УДК 517.5

А. И. Степанец

Классы функций, заданные на действительной оси и их приближения целыми функциями. II

Исследуются аппроксимативные свойства функций (заданных на всей оси) классов $\hat{L}^{\psi}_{\beta}$, введенных в первой части работы.

Досліджуються апроксимативні властивості функцій (заданих на всій осі) класів $\hat{L}^{\psi}_{\beta}$, введених в першій частині роботи.

Настоящая статья является продолжением статьи [1]. В обеих статьях сохранены основные обозначения и принята единая нумерация параграфов, утверждений и формул.

5. Приближение операторами Фурье в равномерной метрике. Пусть ψ — любая функция из множества $\mathfrak{A}$, β — произвольное число и $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}$. Выражение $U_\sigma(f, x, \Lambda^*)$ вида (25), в котором величины $\lambda^*_\sigma(v, c)$ определяются по формуле (35) при $c = \sigma - 1$ (предполагается, что $\sigma > 1$) назовем оператором Фурье и обозначим через $F_\sigma(f, x)$. Итак, $\forall f \in L^{\psi}_{\beta}$

$$F_\sigma(f, x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x + t)\, \hat{\tau}_\sigma(t)\, dt, \quad \sigma > 1, \tag{48}$$

где $\hat{\tau}_\sigma(t)$ — преобразование вида (2) функции

$$\tau_\sigma(v) = \begin{cases} \psi(v), & 0 \leqslant v \leqslant \sigma - 1, \\ \psi(v) - [v(\sigma - 1)]\,\psi(\sigma), & \sigma - 1 \leqslant v < \sigma, \\ 0 & v \geqslant \sigma. \end{cases} \tag{49}$$

Если $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}$ и $f(\cdot)$ — 2π-периодическая функция, т. е. $f \in L^{\psi}_{\beta}$, то $\forall n \in N$ при $c \in [n - 1, n]$ величины $U_n(f, x, \Lambda_c)$ и $U_n(f, x, \Lambda^*_c)$ в силу равенства (32) тождественно совпадают. Поэтому, согласно предложению 6, в этом случае имеем $F_n(f, x) = S_{n-1}(f, x)$, где $S_{n-1}(f, x)$ — частная сумма Фурье порядка $n - 1$ функции $f(\cdot)$. Если $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}$ и функция $f^{\psi}_{\beta}(x)/(1 + |x|)$ суммируема с квадратом на всей оси, то в силу предложения 8 $F_\sigma(f, x)$ —

целая функция экспоненциального типа $\leqslant \sigma : F_\sigma(f; \cdot) \in \mathscr{E}_\sigma$. Для каждой функции $f \in \hat{L}^\psi_\beta$ положим $\rho_\sigma(f, x) = f(x) - F_\sigma(f, x)$. Тогда, учитывая соотношения (3) и (48), будем иметь

$$\rho_\sigma(f, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta(x+t)\,\hat{r}_\sigma(t)\,dt, \tag{50}$$

где

$$\hat{r}_\sigma(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty r_\sigma(v)\cos(vt + \beta\pi/2)\,dv$$

и

$$r_\sigma(v) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant v \leqslant \sigma - 1, \\ (v - (\sigma - 1))\,\psi(\sigma), & \sigma - 1 \leqslant v \leqslant \sigma, \\ \psi(v). \end{cases} \tag{51}$$

В итоге получим

$$\hat{r}_\sigma(t) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int_{\sigma-1}^{\sigma}(v - (\sigma - 1))\cos(vt + \beta\pi/2)\,dv +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_\sigma^\infty \psi(v)\cos(vt + \beta\pi/2)\,dv = \mathscr{J}_1(\sigma, t) + \mathscr{J}_2(\sigma, t). \tag{52}$$

Пусть W^2_σ — подмножество функций $\varphi \in \mathscr{E}_\sigma$, для которых функция $\varphi(x)/(1 + |x|)$ суммируема на R с квадратом. Если $\varphi \in W^2_{\sigma-1}$, то справедливо равенство

$$\mathscr{J}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t)\,\hat{r}_\sigma(t)\,dt \equiv 0, \tag{53}$$

поскольку $J(x)$ представляет собой величину $\Phi(x) - F_\sigma(\Phi, x)$, где $\Phi(\cdot)$ — функция, (ψ, β)-производная которой принадлежит к W^2_σ и согласно предложению 9 $F_\sigma(\Phi, x) \equiv \Phi(x)$. Следовательно,

$$\rho_\sigma(f, x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x+t)\,\hat{r}_\sigma(t)\,dt, \tag{54}$$

где

$$h(v) = h(v, f, \psi, \beta, \sigma, \varphi) = f^\psi_\beta(v) - \varphi(v). \tag{55}$$

Отправляясь от формулы (54), в этом разделе исследуем более детально величину $\rho_\sigma(f, x)$ в случае $f \in \hat{C}^\psi_\beta M$, т. е. когда $f(\cdot)$ — непрерывная функция, (ψ, β)-производная которой $f^\psi_\beta(\cdot)$ почти всюду ограничена на любом конечном интервале действительной оси.

Т е о р е м а 1. *Пусть $\psi \in F$ и $d = d(v)$ — произвольная функция, непрерывная при всех $\sigma > 1$ и такая, что $\sigma d(\sigma) \geqslant d_0 > 0$ $\forall \sigma > 1$. Тогда $\forall f \in \hat{C}^\psi_\beta M$ при любых $\sigma > 1$, $\forall \beta \in R$ справедливо неравенство*

$$\|\rho_\sigma(f, x)\|_C \leqslant \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\,E_{\sigma-1}(f^\psi_\beta)\,|\ln d(\sigma)| + b^\psi_\sigma(f, d), \tag{56}$$

где

$$E_\sigma(f^\psi_\beta) = \inf_{\varphi \in W^2_\sigma}\|f^\psi_\beta(x) - \varphi(x)\|_M, \tag{57}$$

$$|b^\psi_\sigma(f, d)| < K(\psi(\sigma) + Q_\sigma(d, \psi))\,E_{\sigma-1}(f^\psi_\beta), \tag{58}$$

$$Q_\sigma(d, \psi) = \int_{1/d(\sigma)}\frac{\psi(t+\sigma)}{t}\,dt + \int_{d(\sigma)} t^{-1}(\psi(\sigma) - \psi(\sigma + 1/t))\,dt, \tag{59}$$

K — величина, которая может зависеть только от функции $\psi(\cdot)$.

Доказательство. Выполняя интегрирование и производя элементарные преобразования, имеем

$$\mathcal{T}_1(\sigma, t) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left(\frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t} - \frac{2\sin(t/2)}{t^2}\sin(\sigma t - t/2 - \beta\pi/2)\right) = \quad (60)$$

$$= \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left(\frac{t - \sin t}{t^2}\sin\left(\sigma t + \beta\pi/2\right) + \frac{1-\cos t}{t^2}\cos(\sigma t + \beta\pi/2)\right), \quad (60')$$

$$\mathcal{T}_2(\sigma, t) = -\frac{\psi(\sigma)}{\pi t}\sin(\sigma t + \beta\pi/2) - \frac{1}{\pi t}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi'(v)\sin(vt + \beta\pi/2)\,dv =$$

$$\overset{\mathrm{df}}{=} -\frac{\psi(\sigma)}{\pi t}\sin(\sigma t + \beta\pi/2) - \frac{1}{\pi}\mathcal{T}_3(\sigma, t). \quad (61)$$

Отправляясь от этих формул и равенства (54), полагаем

$$B_\sigma^\psi(d, f, x) = \nu(d)\frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int\limits_{m_d \leqslant |t| \leqslant M_d} h(x+t)\frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t}\,dt, \quad (62)$$

$$m_d = \min(d(\sigma), 1), \quad M_d = \max(d(\sigma), 1), \quad \nu(d) = \operatorname{sign}(d(\sigma) - 1),$$

$$P_\sigma^\psi(d, f, x) = \int\limits_{|t| \leqslant d(\sigma)} h(x+t)\,\mathcal{T}_2(\sigma, t)\,dt, \quad R_\sigma^\psi(d, f, x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t| \geqslant d(\sigma)} h(x+t)\,\mathcal{T}_3(\sigma, t)\,dt, \quad (63)$$

$$\gamma_\sigma(f, x) = \int\limits_{-1}^{1} h(x+t)\,\mathcal{T}_1(\sigma, t)\,dt,$$

$$\delta_\sigma(f, x) = -\frac{2\psi(\sigma)}{\pi}\int\limits_{|t| \geqslant 1} h(x+t)\frac{\sin t/2}{t^2}\sin(\sigma t - t/2 - \beta\pi/2)\,dt. \quad (64)$$

В таких обозначениях равенство (54) в силу (52) принимает вид

$$\rho_\sigma(f, x) = B_\sigma^\psi(d, f, x) + P_\sigma^\psi(d, f, x) + R_\sigma^\psi(d, f, x) + \gamma_\sigma(f, x) + \delta_\sigma(f, x). \quad (65)$$

Это равенство справедливо почти для всех x $\forall \hat{L}_\beta^\psi$ при $\psi \in F$, $\beta \in R$, $\sigma > 1$; оно выполняется в каждой точке x, если $f \in \hat{C}_\beta^\psi M$. Если $\|\cdot\|_X$ — какая-нибудь норма, то согласно равенству (6) будем иметь

$$\|\rho_\rho(f, x)\|_X \leqslant \|B_\sigma^\psi(f, x)\|_X + \|P_\beta^\psi(d, f, x)\|_X + \|R_\beta^\psi(d, f, x)\|_X +$$

$$+ \|\gamma_\sigma(f, x)\|_X + \|\delta_\sigma(f, x\|_X. \quad (66)$$

Неравенство (56) получим, оценив каждое слагаемое правой части соотношения (66) при $X = C$.

Сначала воспользуемся доказанным и ранее [2, с. 59, 60] неравенствами $\forall \sigma > 1$, $\forall t \in R$, $\psi \in F$

$$|\mathcal{T}_2(\sigma, t)| \leqslant (1/\pi)\int\limits_{\sigma}^{\sigma + 2\pi/|t|}\psi(v)\,dv, \quad (67)$$

$$|\mathcal{T}_3(\sigma, t)| \leqslant (\sigma/|t|)(\psi(\sigma) + 2\pi/|t|)). \quad (67')$$

Имеем

$$\|P_\sigma^\psi(d, f, x)\|_C \leqslant \|h\|_M \int\limits_{|t| \leqslant d(\sigma)} |\mathcal{T}_2(\sigma, t)|\,dt \leqslant \frac{2}{\pi}\|h\|_M \int\limits_{0}^{d(\sigma)}\int\limits_{\sigma}^{\sigma + 2\pi/t}\psi(v)\,dv\,dt.$$

$$\int\limits_0^{d(\sigma)}\int\limits_\sigma^{\sigma+2\pi t}\psi(v)\,dvdt = t\int\limits_\sigma^{\sigma+2\pi/t}\psi(v)\,dv\,\Big|_0^{d(\sigma)} + 2\pi\int\limits_0^{d(\sigma)}\frac{\psi(\sigma+2\pi/t)}{t}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\left(\psi(\sigma)+\int\limits_0^{d(\sigma)}\frac{\psi(\sigma+2\pi/t)}{t}\,dt\right) = 2\pi\left(\psi(\sigma)+\int\limits_{1/d(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi(\sigma+t)}{t}\,dt\right). \quad (68)$$

Подбирая функцию $\varphi^*(\cdot)\in W^2_{\sigma-1}$ в соотношении (55) таким образом, чтобы

$$\|h^*\|_M = \|f^\psi_\beta(\cdot)-\varphi^*(\cdot)\|_M = E_{\sigma-1}(f^\psi_\beta), \quad (69)$$

имеем

$$\|P^\psi_\sigma(d,f,x)\|_C \leqslant E_{\sigma-1}(f^\psi_\beta)\left(\psi(\sigma)+\int\limits_{1/d(\sigma)}\frac{\psi(\sigma+t)}{t}\,dt\right). \quad (70)$$

Аналогично оценим третье слагаемое

$$\|R^\psi_\beta(d,f,x)\|_C \leqslant (2/\pi)\,\|h^*\|_M\int\limits_{d(\sigma)}^{\infty}|\mathcal{I}_3(\sigma,t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant K_1E_{\sigma-1}(f^\psi_\beta)\int\limits_{d(\sigma)}^{\infty}t^{-1}(\psi(\sigma)-\psi(\sigma+1/t))\,dt. \quad (71)$$

Таким образом,

$$\|P^\psi_\sigma(d,f,x)\|_C + \|R^\psi_\sigma(d,f,x)\|_C \leqslant K_2(\psi(\sigma)+Q_\sigma(d,\psi))\,E_{\sigma-1}(f^\psi_\beta). \quad (72)$$

Далее, принимая во внимание соотношения (60) и (69), получаем оценку

$$\|\gamma_\sigma(f,x)\|_C + \|\delta_\sigma(f,x)\|_C \leqslant K_3\psi(\sigma)\,E_{\sigma-1}(f^\psi_\beta). \quad (73)$$

Поэтому, сопоставляя неравенства (66), (72) и (73), видим, что для доказательства соотношения (56) остается получить оценку величины $B^\psi_\sigma(d,f,x)$. Для этого заметим, что условие $\sigma d(\sigma)\geqslant d_0$ вместе с неравенством (69) позволяет записать

$$\|B^\psi_\sigma(d,f,x)\|_C \leqslant \frac{2\psi(\sigma)}{\pi}E_{\sigma-1}(f^\psi_\beta)\int\limits_{m_d}^{M_d}\left|\frac{\sin\sigma t}{t}\right|dt + O(1), \quad (74)$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по σ, β и $f(\cdot)\in C^\psi_\beta$. Если $d(\sigma)\leqslant 1$, то (см. например, [2, с. 114]),

$$\int\limits_{m_d}^{M_d}\frac{|\sin\sigma t|}{t}\,dt = \int\limits_{d(\sigma)}^{1}\left|\frac{\sin\sigma t}{t}\right|dt = \frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{d(\sigma)} + O(1).$$

Если же $\sigma\geqslant 1$, то будем иметь

$$\int\limits_{m_d}^{M_d}\left|\frac{\sin\sigma t}{t}\right|dt = \int\limits_{1}^{d(\sigma)}\left|\frac{\sin\sigma t}{t}\right|dt = \frac{2}{\pi}\ln d(\sigma) + O(1),$$

т. е. всегда

$$\int\limits_{m_d}^{M_d}\left|\frac{\sin\sigma t}{t}\right|dt = \frac{2}{\pi}\,|\ln d(\sigma)| + O(1). \quad (75)$$

Подставляя это значение в (74), получаем искомую оценку. Теорема доказана.

Если $f(\cdot)$ — непрерывная периодическая функция, имеющая почти всюду ограниченную (ψ, β)-производную, т. е. $f \in C^{\psi}_{\beta}M$, σ — натуральное число $\sigma = n \in N$ и $\varphi^*(\cdot) = \varphi^*_n(\cdot)$ — тригонометрический полином, для которого выполняется равенство

$$\| f^{\psi}_{\beta}(\cdot) - \varphi^*_n(\cdot) \|_C = \inf_{\varphi_n = T_{2n-1}} \| f^{\psi}_{\beta}(\cdot) - \varphi_n(\cdot) \|_C = E_{n-1}(f^{\psi}_{\beta}), \tag{76}$$

где T_{2n-1} — множество тригонометрических полиномов порядка $n-1$, то величина $\| B^{\psi}_n(d, f, x) \|_C$ при $d(\pi) \geqslant 1$ допускает оценку [2, с. 111]

$$\| B^{\psi}_n(d, f, x) \|_C \leqslant O(1)\, \psi(n)\, E_{n-1}(f^{\psi}_{\beta}) \ln^{+} 1/d(n), \quad \ln^{+} t = \max\{\ln t, 0\}. \tag{77}$$

Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 1′. *Пусть $\psi \in F$ и $d = d(n)$, $n = 1, 2, \ldots,$— произвольная последовательность, для которой $nd(n) \geqslant d_0 > 0\ \forall n \in N$. Тогда $\forall f \in C^{\psi}_{\beta}M$ при любом $n \in N$ выполняется неравенство*

$$\| \rho_n(f, x) \|_C = \| f(x) - S_{n-1}(f, x) \|_C \leqslant \frac{4}{\pi^2}\, \psi(n)\, E_{n-1}(f^{\psi}_{\beta}) \ln^{+} \frac{1}{d(n)} + b^{\psi}_n(f, d), \tag{78}$$

где $\ln^{+} t = \max\{\ln t, 0\}$, а величина $b^{\psi}_n(f, x)$ удовлетворяет неравенству (58), в котором следует положить $\sigma = n$ и $E_{\sigma-1}(f^{\psi}_{\beta}) = E_{n-1} f^{\psi}_{\beta}$.

Теорема 1′ доказана автором в [3]. Там же показано, что $\forall f \in C^{\psi}_{\beta}C$ при любом натуральном n найдется функция $F(\cdot) \in C^{\psi}_{\beta}C$ такая, что $E_{n-1}(F^{\psi}_{\beta}) = E_{n-1}(f^{\psi}_{\beta})$ и для нее справедливо равенство

$$\| \rho_n(F, x) \|_C = \frac{4}{\pi^2}\, \psi(n)\, E_{n-1}(E^{\psi}_{\beta}) \ln^{+} \frac{1}{d(n)} + d^{\psi}_n(F, d), \tag{79}$$

в котором величина $| d^{\psi}_n(F, d) |$ не превышает правой части (58) (при $\sigma = n$ и $E_{\sigma-1}(F, d) = E_{n-1}(F, d)$), возможно, с другой константой K, также не зависящей от $F(\cdot)$, $n \in N$ и $\beta \in R$.

В [4], лемма 8, показано, что если $\psi \in F_0$ и в качестве $d(\sigma)$ взята величина $d^*(\sigma) = \mu(\psi, \sigma)/\sigma$, то при $\sigma \in N$ справедливо неравенство $Q_{\sigma}(d^*, \psi) \leqslant K\psi(\sigma)$. (80) Включение $\sigma \in N$ не принципиально, так как эта оценка верна $\forall \sigma \geqslant 1$. Кроме того, в силу предложения 12 $\exists d_0 > 0$ такое, что $\forall \sigma \geqslant 1$ $\sigma d^*(\sigma) \geqslant d_0$. Учитывая эти факты и полагая в теореме 1 $d(\sigma) = d^*(\sigma) = 1/(\eta(\sigma) - \sigma)$, приходим к такому утверждению.

Теорема 2. *Пусть $\psi \in F_0$. Тогда $\forall f \in C^{\psi}_{\beta}M$ при любых $\sigma > 1$ и $\beta \in R$ справедливо неравенство*

$$\| \rho_{\sigma}(f, x) \|_C \leqslant \left(\frac{4}{\pi^2} | \ln(\eta(\sigma) - \sigma) | + O(1) \right) \psi(\sigma)\, E_{\sigma-1}(f^{\psi}_{\beta}), \tag{81}$$

где $\eta(\sigma) = \eta(\psi, \sigma) = \psi^{-1}(\psi(\sigma)/2)$ и $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по $f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta}M$, $\sigma > 1$ и $\beta \in R$.

В периодическом случае при $\sigma \in N$ аналог этой теоремы доказан автором в [3]. Он получается в качестве следствия из теоремы 1′ при $\psi \in F_0$.

Пусть теперь $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ — подмножество функций $f(\cdot)$ из $\hat{C}^{\psi}_{\beta}M$, у которых почти всюду $| f^{\psi}_{\beta}(\cdot) | \leqslant 1$, т. е. $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty} = \{ f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty} \mid f^{\psi}_{\beta} \leqslant 1 \}$. Понятно, что $\forall f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ $E_{\sigma}(f^{\psi}_{\beta}) \leqslant 1$. Поэтому, рассматривая верхние грани обеих частей неравенства (81) по классу $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ и полагая

$$\sup_{f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}} \| \rho_{\sigma}(f, x) \|_C = \mathscr{E}_{\sigma}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}),$$

в качестве следствия из теоремы 2 получаем теорему.

Т е о р е м а 3. *Если $\psi \in F_0$, то при любых $\sigma > 1$ и $\beta \in R$ справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}) \leqslant \left(\frac{4}{\pi^2} \,|\ln(\eta(\sigma)-\sigma)| + O(1)\right)\psi(\sigma), \tag{82}$$

в котором $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по $\sigma \geqslant 1$ и $\beta \in R$.

Отметим, что в [5] автор показал, что в соотношении (82) строгого неравенства быть не может, т. е. всегда

$$\mathcal{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}) = \left(\frac{4}{\pi^2} \,|\ln(\eta(\sigma)-\sigma)| + O(1)\right)\psi(\sigma), \quad \psi \in F_0, \quad \sigma \geqslant 1, \quad \beta \in R. \tag{82'}$$

Последнее равенство означает, что в неравенствах (81), (82), а, следовательно, и в (56) главные члены в общем случае уменьшить нельзя.

Множества функций $\mathfrak{M}_c$, $\mathfrak{M}_\infty$ и $\mathfrak{M}_0$ определяются параметрами их элементов — функциями $\eta(t)$ и $\mu(t)$, и поэтому часто оказывается удобным формулировать утверждения именно в терминах этих множеств. Покажем, что $\mathfrak{A}_{c,\infty} \subset F_0$, т. е. убедимся, что если $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, то $\psi(\cdot)$ удовлетворяет и условию (46). В самом деле, если $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$ то найдутся постоянные $K_i > 0$ такие, что $\forall t \geqslant 1$ [2, с. 95]

$$K_1 t\psi'(t) \leqslant \psi(t) \leqslant K_2 t\psi'(t), \quad K_3 t \leqslant \eta(t) - t \leqslant K_4 t.$$

Стало быть, найдутся постоянные $C_i > 0$ такие, что

$$C_1 t\psi'(t) \leqslant \frac{1}{2}\psi(t) = \psi(\eta(t)) \leqslant C_2 \eta(t)\psi'(\eta(t)).$$

Поэтому $\eta'(t) = \dfrac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))} < K$. Если же $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то по определению $\mu(\psi, t)$ монотонно возрастает. Значит, $\eta(t) = t + \alpha(t)$, где $\alpha(t)$ — невозрастающая функция и поэтому $0 < \eta'(t) \leqslant 1$.

Таким образом, $\mathfrak{A}_{c,\infty} \in F_0$. В то же время функции $\psi(\cdot)$ из множества $\mathfrak{A}_0$ к F_0 могут и не принадлежать: для них условие (40) не обязательно, значит, они могут не входить даже во множество F.

Если $\psi \in \mathfrak{A}_0$, то для классов $\hat{C}^\psi_\beta M$ справедлив следующий аналог теоремы 1.

Т е о р е м а 4. *Пусть $\psi \in \mathfrak{A}_0$. Тогда $\forall f \in \hat{C}^\psi_0 M$ при любых $\sigma > 1$ выполняется неравенство*

$$\|\rho_\sigma(f, x)\|_C \leqslant \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma) E_{\sigma-1}(f^\psi_0)\ln\sigma + b^\psi_\sigma(f), \tag{83}$$

в котором величина $E_\sigma(f^\psi_0)$ определяется формулой (57) *и*

$$|b^\psi_\sigma(f)| < K\psi(\sigma) E_{\sigma-1}(f^\psi_0), \tag{84}$$

где K — постоянная, которая может зависеть только от функции $\psi(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и при доказательстве теоремы 1, будем исходить из равенства (54) и соотношений (60) — (61). Положим

$$B^\psi_\sigma(f, x) = -\frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1} h(x+t)\frac{\sin\sigma t}{t}\,dt,$$

$$R^\psi_\sigma(f, x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x+t)\mathcal{J}^{(0)}_3(\sigma, t)\,dt, \quad \gamma^{(0)}(f, x) = \int\limits_{|t|\leqslant 1} h(x+t) I^{(0)}_1(\sigma, t)\,dt,$$

$$\delta^{(0)}_\sigma(f, x) = -\frac{2\psi(\sigma)}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1} h(x+t)\frac{\sin t/2}{t^2}\sin(\sigma t - t/2)\,dt,$$

где $\mathcal{I}_1^{(0)}(\sigma, t)$ и $\mathcal{I}_3^{(0)}(\sigma, t)$ — величины, определяющиеся формулами (60) — — (61) при $\beta = 0$. Тогда

$$\rho_\sigma(f, x) = B_\sigma^\psi(f, x) + R_\sigma^\psi(f, x) + \gamma(f, x) + \delta_\sigma(f, x). \tag{85}$$

и для любой нормы $\|\cdot\|_X$ будем иметь

$$\|\rho_\sigma(f, x)\|_X \leqslant \|B_\sigma^\psi(f, x)\|_X + \|R_\sigma^\psi(f, x)\|_X + \|\gamma_\sigma^{(0)}(f, x)\|_X + \|\delta_\sigma^{(0)}(f, x)\|_X. \tag{86}$$

Оценим каждое слагаемое правой части этого соотношения при $X = C$ и $\psi \in \mathfrak{A}_0$. Прежде всего заметим, что неравенство (73) справедливо при любом $\beta \in R$, поэтому

$$\|\gamma^{(0)}(f, x)\|_C + \|\delta_\sigma^{(0)}(f, x)\|_C \leqslant K_1\psi(\sigma) E_{\sigma-1}(f_0^\psi). \tag{87}$$

Далее, пользуясь оценкой (10.7) из [2, с. 133], находим

$$\|R_\sigma^\psi(f, x)\|_C \leqslant \frac{2}{\pi} E_{\sigma-1}(f_0^\psi) \int_0^\infty |I_3^{(0)}(\sigma, t)|\, dt \leqslant K_2\psi(\sigma) E_\sigma(f_0^\psi). \tag{87'}$$

В результате имеем

$$\|B_\sigma^\psi(f, x)\|_C \leqslant \frac{2\psi(\sigma)}{\pi} E_{\sigma-1}(f_0^\psi) \int_0^1 \frac{|\sin\sigma t|}{t}\, dt. \tag{88}$$

Но (см. например, [2], с. 114) при $\sigma > 1$

$$\int_0^1 \frac{|\sin\sigma t|}{t}\, dt = \frac{2}{\pi} \ln\sigma + O(1).$$

Объединяя это соотношение с неравенствами (86)—(88), приходим к оценкам (83) и (84). Теорема доказана.

Теорема 5. *Если* $\psi \in \mathfrak{A}_0$ *то* $\forall\sigma > 1$

$$\mathcal{E}_\sigma(\hat{C}_{0,\infty}^\psi) \leqslant \left(\frac{4}{\pi^2} \ln\sigma + O(1)\right)\psi(\sigma), \tag{89}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* $\sigma > 1$.

В периодическом случае, т. е. для классов $C_{0,\infty}^\psi$ при $\sigma \in N$ [2, с. 135] соотношение (89) переходит в равенство, а так как $\hat{C}_{0,\infty}^\psi \supset C_{0,\infty}^\psi$ и включение $\sigma \in N$ здесь не принципиально, то из (89) заключаем, что $\forall\psi \in \mathfrak{A}_0$

$$\mathcal{E}_\sigma(\hat{C}_{0,\infty}^\psi) = \left(\frac{4}{\pi^2} \ln\sigma + O(1)\right)\psi(\sigma). \tag{90}$$

Заметим, что из равенства (65) и оценок (72) и (73) вытекает следующее утверждение.

Предложение 13. *В условиях и обозначениях, принятых в теореме* 1, $\forall f \in \hat{C}_\beta^\psi M$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\rho_\sigma(f, x) = B_\sigma^\psi(d, f, x) + b_\sigma^\psi(f, d, x), \tag{56'}$$

в котором

$$|b_\sigma^\psi(f, d, x)| \leqslant K(\psi(\sigma) + Q_\sigma(d, \psi)) E_{\sigma-1}(f_\beta^\psi). \tag{58'}$$

Подобное утверждение имеет место и в случае, когда $\psi \in \mathfrak{A}_0$ и $\beta = 0$. Вследствие равенства (85) и оценок (87), (88) будет справедливым такое предложение.

П р е д л о ж е н и е 13′. *Если* $\psi \in \mathfrak{A}_0$, *то* $\forall f \in \hat{L}_0^\psi$ *при любом* $\sigma > 1$

$$\rho_\sigma(f, x) = B_\sigma^\psi(f, x) + b_\sigma^\psi(f, x), \tag{56''}$$

причем

$$|b_\sigma^\psi(f, x)| \leqslant K\psi(\sigma) E_{\sigma-1}(f_0^\psi), \tag{58''}$$

где K — величина, которая может зависеть только от функции $\psi(\cdot)$.

Аналоги этих утверждений в периодическом случае отмечались автором в [3].

6. О ц е н к и н а и л у ч ш и х п р и б л и ж е н и й н а к л а с с а х $\hat{C}_\beta^\psi M$ в р а в н о м е р н о й м е т р и к е. Пусть, как и раньше,

$$E_\sigma(f) = \inf_{\varphi \in W_\sigma^2} \| f(x) - \varphi(x) \|_C.$$

В этом пункте получим неулучшаемые по порядку оценки величин $E_\sigma(f)$ для функций, принадлежащих множествам $\hat{C}_\beta^\psi M$, когда $\psi(\cdot)$ принадлежит одному из множеств $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_c$ или $\mathfrak{A}_\infty$, а β — фиксированное действительное число.

Т е о р е м а 6. *Если* $\psi \in \mathfrak{A}_0$, *то* $\forall f \in \hat{C}_0^\psi M$ при любом $\sigma > 1$

$$E_\sigma(f) \leqslant K\psi(\sigma) \| f_0^\psi \|_M. \tag{91}$$

Если $\psi \in \mathfrak{A}_c$, *то* $\forall f \in \hat{C}_\beta^\psi M$ *при любых* $\beta \in R$ *и* $\sigma > 1$

$$E_\sigma(f) \leqslant K\psi(\sigma) E_{\sigma/2}(f_\beta^\psi). \tag{92}$$

Если же $\psi \in \mathfrak{A}_\infty$, *то* $\forall f \in \hat{C}_\beta^\psi M$ *при любых* $\beta \in R$ *и* $\sigma > 1$

$$E_\sigma(f) \leqslant K\psi(\sigma) E_{2\sigma-\eta(\sigma)}(f_\beta^\psi), \tag{93}$$

где $\eta(\sigma) = \eta(\psi, \sigma) = \psi^{-1}(\psi(\sigma)/2)$, $\sigma > 1$, $\eta(\sigma) > \sigma$; *K — величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем пользоваться функциями $U_\sigma(f, x, \Lambda_c^*)$ вида (25), в которых функции $\lambda_\sigma^*(v) = \lambda_\sigma^*(v, c)$ выбраны согласно формуле (35). Имеем

$$U_\sigma(f, x, \Lambda_c^*) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x + t)\, \hat{\tau}_\sigma(t, c)\, dt, \tag{94}$$

где $\tau_\sigma(t, c)$ — преобразование вида (2) функции

$$\tau_\sigma(t, c) = \tau_\sigma(t, c, \psi) = \begin{cases} \psi(v), & 0 \leqslant v \leqslant c, \\ \psi(v) - \dfrac{v - c}{\sigma - c}\psi(\sigma), & c \leqslant v \leqslant \sigma. \end{cases}$$

Согласно предположению 8 функция $U_\sigma(f, x, \Lambda_\sigma^*)$ $\forall f \in \hat{C}_\beta^\psi M$ в условиях теоремы — целая функция экспоненциального типа и, более того, принадлежит W_σ^2.

Далее, учитывая равенства (3) и (94), $\forall f \in \hat{L}_\beta^\psi$ находим

$$\rho_\sigma(f, x, \Lambda_c^*) = f(x) - U_\sigma(f, x, \Lambda_c^*) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x + t)\, \hat{r}_\sigma(t, c)\, dt, \tag{95}$$

где

$$\hat{r}_\sigma(t, c) = \hat{r}_\sigma(t, c, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty r_\sigma(v, c) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv,$$

$$r_\sigma(v, c) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant v \leqslant c, \\ \dfrac{v - c}{\sigma - c}\psi(\sigma), & c \leqslant v \leqslant \sigma, \\ \psi(v), & v \geqslant \sigma. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\hat{r}_\sigma(t,c) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int_c^\sigma \frac{v-c}{\sigma-c}\cos(vt+\beta\pi/2)\,dv + \frac{1}{\pi}\int_\sigma^\infty \psi(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\overset{\mathrm{df}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{df}}{=} \mathcal{J}_1(\sigma,t,c)+\mathcal{J}_2(\sigma,t). \tag{96}$$

Величина $\mathcal{J}_2(\sigma,t)$ та же, что и в равенстве (52), а также в равенстве (61); величина $\mathcal{J}_1(\sigma,t)$ в (52) есть частный случай $\mathcal{J}_1(\sigma,t,c)$ при $c = \sigma-1$. Получим для $\mathcal{J}_1(\sigma,t,c)$ аналоги равенств (60) и (61). Выполнив интегрирование, будем иметь

$$\mathcal{J}_1(\sigma,t,c) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left(\frac{\sin(\sigma t+\beta\pi/2)}{t} - \frac{2\sin(((\sigma+c)t+\beta\pi)/2\sin((\sigma-c)t/2)}{(\sigma-c)t^2}\right) =$$

$$= \psi(\sigma)/\pi\left(\frac{(\sigma-c)t-\sin(\sigma-c)t}{(\sigma-c)t^2}\sin(\sigma t+\beta\pi/2)+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\cos(\sigma-c)t}{(\sigma-c)t^2}\cos(\sigma t+\beta\pi/2)\right). \tag{97'}$$

Чтобы установить (91), рассмотрим функции $U_\sigma(f,x,\Lambda_c^*)$ при $c=\beta=0$, которые в этом случае обозначим через $\Phi_\sigma(f,x)$. Вследствие соотношений (94) — (97') $\forall f\in \hat{L}_0^\psi$ будем иметь

$$\Phi_\sigma(f,x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f_0^\psi(x+t)\hat{\tau}_\sigma(t,0)\,dt,\ \rho_\sigma(f,x,\Lambda_0^*) = f(x)-\Phi_\sigma(f,x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_0^\psi(x+t)\hat{r}_\sigma(t,0)\,dt,\quad \hat{r}_\sigma(t,0) = \mathcal{J}_1^{(0)}(\sigma,t,0)+\mathcal{J}_2^{(0)}(\sigma,t,0),$$

где $\mathcal{J}_1^{(0)}(\sigma,t,0)$ и $\mathcal{J}_2^{(0)}(\sigma,t,0)$ — значения величин $\mathcal{J}_1(\sigma,t,c)$ и $\mathcal{J}_2(\sigma,t)$ при $c=\beta=0$

$$\mathcal{J}_1^{(0)}(\sigma,t,0) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left(\sin\sigma t/t - \frac{2\sin^2(\sigma t/2)}{\sigma t^2}\right) =$$

$$= \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left(\frac{\sigma t-\sin\sigma t}{\sigma t^2}\sin\sigma t+\frac{1-\cos\sigma t}{\sigma t^2}\cos\sigma t\right),\ \mathcal{J}_2^{(0)}(\sigma,t,0) =$$

$$= -\frac{\psi(\sigma)}{\pi t}\sin\sigma t - \frac{1}{\pi}\mathcal{J}_3^{(0)}(\sigma,t),\ \mathcal{J}_3^{(0)}(\sigma,t) = \frac{1}{t}\int_\sigma^\infty \psi'(v)\sin vt\,dv.$$

Таким образом, $\forall f\in\hat{L}_0^\psi$ при любом $\sigma>1$

$$\rho_\sigma(f,x,\Lambda_0^*) = -\frac{2\psi(\sigma)}{\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} f_0^\psi(x+t)\frac{\sin^2(\sigma t/2)}{t^2}\,dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_0^\psi(x+t)\mathcal{J}_3^{(0)}(\sigma,t)\,dt.$$

Отсюда $\forall f\in\hat{C}_0^\psi M$ при любом $\sigma>1$ получаем

$$\|\rho_\sigma(f,x,\Lambda_0^*)\|_C \leqslant \frac{4M_f\psi(\sigma)}{\pi\sigma}\int_0^\infty \frac{\sin^2(\sigma t/2)}{t^2}\,dt + \frac{2M_f}{\pi}\int_0^\infty |\mathcal{J}_3^{(0)}(\sigma,t)|\,dt,$$

где $M_f = \| f_\beta^\psi(\cdot) \|_M$. Принимая во внимание неравенство (87′), далее находим

$$\| \rho_\sigma (f, x, \Lambda_0^*) \|_C \leqslant \frac{2M_f \psi(\sigma)}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} dt + K_1 M_f \psi(\sigma) \leqslant K\psi(\sigma) M_f,$$

что доказывает соотношение (91), поскольку всегда $E_\sigma(f) \leqslant \| \rho_\sigma (f, x, \Lambda_0^*) \|_C$.

Чтобы доказать (92), возьмем функции $U_\sigma(f, x, \Lambda_c^*)$ при $c = \sigma/2$ и $\beta \in \in R$, которые будем обозначать в этом случае через $V_\sigma(f, x)$. В силу соотношений (94) — (97′) получаем

$$V_\sigma(f, x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t)\, \hat{\tau}_\sigma(t, \sigma/2)\, dt, \quad \rho_\sigma(f, x, \Lambda_{\sigma/2}^*) = f(x) -$$

$$- V_\sigma(f, x) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t)\, \hat{r}_\sigma(t, \sigma/2)\, dt,$$

где $\hat{r}_\sigma(t, \sigma/2) = \mathcal{I}_1(\sigma, t, \sigma/2) + \mathcal{I}_2(\sigma, t)$, причем, согласно (97) и (97′)

$$\mathcal{I}_1(\sigma, t, \sigma/2) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \left(\frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t} - \frac{4\sin((3\sigma t + 2\beta\pi)/4)\sin(\sigma t/4)}{\sigma t^2} \right) = \tag{98}$$

$$= \frac{2\psi(\sigma)}{\pi} \left(\frac{(\sigma t/2) - \sin(\sigma t/2)}{\sigma t^2} \sin(\sigma t + \beta\pi/2) + \frac{1 - \cos(\sigma t/2)}{\sigma t^2} \cos(\sigma t + \beta\pi/2) \right). \tag{98′}$$

Если $W_{\sigma/2}^2$ — подмножество функций $\varphi \in \mathcal{E}_{\sigma/2}$, для которых функция $\varphi(x)/ /(1 + |x|)$ суммируема на R с квадратом, то согласно предложению 9 заключаем, что $\forall \varphi \in W_{\sigma/2}^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\, \hat{r}_\sigma(t, \sigma/2)\, dt \equiv 0$. Поэтому $\forall f \in \hat{L}_\beta^\psi$ и $\forall \varphi \in W_{\sigma/2}^2$

$$\rho_\sigma(f, x, \Lambda_{\sigma/2}^*) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x+t)\, \hat{r}_\sigma(t, \sigma/2)\, dt, \tag{99}$$

где, как и раньше, $h(v) = f_\beta^\psi(v) - \varphi(v)$. Отправляясь от формулы (99), положим

$$\gamma_\sigma(f, x) = \int\limits_{-1/\sigma}^{1/\sigma} h(x+t)\, \mathcal{I}_1(\sigma, t, \sigma/2)\, dt, \quad \delta_\sigma(f, x) = -\frac{4\psi(\sigma)}{\sigma\pi} \times$$

$$\times \int\limits_{|t| \geqslant 1/\sigma} h(x+t) \frac{\sin((3\sigma t + 2\beta\pi)/4)\sin \sigma t/4}{t^2} dt, \quad P_\sigma^\psi(f, x) =$$

$$= \int\limits_{-1/\sigma}^{1/\sigma} h(x+t)\, \mathcal{I}_2(\sigma, t)\, dt, \quad R_\sigma^\psi(f, x) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant 1/\sigma} h(x+t)\, \mathcal{I}_3(\sigma, t)\, dt.$$

В этих обозначениях имеем

$$\rho_\sigma(f, x, \Lambda_{\sigma/2}^*) = \gamma_\sigma(f, x) + \delta_\sigma(f, x) + P_\sigma^\psi(f, x) + R_\sigma^\psi(f, x).$$

Так, что для любой нормы $\| \cdot \|_X$ справедлива оценка

$$\| \rho_\sigma(f, x, \Lambda_{\sigma/2}^*) \|_X \leqslant \| \gamma_\sigma(f, x) \|_X + \| \delta_\sigma(f, x) \|_X + \| P_\sigma^\psi(f, x) \|_X + \| R_\sigma^\psi(f, x) \|_X. \tag{100}$$

Подбирая функцию $\varphi^*(\cdot) \in W_{\sigma/2}^2$ так, чтобы $\| h^*(\cdot) \|_M = \| f_\beta^\psi(\cdot) - \varphi^*(\cdot) \|_M =$

$= E_{\sigma/2}(f_\beta^\psi)$, и пользуясь равенством (98′), $\forall f \in \hat{C}_\beta^\psi M$ находим

$$\|\gamma_\sigma(f, x)\|_C \leqslant E_{\sigma/2}(f_\beta^\psi) \int\limits_{-1/\sigma}^{1/\sigma} |\mathcal{I}_1(\sigma, t, \sigma/2)|\, dt \leqslant \frac{4\psi(\sigma)}{\pi\sigma} E_{\sigma/2}(f_\beta^\psi) \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^{1/\sigma} \frac{|(\sigma t)/2 - \sin(\sigma t/2)|}{t^2}\, dt + \int\limits_0^{1/\sigma} \frac{1 - \cos(\sigma t/2)}{t^2}\, dt \right) < K_1 \psi(\sigma) E_{\sigma/2}(f_\beta^\psi), \tag{101}$$

Аналогично получаем

$$\|\delta_\sigma(f, x)\|_C \leqslant \frac{4\psi(\sigma)}{\pi\sigma} E_{\sigma/2}(f_\beta^\psi) \int\limits_{|t| \geqslant 1/\sigma} (dt/t^2) \leqslant K_2 \psi(\sigma) E_{\sigma/2}(f_\beta^\psi). \tag{102}$$

Далее, как и при получении соотношений (70) и (71), придем к неравенствам

$$\|P_\sigma^\psi(f, x)\|_C \leqslant K_3 E_{\sigma/2}(f_\beta^\psi) \left(\psi(\sigma) + \int\limits_\sigma^\infty \frac{\psi(\sigma + t)}{t}\, dt \right) \tag{103}$$

и

$$\|R_\sigma^\psi(f, x)\|_C \leqslant K_4 E_{\sigma/2}(f_\beta^\psi) \left(\psi(\sigma) + \int\limits_{1/\sigma}^\infty \frac{\psi(\sigma) - \psi(\sigma + 1/t)}{t}\, dt. \right. \tag{103′}$$

Объединяя соотношения (100) — (103′), видим, что для доказательства неравенства (92) остается показать $\forall \psi \in \mathfrak{M}_c$

$$\int\limits_\sigma^\infty \frac{\psi(\sigma + t)}{t}\, dt = O(1)\,\psi(\sigma), \quad \int\limits_{1/\sigma}^\infty t^{-1}(\psi(\sigma) - \psi(\sigma + 1/t))\, dt = O(1)\,\psi(\sigma). \tag{104}$$

Если $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, то, как показано в [1, с. 96], $\forall \sigma \geqslant 1$

$$\mathcal{I}_1(\sigma) = \int\limits_{\eta(\sigma) - \sigma} \frac{\psi(t + \sigma)}{t}\, dt \leqslant K_1 \psi(\sigma), \tag{105}$$

$$\mathcal{I}_2(\sigma) = \int\limits_{1/(\eta(\sigma) - \sigma)} t^{-1}(\psi(\sigma) - \psi(\sigma + 1/t))\, dt \leqslant K_2 \psi(\sigma), \tag{105′}$$

где K_1 и K_2 — абсолютные постоянные. Поэтому $\forall \psi \in \mathfrak{M}_c$

$$\int\limits_\sigma^\infty \frac{\psi(\sigma + t)}{t}\, dt \leqslant \mathcal{I}_1(\sigma) + \int\limits_\sigma^{\eta(\sigma) - \sigma} \frac{\psi(\sigma + t)}{t}\, dt \leqslant K_1 \psi(\sigma) +$$

$$+ \psi(\sigma) \left| \ln \frac{\sigma}{\eta(\sigma) - \sigma} \right| < K \psi(\sigma)$$

и аналогично

$$\int\limits_{1/\sigma}^\infty t^{-1}(\psi(\sigma) - \psi(\sigma + 1/t))\, dt = \mathcal{I}_2(\sigma) + \int\limits_{1/\sigma}^{1/\eta(\sigma) - \sigma} t^{-1}(\psi(\sigma) - \psi(\sigma +$$

$$+ 1/t))\, dt < K \psi(\sigma),$$

т. е. соотношения (104) действительно выполняются и, значит, неравенство (92) доказано.

Чтобы получить оценку (93) при $\psi \in \mathfrak{A}_\infty$ возьмем функции $U_\sigma(f, x, \Lambda_c^*)$ при $c = 2\sigma - \eta(\sigma) \geqslant 0$ и $\beta \in R$, которые в этом случае будем обозначать через $S_\sigma(f, x)$. Заметим, что если $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то величина $\mu(\psi, t)$ монотонно и неограниченно возрастает. Поэтому при $t \to \infty$ величина $(2t -$

$-\eta(\psi, t))/t$, возрастая, стремится к единице. Стало быть, условие $2\sigma-\eta(\sigma)\geqslant 0$ всегда будет выполняться при $\sigma\geqslant\sigma_0$, где σ_0—некоторое фиксированное число. Поскольку неравенство (93) при $\sigma\in(1, \sigma_0)$ можно получить подбором входящей в него постоянной K, то без ограничения общности в дальнейшем можем считать, что $2\sigma-\eta(\sigma)\geqslant 0$ при всех $\sigma>1$.

Вследствие соотношений (94)—(97′), имеем

$$S_\sigma(f, x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t)\,\hat{\tau}_\sigma(t, 2\sigma-\eta(\sigma))\,dt,\quad \rho_\sigma(f, x, \Lambda^{*}_{2\sigma-\eta(\sigma)}) =$$

$$= f(x) - S_\sigma(f, x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t)\,\hat{r}_\sigma(t, 2\sigma-\eta(\sigma))\,dt,$$

где $\hat{r}_\sigma(t, 2\sigma-\eta(\sigma)) = \mathcal{J}_1(\sigma, t, 2\sigma-\eta(\sigma)) + \mathcal{J}_2(\sigma, t)$, величина $\mathcal{J}_2(\sigma, t)$ определяется равенством (52), а $\mathcal{J}_1(\sigma, t, 2\sigma-\eta(\sigma))$ — соотношениями (97) и (97′) при $c=2\sigma-\eta(\sigma)$. Далее, как и при получении формулы (99), заключаем

$$\rho_\sigma(f, x, \Lambda^{*}_{2\sigma-\eta(\sigma)}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x+t)\,\hat{r}_\sigma(t, 2\sigma-\eta(\sigma))\,dt, \tag{106}$$

где $h(v) = f_\beta^\psi(v) - \varphi(v)$, $\varphi(\cdot)$ — любая функция из множества $W^2_{2\sigma-\eta(\sigma)}$ и, отправляясь от формулы (106), полагаем

$$\gamma_\sigma(fx) = \int\limits_{|t|\leqslant 1/(\eta(\sigma)-\sigma)} h(x+t)\,\mathcal{J}_1(\sigma, t, 2\sigma-\eta(\sigma))\,dt,\ \delta_\sigma(f, x) = \frac{2\psi(\sigma)}{\pi(\sigma-c)}\times$$

$$\times\int\limits_{|t|\geqslant 1/(\eta(\sigma)-\sigma)} h(x+t)\,\frac{\sin(((\sigma+c)t+\beta\pi)/2)\sin((\sigma-c)t/2)}{t^2}\,dt,$$

$$c = 2\sigma-\eta(\sigma),\quad P_\sigma^\psi(f, x) = \int\limits_{|t|\leqslant 1/(\eta(\sigma)-\sigma)} h(x+t)\,\mathcal{J}_2(\sigma, t)\,dt,$$

$$R_\sigma^\psi(f, x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1/(\eta(\sigma)-\sigma)} h(x+t)\,\mathcal{J}_2(\sigma, t)\,dt.$$

В таких обозначениях

$$\rho_\sigma(f, x, \Lambda^{*}_{2\sigma-\eta(\sigma)}) = \gamma_\sigma(f, x) + \delta_\sigma(f, x) + P_\sigma^\psi(f, x) + R_\sigma^\psi(f, x)$$

и, стало быть, для любой нормы $\|\cdot\|_X$ будем иметь

$$\|\rho_\sigma(f, x, \Lambda^{*}_{2\sigma-\eta(\sigma)})\|_X \leqslant \|\gamma_\sigma(f, x)\|_X + \|\delta_\sigma(f, x)\|_X +$$

$$+ \|P_\sigma^\psi(f, x)\|_X + \|R_\sigma^\psi(f, x)\|_X. \tag{107}$$

Затем, выбирая функцию $\varphi^*\in W^2_{2\sigma-\eta(\sigma)}$ так, чтобы $\|h^*(\cdot)\|_M = \|f_\beta^\psi(\cdot) - \varphi^*(\cdot)\|_M = E_{2\sigma-\eta(\sigma)}(f_\beta^\psi)$ и пользуясь равенством (97′) при $c=2\sigma-\eta(\sigma)$, найдем

$$\|\gamma_\sigma(f, x)\|_G \leqslant E_{2\sigma-\eta(\sigma)}(f_\beta^{*})\int\limits_{|t|<1/(\eta(\sigma)-\sigma)} |\mathcal{J}_1(\sigma, t, 2\sigma-\eta(\sigma))|\,dt \leqslant \frac{2\psi(\sigma)}{\pi(\sigma-c)}\times$$

$$\times E_{2\sigma-\eta(\sigma)}(f_\beta^\psi)\int\limits_0^{(1/\eta(\sigma)-\sigma)} \frac{(\sigma-c)t - \sin(\sigma-c)t + 1 - \cos(\sigma-c)t}{t^2}\,dt <$$

$$< K_1\psi(\sigma)\,E_{2\sigma-\eta(\sigma)}(f_\beta^\psi). \tag{108}$$

Аналогично получаем

$$\| \delta_\sigma (f, x) \|_C \leqslant \frac{4\psi(\sigma)}{\pi(\sigma - c)} E_{2\sigma-\eta(\sigma)} (f^\psi_\beta) \int\limits_{|t| \geqslant 1/(\eta(\sigma)-\sigma)} dt/t^2 \leqslant K_2 \psi(\sigma) E_{2\sigma-\eta(\sigma)} (f^\psi_\beta). \tag{109}$$

Поступая так же, как и при установлении соотношений (70) и (71), и учитывая оценки (105) и (105′), находим

$$\| P^\psi_\sigma (f, x) \|_C \leqslant K_3 E_{2\sigma-\eta(\sigma)} (f^\psi_\beta) \left(\psi(\sigma) + \int\limits_{\eta(\sigma)-\sigma} \frac{\psi(\sigma + t)}{t} dt \right) \leqslant$$

$$\leqslant K_4 \psi(\sigma) E_{2\sigma-\eta(\sigma)} (f^\psi_\beta), \tag{110}$$

$$\| R^\psi_\sigma (f, x) \|_C \leqslant K_5 E_{2\sigma-\eta(\sigma)} (f^\psi_\beta) \int\limits_{1/(\eta(\sigma)-\sigma)} t^{-1} (\psi(\sigma) - \psi(\sigma + 1/t))\, dt \leqslant$$

$$\leqslant K_6 \psi(\sigma) E_{2\sigma-\eta(\sigma)} (f^\psi_\beta). \tag{110′}$$

Объединяя соотношения (107) — (110′) и замечая, что $E_\sigma(f) \leqslant \| \rho_\sigma (f, x, \Lambda^*_{2\sigma-\eta(\sigma)} \|_C$, получаем неравенство (93) и завершаем доказательство теоремы.

Если A — некоторое множество функций, то положим $E_\sigma(A) = \sup\limits_{f \in A} E_\sigma(f)$. Выбирая в качестве A классы $\hat{C}^\psi_{\beta\infty}$, из теоремы 6 получаем следствие.

Следствие 1. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{A}_0$. *Тогда* $\forall \sigma > 1$

$$E_\sigma(\hat{C}^\psi_{0,\infty}) \leqslant K\psi(\sigma). \tag{111}$$

Если же $\psi \in \mathfrak{A}_{c,\infty}$, *то* $\forall \sigma > 1$ *и* $\forall \beta \in R$

$$E_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}) \leqslant K\psi(\sigma). \tag{111′}$$

Отметим, что в периодическом случае, т. е. для классов $C^\psi_{\beta,\infty}$ при $\sigma \in N$ доказано (см., например, [2, с. 250]), что найдутся абсолютные положительные постоянные K_1 и K_2 такие, что $\forall n \in N$

$$K_1 \psi(n) \leqslant E_n (C^\psi_{\beta,\infty}) \leqslant K_2 \psi(n), \tag{112}$$

где $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$ и $\beta \in R$, или $\psi \in \mathfrak{M}_0$ и $\beta = 0$. Поскольку $C^\psi_{\beta,\infty} \subset \hat{C}^\psi_{\beta,\infty}$, то соотношение (112) означает, что неравенства (111) и (111′) в общем случае не могут быть улучшены по порядку.

Отметим также, что при $\psi(t) = t^{-r}$, $t \geqslant 1$, где $r = 1, 2, \ldots$, и β — либо 0, либо 1, соотношение (111′) известно, причем с точной константой $K = K(r)$ [6, с. 241].

1. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси и их приближения целыми функциями. I // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 1.— С. 102—112.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.— Киев : Наук. думка, 1987.— 268 с.
3. **Степанец А. И. Скорость сходимости рядов Фурье в пространствах L^ψ_β.— Киев, 1986.— С. 3 — 48.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.66).**
4. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. Мат.— 1986.— 50, № 1.— С. 101—136.
5. *Степанец А. И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн.— 1988.— 40, № 2.— С. 198—209.
6. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации.— М. : Наука, 1965.— 480 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 21.12.88