_\varepsilon(k)}} \lambda_k x_k$ независимы,

$$\mathrm{M}\eta_k = 0, \ \mathbf{D}\eta_k = \frac{k}{\psi_\varepsilon(k)}, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\eta_k}{k^2} < \infty,$$

и в силу усиленного закона больших чисел для независимых случайных величин $\Delta F(x) = 0$ почти для всех $x \in l_2$. В то же время условие (2) не выполняется, так как

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}} \mathbf{D}\eta_k = \sum_{k=k_0}^{n} \frac{k}{\psi_\varepsilon(k)}.$$

Это связано с тем, что случайные величины $\eta_k(x)$ из этого примера независимы (в отличие от примера в доказательстве теоремы, в котором $\eta_k(x)$ лишь ортогональны), а для независимых случайных величин имеют место более точные оценки, чем для ортогональных случайных величин, что, естественно, отразится на условиях гармоничности функций. Этому будет посвящена следующая, заключительная, статья.

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа.— М. : Наука, 1967.— 512 с.
2. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные дифференциальные операторы Лапласа — Леви // Укр. мат. журн.— 1980.— 32, № 1.— С. 69—79.
3. *Феллер М. Н.* Запас гармонических функций бесконечного числа переменных. I // Там же.— 1990. — 42, № 11.— С. 1596—1599.
4. *Петров В. В.* Об усиленном законе больших чисел для последовательности ортогональных случайных величин // Вестн. Ленингр. ун-та.— 1975.— № 7.— С. 52—57.
5. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные эллиптические уравнения и операторы типа П. Леви // Успехи мат. наук.— 1986.— 41, № 4.— С. 97—140.
6. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов.— М. : Изд-во иностр. лит.— 1963.— 360 с.

УкрНПДО, Киев

Получено 25.12.89