УДК 517

Е. А. ПАВЛОВ, канд. физ.-мат. наук (Ворошиловгр. машиностроит. ин-т)

Об одном классе сингулярных интегральных операторов

Изучается класс сингулярных интегральных операторов с точки зрения ограниченности их действия из одних симметричных пространств в другие.

Вивчається клас сингулярних інтегральних операторів з точки зору обмеженості їх дії з одних симетричних просторів в інші.

Д. В. Бойд [1] изучил вопрос об ограниченности сингулярного интегрального оператора Гильберта в симметричных пространствах измеримых функций [2]. В данной статье изучаются интегральные операторы с ядрами, зависящими от разности аргументов и имеющими особенность в начале координат. Сформулированы условия непрерывности таких операторов в симметричных пространствах, из которых следуют, в частности, достаточные условия непрерывности оператора Гильберта.

Получена характеризация сингулярного интегрального оператора Гильберта в классе всех операторов A_k, определенных равенством

$$A_k f(s) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{|t-s| \geqslant \delta} K(s, t) f(t)\, dt. \tag{1}$$

Полученный результат не может быть получен применением техники, развитой в [3] и специфичной для $\mathscr{L}_2(R_n)$.

Приведем необходимые определения и обозначения.

Банахово пространство E измеримых на $(-\infty, \infty)$ функций называется симметричным, если:

1) из $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ почти при всех $t \in (-\infty, \infty)$ и $y(t) \in E$ вытекает $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$;

2) из равноизмеримости $x(t)$ и $y(t)$ следует $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Фундаментальная функция симметричного пространства определяется равенством $\varphi_E(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_E$. Оператор растяжения (подобного преобразования аргумента) определяется равенством $\sigma_\tau x(t) = x(t/\tau)$. Индексы Бойда [1] определяются равенствами

$$\alpha_E = \lim_{\tau \to 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{E \to E}}{\ln \tau},$$

$$\beta_E = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{E \to E}}{\ln \tau}.$$

Через $\hat{f}$ обозначаем преобразование Фурье функции $f(t)$.

Под ε-регуляризацией сингулярной в нуле функции $K(x)$ будем понимать функцию $K_\varepsilon(x)$, совпадающую с $K(x)$ при $|x| \geqslant \varepsilon$ и $K_\varepsilon(x) = 0$ при $|x| < \varepsilon$.

Теорема 1. *Пусть* $K(x) \in \mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$. *Предположим, что*:

а) $|\hat{K}(x)| \leqslant B$;

б) *вне начала координат выполняются соотношения*:

1) $K(x) \in C^1$;

2) $|K'(x)| \leqslant B/|x|^2$.

Положим

$$(Tf)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-y) f(y)\, dy \quad \forall f \in \mathscr{L}_1 \cap E,$$

где E — *симметричное сепарабельное пространство на* $(-\infty, \infty)$ *такое, что*:

1) $\|\sigma_t\|_{E \to E} = o(1)$ *при* $t \to 0$;

2) $\|\sigma_t\|_{E \to E} = o(t)$ *при* $t \to \infty$.

Тогда справедливо неравенство

$$\|Tf\|_E \leqslant C_E \|f\|_E, \quad f \in E.$$

Здесь T *обозначает оператор, уже расширенный по непрерывности на все* E.

Доказательство. Как следует из [4], оператор T — слабого типа (1, 1) и сильного типа (p, p), где $1 < p < \infty$. Далее рассуждая так же, как в [2, с. 210], получаем требуемый результат. Теорема доказана.

Замечание [4]. Оператор T будет оператором сильного типа (E, E), где E удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы 1, если условия б) теоремы 1 заменить условием

$$\int\limits_{|x| \geqslant 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leqslant B; \qquad |y| > 0.$$

Это следует из того, что при такой замене оператор T остается оператором слабого типа (1,1) и сильного типа (p, p), где $1 < p < \infty$.

Теорема 2. *Пусть ядро $K(x)$ удовлетворяет условиям:*

1) $|K(x)| \leqslant B|x|^{-1}, \quad |x| > 0;$

2) $\displaystyle\int\limits_{|x| \geqslant 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leqslant B, \quad |y| > 0;$

3) $\displaystyle\int\limits_{R_1 < |x| < R_2} K(x)\, dx = 0, \quad 0 < R_1 < R_2 < \infty.$

Положим

$$T_\varepsilon f(x) = \int\limits_{|y| \geqslant \varepsilon} f(x-y) K(y)\, dy, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда

$$\| T_\varepsilon f \|_E \leqslant A_E \| f \|_E; \tag{2}$$

кроме того, существует предел в E

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon f = Tf. \tag{3}$$

Выполняется неравенство

$$\| Tf \|_E \leqslant A_E \| f \|_E, \tag{4}$$

где E удовлетворяет условиям 1, 2 *теоремы* 1.

Доказательство. Так как $K(x)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы 2, то этим же условиям удовлетворяет и $K_\varepsilon(x)$ с константой, не превышающей CB. Кроме того справедливо неравенство $\sup\limits_y |K_\varepsilon(y)| \leqslant CB$. Следовательно, по теореме 1 получаем

$$\| T_\varepsilon f \|_E \leqslant A_E \| f \|_E, \tag{5}$$

где E удовлетворяет условиям теоремы 1.

Далее рассуждаем как в [4, с. 50]. Пусть f_1 — финитная непрерывная функция, имеющая первую производную. Тогда имеем

$$(T_\varepsilon f_1)(x) = \int\limits_{|y| \geqslant \varepsilon} K(y) f_1(x-y)\, dy = \int\limits_{|y| \geqslant 1} K(y) f_1(x-y)\, dy + \\ + \int\limits_{1 \geqslant |y| \geqslant \varepsilon} K(y) [f_1(x-y) - f_1(x)]\, dy. \tag{6}$$

Второе слагаемое сходится равномерно по x при $\varepsilon \to 0$, следовательно, оно сходится в норме E, где E — сепарабельное симметричное пространство.

Обозначим $\overline{K}(y) = K(y)[\mathrm{X}_{(-\infty,1]}(y) + \mathrm{X}_{[1,+\infty)}(y)]$. Используя обобщенное неравенство Минковского [6], имеем

$$\Big\| \int\limits_{|y| \geqslant 1} K(y) f_1(x-y)\, dy \Big\|_E = \Big\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{K}(y) f_1(x-y)\, dy \Big\|_E \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \| \overline{K} \|_E |f_1(y)|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant B \| (1 + |x|)^{-1} \|_E \leqslant 2B \int\limits_0^\infty (1+x)^{-1}\, d\varphi_E(x) \leqslant 2B \int\limits_0^\infty (1+x)^{-1}\, d\| \sigma_x \|_E. \tag{7}$$

Очевидно, используя свойства полумультипликативных функций, можно показать, что интеграл в правой части неравенства (6) конечен в силу условия $\beta_E < 1$. Итак, $T_\varepsilon f_1 \overset{E}{\Rightarrow}$, если $\varepsilon \to 0$. Этот предел обозначим Tf_1. Так как $T_\varepsilon f_1 \Rightarrow Tf_1$ в норме E, то, очевидно, $\| T_\varepsilon f_1 \|_E \Rightarrow \| Tf_1 \|_E$. Учитывая неравенство (5), получаем неравенство

$$\| Tf_1 \|_E \leqslant A_E \| f_1 \|_E. \tag{8}$$

Далее любую функцию $f \in E$ можно представить в виде $f = f_1 + f_2$, где f_1 — непрерывная, финитная и имеющая производную функция. Кроме того, $f_2 : \| f_2 \|_E < \varepsilon_1$,

$$(T_\varepsilon f)(x) = \int\limits_{|y| \geqslant \varepsilon} K(y) f_1(x-y)\, dy + \int\limits_{|y| \geqslant \varepsilon} K(y) f_2(x-y)\, dy. \tag{9}$$

Первое слагаемое равенства (9), как было доказано, сходится в E к $(Tf_1)(x)$. Применяя неравенство (2) теоремы 2 к функции f_2, получаем

$$\| T_\varepsilon f_2 \|_E \leqslant A_E \| f_2 \|_E \leqslant A_E \varepsilon_1. \tag{10}$$

Окончательно имеем

$$(T_\varepsilon f)(x) \overset{E}{\rightrightarrows} Tf(x), \tag{11}$$

$$\| Tf \|_E \leqslant A_E \| f \|_E. \tag{12}$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть симметричное пространство E обладает свойствами 1 и 2 из теоремы 1. Тогда оператор Гильберта ограниченно действует в E.*

Теорема 3. *Пусть интегральный оператор T удовлетворяет условиям теоремы 2 и выполнены условия: 1) $\beta_{E_1} < 1$; 2) $\beta_{E_2} < \alpha_{E_1}$. Тогда оператор $T: E_1 \to E_2$, где E_2 — сепарабельное симметричное пространство.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 2 было показано что $\overline{K}(x) \in E$, где E — симметричное сепарабельное пространство такое, что $\beta_E < 1$. В работах [5, 6] доказано, что интегральный оператор свертки ограниченно действует из $E^1_{1,\omega} \times E_1$ в E_2, где $E^1_{1,\omega}$ — симметричное пространство, а симметричные пространства E_1 и E_2 таковы, что: 1) $\beta_{E_1} < 1$; 2) $\beta_{E_2} < \alpha_{E_1}$.

Следовательно, справедливо неравенство

$$\| T_\varepsilon f \|_{E_2} \leqslant C \| f \|_{E_1} \| \overline{K} \|_G. \tag{13}$$

Теперь достаточно перейти к пределу в обеих частях неравенства (13). Теорема доказана.

Рассмотрим класс линейных операторов, содержащий интегральные и сингулярные интегральные операторы. Этот класс операторов определяется равенством (1), где $K(s, t)$ — измеримая в смысле Лебега функция, определенная на $R_1 \times R_1$ за исключением, быть может, прямой $s = t$.

Замечание 1. Если ядро $K(s, t)$, определенное на $R_n \times R_n$ за исключением, быть может, прямой $s=t$ измеримое в смысле Лебега, не имеет особенности на прямой $s = t$, то оператор A_k является обычным интегральным оператором.

Теорема 4. *Пусть оператор A_k, определенный равенством (1), определен на $\mathcal{L}_p(R_n)$ и действует из $\mathcal{L}_p(R_n)$ в $\mathcal{L}_q(R_n)$, где $1 \leqslant p < \infty$. Тогда если $A_k f = 0$ для всех $f \in \mathcal{L}_p(R_n)$, то $K(s, t) = 0$ для почти всех $(s, t) \in R_n \times R_n$.*

Доказательство. Рассмотрим ядро

$$\overline{K}_m(s, t) = K(s, t)\, \chi_{R^s_{\delta_m}}, \tag{14}$$

где $R^s_{\delta_m} = R_n \setminus Q^s_{\delta_m}$, где $Q^s_{\delta_m}$ — шар с центром в точке s и радиусом равным по длине δ_m. Пусть m фиксировано. Тогда

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{|t-s| \geqslant \delta} \overline{K}_m(s, t)\, x(t)\, dt = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{|t-s| \geqslant \delta} K(s, t)\, x(t)\, \chi_{R^s_{\delta_m}}(t)\, dt. \tag{15}$$

Очевидно, что почти для каждого фиксированного $s \in R_n$ справедливо включение $x(t)\, \chi_{R^s_{\delta_m}}(t) \in \mathcal{L}_p(R_n)$; где $x(t) \in \mathcal{L}_p(R_n)$.

Исходя из условия теоремы 1 и равенства (4) имеем равенство

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{|t-s| \geqslant \delta} \overline{K}_m(s, t)\, x(t)\, dt = 0. \tag{16}$$

Кроме того, имеем

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{|t-s| \geqslant \delta} \overline{K}_m(s, t)\, x(t)\, dt = \int\limits_{|t-s| \geqslant \delta_m} K(s, t)\, x(t)\, dt. \tag{17}$$

Итак, получаем

$$\int_{R_m} \overline{K}_m(s, t)\, x(t)\, dt = 0 \tag{18}$$

для всех $x(t) \in \mathscr{L}_p(R_n)$.

В частности, равенство (7) выполняется для всех $x(t) \in D(R^n) \subset \subset \mathscr{L}_p(R_n)$. Из леммы дю Буа — Реймонда получаем

$$\overline{K}_m(s, t) = 0 \tag{19}$$

для почти всех $t \in R_n$. Другими словами, выполняется равенство

$$K(s, t) = 0 \tag{20}$$

для почти каждого фиксированного $s \in R_n$, для почти всех $t \in R^s_{\delta m}$. Очевидно, что

$$\overline{K}_m(s, t) \to K(s, t) \tag{21}$$

при почти каждом фиксированном $s \in R_n$, для почти всех $t \in R_n$. Из (9) и (10) получаем

$$K(s, t) = 0 \tag{22}$$

для почти каждого фиксированного $s \in R_n$, при почти всех $t \in R_n$. Из (11), как не трудно убедиться, следует равенство

$$K(s, t) = 0 \text{ п. в. } (s, t) \in R_n \times R_n. \tag{23}$$

Теорема доказана.

Замечание. В дальнейшем для краткости оператор A_k, определенный равенством (1), будем записывать в виде

$$(A_k x)(s) = \int_{R_n} K(s, t)\, x(t)\, dt,$$

понимая в каждом конкретном случае интеграл либо в обычном смысле, либо в смысле главного значения.

Теорема 5. *Пусть G_τ — однопараметрическое семейство обратимых операторов, действующих в пространстве измеримых функций $S(R_n, dx)$ и обладающее свойствами:*

1) $G_{\tau_s}\left(\int_{R_n} K(s, t)\, x(t)\, dt\right) = \int_{R_n} G_{\tau_s} K(s, t)\, x(t)\, dt;$

2) $G_\tau : \mathscr{L}_1(R_n) \to \mathscr{L}_1(R_n);$

3) $G_\tau : \mathscr{L}_\infty(R_n) \to \mathscr{L}_\infty(R_n);$

4) $\int_{R_n} G_\tau f(s)\, ds = \| G_\tau \|_{\mathscr{L}_1(R_n)} \int_{R_n} f(s)\, ds$

для $\tau > 0;$

5) $G_\tau [f_1(t) \cdot f_2(t)] = G_\tau f_1(t) \cdot G_\tau f_2(t).$

Тогда если оператор A_k, заданный равенством (1), *коммутирует с однопараметрическим семейством обратимых операторов, обладающих свойствами* 1—5, *то выполняется равенство*

$$G_{\tau_p} G_{\tau_t} K(t, p) = K(t, p)\, \| G_\tau \|_{\mathscr{L}_1(R_n)}, \tag{24}$$

где G_{τ_p} означает, что операторы семейства G_τ применяются к функциям переменной p. Аналогичный смысл имеет G_{τ_t}.

Доказательство. Для $\tau > 0$ имеем

$$\int_{R_n} G_{\tau_s} K(s, t)\, x(t)\, dt = G_{\tau_s} \int_{R_n} K(s, t)\, x(t)\, dt = \int_{R_n} K(s, t)\, G_{\tau_t} x(t)\, dt =$$

$$= \int_{R_n} G_{\tau_t} [G^{-1}_{\tau_t} K(s, t)\, x(t)]\, dt = \| G_\tau \|_{\mathscr{L}_1(R_n)} \int_{R_n} G^{-1}_{\tau_t} K(s, t)\, x(t)\, dt =$$

$$= \int_{R_n} G^{-1}_{\tau_t} K(s, t)\, \| G_\tau \|_{\mathscr{L}_1(R_n)}\, x(t)\, dt \tag{25}$$

для всех $x(t) \in \mathscr{L}_p(R_n)$. Теперь из теоремы 1 получаем

$$\| G_\tau \|_{\mathscr{L}_1(R_n)} G_{\tau_t}^{-1} K(s, t) = G_{\tau_s} K(s, t). \tag{26}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Для того чтобы сингулярный интегральный оператор был сингулярным оператором Гильберта, необходимо и достаточно, чтобы он коммутировал со сдвигами, положительными расширениями и антикоммутировал с отражениями.*

Следствие 2. *Для того чтобы сингулярный интегральный оператор имел ядро, зависящее от разности аргументов $s - t$, необходимо и достаточно, чтобы он коммутировал со сдвигами.*

Следствие 3. *Для того чтобы сингулярный оператор имел вид*

$$Af(s) = \lim_{\delta \to 0} \int_{|s-t|>\delta} K\left(\frac{s}{t}\right) f(t) \frac{dt}{t},$$

необходимо и достаточно, чтобы он коммутировал с положительными растяжениями.

1. *Boyd D. W.* The Hilbert transform on rearrangement-invariant space // Can. J. Math. — 1967.— **19**, N 3.— P. 599—616.
2. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
3. *Стейн И. М., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М. : Мир, 1974.— 331 с.
4. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М. : Мир, 1973.— 342 с.
5. *Павлов Е. А.* Об операторе свертки в симметричных пространствах // Успехи мат. наук.— 1976.— **31**, № 1.— С. 257—258.
6. *Павлов Е. А.* Об ограниченности операторов свертки в симметричных пространствах // Изв. вузов. Математика.— 1982.— **23**, № 2.— С. 36—40.

Получено 10.03.87,
после доработки — 27.03.89