УДК 517.54

С. А. Плакса

Краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на спиралеобразном контуре. II

Изучается неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на разомкнутом жордановом спрямляемом спиралеобразном контуре, при этом влияние контура на разрешимость задачи сравнимо с влиянием аргумента ее коэффициента. Решение задачи в классе функций, допускающих слабостепенные особенности в концах линии сопряжения, строится в явном виде.

Вивчається неоднорідна крайова задача Рімана з нескінченним індексом логарифмічного порядку на розімкненому жордановому спрямлюваному спіралевидному контурі, при цьому вплив контура на розв'язність задачі порівнянний з впливом аргументу її коефіцієнта. Розв'язок задачі в класі функцій, що допускають слабкостепеневі особливості в кінцях лінії спряження, будується в явному вигляді.

Данная статья является продолжением работы [1] и имеет общую с ней нумерацию пунктов, формул и обозначения.

3. Неоднородная задача. Обозначим через $\mathbb{R}$ вещественную прямую, $\rho(z, E) := \inf\limits_{t\in E} |z-t|$, где $E \subset \mathbb{C}$. Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $\gamma = \{t = r\exp(i\varphi(r)) : 0 < r \leqslant a < 1\}$ — *р. ж. с. к. с началом в точке* 0; $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon\,|\ln\varepsilon|^{\beta})$, $\varepsilon\to 0$, $\beta\geqslant 0$; *функция* $\varphi:(0, a]\to\mathbb{R}$ *монотонна; функция* $u:(0, a]\to\mathbb{R}$ — *монотонно убывающая;* $u(r)\to+\infty$, $r\to 0$; $u(r)\leqslant c\,|\ln r|^{\alpha_1}$, $r\to 0$, *и*

$$\int\limits_0^{r/2}\frac{\omega_r(u, \mathbb{R}, y, 2y)}{y}\,dy \leqslant c\,|\ln r|^{\alpha_2},\quad r\to 0,\ r>0,\ \alpha_2\geqslant 0, \tag{27}$$

где постоянные c *не зависят от* r;

$$r_k := \frac{(R_k)^{N+k}}{(R_{k-1})^{N+k-1}}\exp\left(\int\limits_{R_k}^{R_{k-1}}\frac{u(t)}{t}\,dt\right),$$

$k = 1, 2, \ldots$, *где* R_k, $k = 0, 1, \ldots$, — *решение уравнения* $u(R_k) = N+k$ *такое, что* $R_k < R_0 =: r_0 < a$, N — *натуральное число;* $n(r) := 0$ *при* $r\in(r_0, a]$ *и* $n(r) := N+k$ *при* $r\in(r_{k+1}, r_k]$, $k = 0, 1, \ldots$; $K := \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} K_{\rho_k}(a_k)$, *где* $a_k := r_k\exp(i\varphi(r_k))$ *при* $k = 0, 1, \ldots$, $\ln\rho_k/\ln r_k\to 1$, $k\to\infty$. *Тогда*

$$\left|\operatorname{Re}\int\limits_{\gamma_{r_0}(0)}\frac{n(|t|)-u(|t|)}{t-z}\,dt\right| \leqslant c\,|\ln|z||^{\mu},\quad |z|\to 0,\ z\in(\mathbb{C}\setminus\gamma)\setminus K,$$

где $\mu := \max\{\beta+\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+1,\ 2\alpha_1+\alpha_2\}$, *постоянная* c *не зависит от* z.

Доказательство. Пусть $z\in(\mathbb{C}\setminus\gamma)\setminus K$, $|z| < \frac{1}{2}r_0$. Обозначим $\Gamma_z := \gamma_{\frac{1}{16}|z|}(z)$. Имеем

$$\int\limits_{\gamma_{r_0}(0)}\frac{n(|t|)-u(|t|)}{t-z}\,dt = \int\limits_{\gamma_{2|z|}(0)\setminus\Gamma_z}\frac{n(|t|)-u(|t|)}{t-z}\,dt + \int\limits_{\Gamma_z}\frac{n(|t|)-u(|t|)}{t-z}\,dt + z\int\limits_{\gamma_{r_0}(0)\setminus\gamma_{2|z|}(0)}\frac{n(|t|)-u(|t|)}{t(t-z)}\,dt + \int\limits_{\gamma_{r_0}(0)\setminus\gamma_{2|z|}(0)}\frac{n(|t|)-u(|t|)}{t}\,dt =: \sum_{j=1}^{4} I_j.$$

Учитывая очевидные неравенства $|n(r)-u(r)|\leqslant 1$ $\forall r\in(0, r_0]$, $|t-z|\geqslant\frac{1}{16}|z|$ $\forall t\in\gamma_{2|z|}(0)\setminus\Gamma_z$, $|t-z|\geqslant\frac{1}{2}|t|$ $\forall t\in\gamma_{r_0}(0)\setminus\gamma_{2|z|}(0)$ и предложение 1 [1], получаем $|\operatorname{Re} I_1|\leqslant|I_1|\leqslant c\,|\ln|z||^{\beta}$, $|\operatorname{Re} I_3|\leqslant|I_3|\leqslant c\,|\ln|z||^{\beta}$, где постоянные c не зависят от z; $\operatorname{Re} I_4 = \int\limits_{2|z|}^{r_0}\frac{n(y)-u(y)}{y}\,dy$. Последний интеграл заменой переменных $t = 1/y$ приводится к интегралу такого же вида, как I_1 из доказательства леммы 1 [2]. Из полученной там же оценки для I_1 следует $\operatorname{Re} I_4 = o(|\ln|z||)$, $|z|\to 0$.

Оценим $\operatorname{Re} I_2$. Пусть $\Gamma_z \neq \varnothing$ (в противном случае $I_2 = 0$). Если $\rho(z, \gamma) \geqslant \frac{1}{32}|z|$, то аналогично оценке $\operatorname{Re} I_1$ получим $|\operatorname{Re} I_2| \leqslant c\,|\ln|z||^{\beta}$, где постоянная c не зависит от z.

Пусть теперь $\rho(z, \gamma) < \frac{1}{32}|z|$. Через n_z обозначим число различных значений, которые принимает функция $n(|t|)$, если t пробегает множество Γ_z. Очевидно, $n_z \leqslant c\,|\ln|z||^{\alpha_1}$, $|z| \to 0$, где постоянная c не зависит от z. Связные компоненты множества Γ_z разделим на два класса следующим образом. В класс A_1 включим связные компоненты Γ_z, содержащие, по крайней мере, одну из точек a_k, $k = 0, 1, \ldots$. Обозначим эти компоненты через γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n_z^1$, если класс A_1 не пуст. Очевидно, $n_z^1 \leqslant n_z$. Все остальные связные компоненты Γ_z включим в класс A_2. Если A_2 не пуст, то разделим его на множества A_2^i, $i = 1, 2, \ldots, n_z^2$, такие, что $n(|t|) = n_i = \mathrm{const}$ $\forall t \in A_2^i$ при $i \in \overline{1, n_z^2}$, $n_i \neq n_j$ при всех не равных между собой $i, j \in \overline{1, n_z^2}$ и $\bigcup_{i=1}^{n_z^2} A_2^i = A$. Очевидно, $n_z^2 \leqslant n_z$. Учитывая монотонность функции φ, получаем оценки

$$\mu(\gamma_i, \varepsilon) \leqslant \frac{9}{2}\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall i \in \overline{1, n_z^1}, \tag{28}$$

$$\mu(A_2^i, \varepsilon) \leqslant c\,|\ln|z||^{\beta}\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall i \in \overline{1, n_z^2}, \tag{29}$$

где постоянная c не зависит от z.

В результате имеем

$$\operatorname{Re} I_2 = \operatorname{Re}\int_{A_1} \frac{n(|t|) - u(|t|)}{t - z}\,dt + \operatorname{Re}\int_{A_2} \frac{n(|t|) - u(|t|)}{t - z}\,dt. \tag{30}$$

Пусть $A_2 \neq \varnothing$ (в противном случае интеграл по A_2 равен нулю). Тогда

$$\operatorname{Re}\int_{A_2} \frac{n(|t|) - u(|t|)}{t - z}\,dt = \sum_{i=1}^{n_z^2} \operatorname{Re}\int_{A_2^i} \frac{n(|t|) - u(|t|)}{t - z}\,dt.$$

Оценим слагаемое суммы последнего равенства, соответствующее произвольно зафиксированному индексу $i \in \overline{1, n_z^2}$. Обозначим через t_i одну из точек A_2^i, для которой $|z - t_i| = \rho(z, A_2^i)$. Имеем

$$\left|\operatorname{Re}\int_{A_2^i} \frac{n(|t|) - u(|t|)}{t - z}\,dt\right| =$$

$$= \left|\operatorname{Re}\int_{A_2^i} \frac{n(|t|) - u(|t|) - (n(|t_i|) - u(|t_i|))}{t - z}\,dt\right| =$$

$$= \left|\operatorname{Re}\int_{A_2^i} \frac{u(|t|) - u(|t_i|)}{t - z}\,dt\right| \leqslant 2 \int_{\left[0, \frac{1}{8}|z|\right]} \frac{\Omega_{t_i}(u^*, A_2^i, y)}{y}\,d\mu_{t_i}(A_2^i, y),$$

где $u^*(t) := u(|t|)$ $\forall t \in \gamma$. Далее, учитывая (29) и предложение 1 [1], получаем

$$2 \int_{\left[0, \frac{1}{8}|z|\right]} \frac{\Omega_{t_i}(u^*, A_2^i, y)}{y}\,d\mu_{t_i}(A_2^i, y) \leqslant c\,|\ln|z||^{\beta} \int_0^{\frac{1}{8}|z|} \frac{\omega_{|t_i|}(u, \mathbb{R}, y, 2y)}{y}\,dy,$$

где постоянная c не зависит от z.

Поскольку полученные неравенства справедливы для всех $i \in \overline{1, n_z^2}$ и $n_z^2 \leqslant n_z \leqslant c\,|\ln|z||^{\alpha_1}$, $|z| \to 0$, то, учитывая (27), получаем

$$\left|\operatorname{Re}\int_{A_2} \frac{n(|t|) - u(|t|)}{t - z}\,dt\right| \leqslant c\,|\ln|z||^{\alpha_1+\alpha_2+\beta}, \qquad |z| \to 0 \tag{31}$$

(здесь постоянные c не зависят от z).

Пусть $A_1 \neq \varnothing$ (в противном случае интеграл по A_1 в равенстве (30) равен нулю). Тогда

$$\operatorname{Re}\int_{A_1} \frac{n(|t|) - u(|t|)}{t - z}\,dt = \sum_{i=1}^{n_z^1} \operatorname{Re}\int_{\gamma_i} \frac{n(|t|) - u(|t|)}{t - z}\,dt.$$

Оценим слагаемое последней суммы, соответствующее произвольно зафиксированному индексу $i \in \overline{1, n_z^1}$. Обозначим через $\rho_{(i)} := \rho(z, \gamma_i)$ и t_i одну из точек γ_i, для которой $|z - t_i| = \rho_{(i)}$. Возможны следующие случаи:

а) $a_k \in \gamma_i' := \gamma_i \cap \gamma_{2\rho_{(i)}}(z)$. Тогда $\rho_k \leqslant 2\rho_{(i)}$. Обозначая через $\gamma_i'' = \gamma_i \cap \gamma_{3\rho_{(i)}}(t_i)$, $\gamma_i''' := \gamma_i \setminus \gamma_{\rho_{(i)}}(t_i)$, с учетом неравенства (28) и предложения 1 [1] получаем

$$\left|\operatorname{Re}\int_{\gamma_i} \frac{n(|t|) - u(|t|)}{t - z}\,dt\right| \leqslant \int_{\gamma_i'} \frac{|n(|t|) - u(|t|)|}{|t - z|}\,|dt| +$$

$$+ \int_{\gamma_i \setminus \gamma_i'} \frac{|n(|t|) - u(|t|)|}{|t - z|}\,|dt| \leqslant \frac{1}{\rho_{(i)}} \int_{\gamma_i''} |dt| + 2\int_{\gamma_i'''} \frac{|dt|}{|t - t_i|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{9}{2}\left(3 + 2\ln\frac{|z|}{8\rho_{(i)}}\right) \leqslant \frac{9}{2}\left(3 + 2\ln\frac{|z|}{4\rho_k}\right);$$

б) по крайней мере, одна из точек a_k, $k = 0, 1, \ldots$, принадлежит γ_i, но ни одна из них не принадлежит $\gamma_i \cap \gamma_{2\rho_{(i)}}(z)$. Пусть a_n — ближайшая к точке z из точек a_k, $k = 0, 1, \ldots$, принадлежащих γ_i (или одна из ближайших, если таковых несколько). Обозначим $\gamma' := \gamma_i \cap \gamma_{|a_n - z|}(z)$. Имеем

$$\left|\operatorname{Re}\int_{\gamma_i} \frac{n(|t|) - u(|t|)}{t - z}\,dt\right| \leqslant \left|\operatorname{Re}\int_{\gamma'} \frac{n(|t|) - u(|t|)}{t - z}\,dt\right| +$$

$$+ \left|\operatorname{Re}\int_{\gamma_i \setminus \gamma'} \frac{n(|t|) - u(|t|)}{t - z}\,dt\right| =: s_1 + s_2.$$

Для s_1 справедливо соотношение вида (31), в котором $\beta = 0$. С учетом неравенств $2|t - z| \geqslant |t - t_i| \geqslant \frac{1}{2}|t - z| \geqslant \frac{1}{2}\rho_n \;\; \forall t \in \gamma_i \setminus \gamma'$ и (28) получаем неравенство $s_2 \leqslant 9\ln\frac{|z|}{4\rho_n}$.

Итак, в случаях а) и б) справедливо неравенство

$$\left|\operatorname{Re}\int_{\gamma_i} \frac{n(|t|) - u(|t|)}{t - z}\,dt\right| \leqslant c\left(\ln\frac{|z|}{\rho_k} + |\ln|z||^{\alpha_1+\alpha_2}\right),$$

в котором k — индекс ближайшей (или одной из ближайших, если таковых несколько) к точке z из точек a_k, $k = 0, 1, \ldots$, принадлежащих γ_i, постоянная c не зависит от z. Поскольку оно справедливо для всех $i \in \overline{1, n_z^1}$, $n_z^1 \leqslant n_z \leqslant c\,|\ln|z||^{\alpha_1}$, $|z| \to 0$, где постоянная c не зависит от z, и

$\Big($с учетом $\frac{15}{16}|z| \leqslant r_k \leqslant \frac{17}{16}|z|$ и того, что из условия $\ln \rho_j / \ln r_j \to 1$, $j \to \infty$, следует $(\ln r_j - \ln \rho_j) = o(|\ln r_j|)$, $j \to \infty\Big)$ $\ln \frac{|z|}{\rho_k} = o(|\ln|z||)$ при $|z| \to 0$ и mex $z \in (\mathbb{C} \setminus \gamma) \setminus K$, для которых существует $a_k \in \gamma_i$, то

$$\left| \operatorname{Re} \int\limits_{A_1} \frac{n(|t|) - u(|t|)}{t - z}\, dt \right| \leqslant c |\ln|z||^{\alpha_0}, \quad |z| \to 0, \; z \in (\mathbb{C} \setminus \gamma) \setminus K, \qquad (32)$$

где $\alpha_0 := \max\{\alpha_1 + 1, 2\alpha_1 + \alpha_2\}$, постоянная c не зависит от z.

Из (30) — (32) следует оценка $|\operatorname{Re} I_2| \leqslant c |\ln|z||^{\mu}$, $z \to 0$, $z \in (\mathbb{C} \setminus \gamma) \setminus K$, где постоянная c не зависит от z.

Из полученных для $\operatorname{Re} I_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, оценок следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Обозначим через $\Gamma^*_{\beta_1,\alpha}$ класс кривых $\gamma \in \Gamma_{\beta_1,\alpha}$, для которых в (5) $\beta_1 < 3/2$ и ψ — функция модуля точки кривой γ, т. е. $\psi(t) := \psi_*(|t|)$ $\forall t \in \gamma$; $\Gamma^\delta_{\beta_1,\alpha}$ — класс кривых $\gamma \in \Gamma^*_{\beta_1,\alpha}$, для которых функция ψ_* удовлетворяет условию

$$\sup_{s \in \left[\frac{3}{4} r, \frac{5}{4} r\right]} \left| \frac{\psi_*(s) - \psi_*(r)}{s - r} \right| = O(r^{-1} |\ln r|^{\delta}), \quad r \to 0, \; \beta_0 - 1 \leqslant \delta < 2 - \beta_0. \quad (33)$$

Класс $\Gamma^\delta_{\beta_1,\alpha}$ при $\alpha \geqslant 1$ содержит, в частности, образы при отображении $\xi = 1/z$ гладких разомкнутых жордановых бесконечных контуров Дини — Липшица, рассмотренных в [3].

Перейдем к решению НКЗР (1) на кривой $\gamma \in \Gamma^\delta_{\beta_1,\alpha}$ в случае, когда $G(t) = \exp f(t)$ $\forall t \in \gamma$, $\operatorname{Im} f(t) = \varphi(t) |\ln|t||^{\alpha}$ $\forall t \in \gamma$, $\varphi \in K_0^{\beta_0 - 1}(1 - \beta_0 - \alpha, 1 - \alpha)$, $\varphi(0) \neq 0$, $\varphi(x_1) \geqslant 0$, $h(t) := \operatorname{Re} f(t) \in K_0^{\beta_0 - 1}(1 - \beta_0, 1)$, $\Delta_f(0) = \pm\infty$.

Прежде всего, построим целую функцию F_0, для которой

$$\ln \left| F_0\left(\frac{1}{x}\right) \right| = -\operatorname{Re} \tilde{f}^+(x) + o(|\ln|x||), \quad x \to x_0, \; x \in \gamma, \qquad (34)$$

в случае $\Delta_f(0) = +\infty$ или же

$$\ln \left| F_0\left(\frac{1}{x}\right) \right| = \operatorname{Re} \tilde{f}^+(x) + o(|\ln|x||), \quad x \to x_0, \; x \in \gamma, \qquad (35)$$

в случае $\Delta_f(0) = -\infty$.

Обозначим через $\gamma_\theta := \{t = x \exp(i\theta) : x \in \gamma, \; 0 < \theta < 2\pi\}$. Считаем, что γ_θ ориентирована в направлении от точки 0 ко второму своему концу.

В силу леммы 4 [1] имеет место соотношение (16). Нетрудно убедиться, что для входящей в него функции $P_\alpha\left(\ln \frac{1}{z}\right)$ справедливо асимптотическое равенство

$$P_\alpha\left(\ln \frac{1}{z}\right) = (b_0)^{-\nu_0} \frac{1}{\nu_0 + 1} |\ln|z||^{\alpha + \beta_0} + \sum_{j=1}^{P} A_j(\alpha, \{\beta_k\}_{k=1}^n, \{b_k\}_{k=1}^n, \theta) \times$$
$$\times |\ln|z||^{\mu_j^\alpha} + o(|\ln|z||), \quad z \to 0, \; z \in \gamma_\theta, \; 0 < \theta < 2\pi,$$

в котором $\mu_1^\alpha > \mu_2^\alpha > \ldots > \mu_P^\alpha$, μ_j^α, $j = 1, 2, \ldots, P$, — числа $\alpha_m + (1 - k)\beta_0$ меньше $\alpha + \beta_0$ и не меньше 1, где α_m, $m = 1, 2, \ldots, p$, определены в доказательстве леммы 1 [1], $k = 0, 1, \ldots$.

Коэффициенты $A_j(\alpha, \{\beta_k\}_{k=1}^n, \{b_k\}_{k=1}^n, \theta)$ являются непрерывными функциями от θ и имеют односторонние пределы при $\theta \to 0 + 0$ и $\theta \to 2\pi - 0$. В дальнейшем коэффициенты такого вида будем обозначать A_j^θ, поскольку зависимость их от других величин не оказывает влияния на дальнейшие рассуждения.

В силу изложенного выше, соотношения (17) и леммы 5 [1] имеем

$$\operatorname{Re}\int_{\gamma}\frac{|\ln|t||^{\alpha}}{t-z}\,dt=\operatorname{Re}P_{\alpha}\left(\ln\frac{1}{z}\right)+o(|\ln|z||)=\frac{1}{\alpha+1}|\ln|z||^{\alpha+1}+$$

$$+\sum_{j:\mu_j^{\alpha}<\alpha+1}B_j^{\theta}|\ln|z||^{\mu_j^{\alpha}}+o(|\ln|z||),\quad z\to0,\ z\in\gamma_{\theta},\ 0<\theta<2\pi,\tag{36}$$

где $B_j^{\alpha}:=\operatorname{Re}A_j^{\alpha}$. Отсюда и из соотношения (16) следует асимптотическое равенство

$$\operatorname{Re}\tilde{f}(z)=-\frac{h(0)}{2\pi}\sum_{\substack{k:\beta_k\geqslant1\\k\geqslant1}}b_k|\ln|z||^{\beta_k}+\frac{\varphi(0)}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha+1}|\ln|z||^{\alpha+1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j:\mu_j^{\alpha}<\alpha+1}B_j^{\theta}|\ln|z||^{\mu_j^{\alpha}}\right)+o(|\ln|z||),\quad z\to0,\ z\in\gamma_{\theta},\ 0<\theta<2\pi,$$

из которого следует

$$\operatorname{Re}\tilde{f}^{+}(x)=-\frac{h(0)}{2\pi}\sum_{\substack{k:\beta_k\geqslant1\\k\geqslant1}}b_k|\ln|x||^{\beta_k}+\frac{\varphi(0)}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha+1}|\ln|x||^{\alpha+1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j:\mu_j^{\alpha}<\alpha+1}B_j|\ln|x||^{\mu_j^{\alpha}}\right)+o(|\ln|x||),\quad x\to0,\ x\in\gamma,\tag{37}$$

где $B_j:=\lim\limits_{\theta\to0+0}B_j^{\theta}$.

Запишем несколько соотношений, которые понадобятся в дальнейшем. Подставляя в (36) $\mu_k^{\alpha}-1$ вместо α и учитывая вид чисел μ_j^{α}, получаем соотношение вида

$$\operatorname{Re}\int_{\gamma}\frac{|\ln|t||^{\mu_k^{\alpha}-1}}{t-z}\,dt=\frac{1}{\mu_k^{\alpha}}|\ln|z||^{\mu_k^{\alpha}}+\sum_{j:\mu_j^{\alpha}<\mu_k^{\alpha}}B_{k,j}^{\theta}|\ln|z||^{\mu_j^{\alpha}}+$$

$$+o(|\ln|z||),\quad z\to0,\ z\in\gamma_{\theta},\ 0<\theta<2\pi,\quad\forall\,\mu_k^{\alpha}<\alpha+1.\tag{38}$$

При $\beta_1\geqslant1$ подставим в (36) β_1-1 вместо α, при этом обозначим $\mu_j^{\beta}:=\mu_j^{\beta_1-1}$, $j=1,2,\ldots$. Вспоминая, как в зависимости от α образовывались числа μ_j^{α}, замечаем, что среди чисел μ_j^{β} есть все $\beta_k\geqslant1$. Таким образом, при $\beta_1\geqslant1$ имеем асимптотическое равенство вида

$$\operatorname{Re}\int_{\gamma}\frac{|\ln|t||^{\beta_1-1}}{t-z}\,dt=\frac{1}{\beta_1}|\ln|z||^{\beta_1}+\sum_{j:1\leqslant\mu_j^{\beta}<\beta_1}C_j^{\theta}|\ln|z||^{\mu_j^{\beta}}+o(|\ln|z||),$$

$$z\to0,\ z\in\gamma_{\theta},\ 0<\theta<2\pi.\tag{39}$$

Подставляя в (39) $\mu_k^{\beta}-1$ вместо β_1-1 и учитывая вид чисел μ_j^{β}, получаем соотношения вида

$$\operatorname{Re}\int_{\gamma}\frac{|\ln|t||^{\mu_k^{\beta}-1}}{t-z}\,dt=\frac{1}{\mu_k^{\beta}}|\ln|z||^{\mu_k^{\beta}}+\sum_{j:1\leqslant\mu_j^{\beta}<\mu_k^{\beta}}C_{k,j}^{\theta}|\ln|z||^{\mu_j^{\beta}}+o(|\ln|z||),$$

$$z\to0,\ z\in\gamma_{\theta},\ 0<\theta<2\pi.\tag{40}$$

Перейдем к построению целой функции F_0 с указанными выше свойствами. Будем искать F_0 в форме

$$F_0(\zeta)=\left(1-\frac{\zeta}{a_0}\right)^N\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta}{a_k}\right),\qquad a_k=\frac{1}{r_k}\exp(-i(\operatorname{Arg}_\gamma r_k+\pi)),$$

$k=0,1,\ldots,\ \frac{1}{2}|x_1|\geqslant r_0>r_1>\ldots>0$, N и r_k подлежат определению.

Введем в рассмотрение функцию

$$u(r)=c_0|\ln r|^{\alpha}+\sum_{j:\mu_j^\alpha<\alpha+1}c_j|\ln r|^{\mu_j^\alpha-1}+d_0|\ln r|^{\beta_1-1}+$$

$$+\sum_{j:1\leqslant\mu_j^\beta<\beta_1}d_j|\ln r|^{\mu_j^\beta-1}\quad\forall r\in(0,|x_1|],\tag{41}$$

где μ_j^α, μ_j^β — те же, что и в соотношениях (36) — (40), коэффициенты при степенях $|\ln r|$ подлежат определению. При этом предполагается, что коэффициент при слагаемом с наибольшим показателем степени при $|\ln r|$ положителен, d_0 и все d_j равны нулю при $\beta_1<1$.

По функции u находится промежуток $(0,a]$, на котором u монотонно убывает, и определяются N и r_k, $k=0,1,\ldots$, так же, как и в условии леммы 1. Таким образом, пока не определены коэффициенты c_0, c_j, d_0, d_j в равенстве (41).

Аналогично теореме 3 [4] устанавливается равенство

$$F_0\left(\frac{1}{z}\right)=\exp\left(\int_{\gamma_\pi}\frac{n(|t|)}{t-z}dt\right),\tag{42}$$

где $n(r)$ — число нулей функции F_0 в круге $K_{1/r}(0)$, а именно: $n(r)=0$ при $r>r_0$ и $n(r)=N+k$ при $r\in(r_{k+1},r_k]$, $k=0,1,\ldots$.

Кроме того, при $x\in\gamma$ и $|x|<r_0/2$, обозначая через $\Gamma_x:=\gamma_{\frac{1}{16}|x|}(-x)$, $\Gamma_1:=\gamma_{2|x|}(0)\setminus\Gamma_x$, $\Gamma_2:=\gamma_{r_0}(0)\setminus\gamma_{2|x|}(0)$, имеем

$$\int_{\gamma_\pi}\frac{n(|t|)}{t-x}dt=\int_{\gamma_{r_0}(0)}\frac{n(|t|)}{t+x}dt=\int_{\Gamma_1}\frac{n(|t|)-u(|t|)}{t+x}dt+\int_{\Gamma_x}\frac{n(|t|)-u(|t|)}{t+x}dt-$$

$$-x\int_{\Gamma_2}\frac{n(|t|)-u(|t|)}{t(t+x)}dt+\int_{\Gamma_2}\frac{n(|t|)-u(|t|)}{t}dt+\int_{\gamma_{r_0}(0)}\frac{u(|t|)}{t+x}dt=:$$

$$=:\sum_{j=1}^{5}I_j.\tag{43}$$

Так же, как в доказательстве леммы 1 $|I_1|+|I_3|+|\operatorname{Re}I_4|\leqslant\leqslant c|\ln|x||^{\beta_0-1}$, где постоянная c не зависит от x. С учетом (33) нетрудно показать, что при $x\in\gamma$, $|x|\to0$, справедливо неравенство $|t+x|\geqslant\geqslant c|x||\ln|x||^{-\delta}\ \forall t\in\Gamma_x$, где постоянная $c>0$ не зависит от t и x. Тогда

$$|I_2|\leqslant\frac{c}{|x|}|\ln|x||^{\delta}\int_{\Gamma_x}|dt|\leqslant c|\ln|x||^{\delta+\beta_0-1},\ |x|\to0,\ x\in\gamma,$$

где постоянные c не зависят от x.

Учитывая равенство (41), соотношения (36), (38) — (40), в которых следует положить $\theta=\pi$, и обозначая $C_{j,0}^\pi:=C_j^\pi$, $B_{j,0}^\pi:=B_j^\pi$, получаем

$$\operatorname{Re}I_5=\operatorname{Re}\int_\gamma\frac{u(|t|)}{t-(-x)}dt+\operatorname{Re}\int_{\gamma\setminus\gamma r_0(0)}\frac{u(|t|)}{t+x}dt=\frac{c_0}{\alpha+1}|\ln|x||^{\alpha+1}+$$

$$+\sum_{j:\mu_j^\alpha<\alpha+1}\left(\sum_{i=0}^{j-1}c_iB_{i,j}^\pi+\frac{c_j}{\mu_i^\alpha}\right)|\ln|x||^{\mu_j^\alpha}+\frac{d_0}{\beta_1}|\ln|x||^{\beta_1}+$$

$$+\sum_{j:1\leqslant\mu_j^\beta\leqslant\beta_1}\left(\sum_{i=0}^{j-1}d_iC_{i,j}^\pi+\frac{d_j}{\mu_i^\beta}\right)|\ln|x||^{\mu_j^\beta}+o(|\ln|x||),\ |x|\to0,\ x\in\gamma. \quad (44)$$

Учитывая равенства (42), (43), полученные оценки для $|I_1|$, $|I_2|$, $|I_3|$ $\operatorname{Re} I_4$, соотношения (34), (35), (37), (44), находим

$$c_0=\mp\frac{\varphi(0)}{2\pi},$$

$$c_j=\mu_j^\alpha\left(\mp\frac{\varphi(0)}{2\pi}B_j-\sum_{i=0}^{j-1}c_jB_{i,j}^\pi\right)\forall_j:\mu_j^\alpha<\alpha+1, \quad (45)$$

$$d_0=\pm\frac{h(0)}{2\pi}b_1 \text{ при } \beta_1\geqslant1,\ d_0=0 \text{ при } \beta_1<0,$$

$$d_j=\mu_j^\beta\left(\pm\frac{h(0)}{2\pi}b_{k_j}-\sum_{i=0}^{j-1}d_iC_{i,j}^\pi\right)\forall_j:\mu_j^\beta<\beta_1,\ \mu_j^\beta=\beta_{k_j}\geqslant1,$$

$$d_j=-\mu_j^\beta\sum_{i=0}^{j-1}d_iC_{i,j}^\pi\ \forall_j:1\leqslant\mu_j^\beta<\beta_1,\ \mu_j^\beta\neq\beta_k\ \forall\beta_k,$$

где верхние знаки соответствуют случаю $\Delta_f(0)=+\infty$, а нижние — случаю $\Delta_f(0)=-\infty$. Функция F_0 построена.

Обозначим через K_1^ν класс функций $\varphi\in C_{\gamma\setminus T}$, удовлетворяющих соотношению (3) и соотношениям

$$|\varphi(x)|\leqslant c(r_x)^\mu\ \forall x\in\gamma\setminus T,$$

$$\int_0^{r_x}\frac{\omega_x(\varphi,\gamma,y,2y)}{y}dy\leqslant c|x-x_1|^\mu,\ x\to x_1,\ x\in\gamma\setminus T,$$

$$\int_0^{r_x}\frac{\omega_x(\varphi,\gamma,y,2y)}{y}|\ln y|^\nu dy\leqslant c|x|^\mu,\ x\to0,\ x\in\gamma\setminus T,$$

в которых $\mu>-1$, постоянные c не зависят от x.

Теперь с учетом леммы 1 аналогично теоремам 2 [2], 1 [5] докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\gamma\in\Gamma_{\beta_1,\alpha}^0$; $\operatorname{Im} f(t)=\varphi(t)|\ln|t||^\alpha\ \forall t\in\gamma, \varphi\in K_0^{\beta_0-1}(1-\beta_0-\alpha,\ 1-\alpha)$, $\varphi(0)\neq0$, $\varphi(x_1)\geqslant0$; $h(t):=\operatorname{Re} f(t)\in K_0^{\beta_0-1}(1-\beta_0,1)$; $g\in K_1^{\beta_0-1}$. *Тогда если* $\Delta_f(0)=+\infty$, *то НКЗР разрешима и ее общее решение имеет вид*

$$\Phi(z)=\frac{X(z)F_0\left(\frac{1}{z}\right)}{2\pi i}\int_\gamma\frac{g(t)}{F_0\left(\frac{1}{t}\right)X^+(t)}\frac{dt}{t-z}+F\left(\frac{1}{z}\right)X(z)\quad\forall z\in\mathbb{C}\setminus\gamma,$$

где

1) $F_0(\xi)=\left(1-\frac{\xi}{a_0}\right)^N\prod_{k=1}^\infty\left(1-\frac{\xi}{a_k}\right)$; $a_k=\frac{1}{r_k}\exp(-i(\operatorname{Arg}_\gamma r_k+\pi))$,

$$k = 0, 1, \dots;$$

$$r_k = \frac{(R_k)^{N+k}}{(R_{k-1})^{N+k-1}} \exp\left(\int\limits_{R_k}^{R_{k-1}} \frac{u(t)}{t}\,dt\right),\ k = 1, 2, \dots .$$

Функция и определяется формулой (41), *где* c_0, c_j, d_0, $\mathbf{d}_j$ *определяются равенствами* (45), *в которых выбираются верхние знаки,* B_j — *те же, что в соотношении* (37), $B^{\pi}_{i,j}$ *и* $C^{\pi}_{i,j}$ — *те же, что в соотношениях* (36), (38) — (40) *при* $\theta = \pi$ *и* $B^{\pi}_{i,0} := B^{\pi}_{i}$, $C^{\pi}_{i,0} := C^{\pi}_{i}$; R_k, $k = 0, 1, \dots,$ — *решение уравнения* $u(R_k) = N + k$ *такое, что* $R_k < R_0 =: r_0 < |x_1|$, *и убывает на* $(0, R_0]$ *и* $(\gamma \cap \gamma_\pi) \cap K_{R_0}(0) = \varnothing$; N — *натуральное число;*

2) $X(z) = (z - x_1)^{-\varkappa_1} \exp(\widetilde{f}(z))\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, *где* $\varkappa_1 := \Delta_f(x_1)$, *если* $\Delta_f(x_1)$ *целое, и* $\varkappa_1 := [\Delta_f(x_1)] + 1$ *в противном случае;*

3) F — *целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая соотношению* (26).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия, изложенные в первом предложении теоремы 1. Тогда если* $\Delta_f(0) = -\infty$, *то для разрешимости НКЗР необходимо и достаточно выполнение счетного числа условий*

$$\int\limits_{\gamma} \frac{F_0\left(\frac{1}{t}\right) g(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{t - 1/a_k} = A = \text{const},\ k = 0, 1, \dots,$$

$$\int\limits_{\gamma} \frac{F_0\left(\frac{1}{t}\right) g(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{(t - 1/a_0)^n} = 0,\ n = 2, 3, \dots, N,$$

где X *и* F_0 *определяются так же, как в теореме 1, лишь в равенствах* (45) *вывыбираются нижние знаки. При выполнении этих условий решение НКЗР единственно и определяется формулой*

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i F_0\left(\frac{1}{z}\right)} \left(\int\limits_{\gamma} \frac{F_0\left(\frac{1}{t}\right) g(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{t - z} - A \right) \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma.$$

Замечания. 1. В теоремах 1, 2 при $\alpha \geqslant 1$ класс $\Gamma^{\delta}_{\beta_1,\alpha}$ можно заменить классом $\Gamma^{*}_{0,\alpha}$.

2. По изложенной выше схеме рассматривается НКЗР (1), если $\beta_1 \leqslant 3/2$ (см. определение класса $\Gamma^{*}_{\beta_1,\alpha}$) и $\beta_0 - 1 \leqslant \delta \leqslant 2 - \beta_0$ в условии (33). В этом случае разрешимость НКЗР полностью описывается после введения чисел вида $\varkappa^+$ из [2] и $\varkappa^-$ из [5], при определении которых следует положить $\nu = 1$.

3. Схема решения КЗР (1), изложенная в данной статье и в [1], опубликована в препринте [6], при этом в [6] некоторые леммы лишь анонсированы. Кроме того, теоремы 1, 2 обобщают соответственно теоремы 3.1, 3.2 [6], поскольку условие (33) слабее условия (3.1) из [6].

1. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на спиралеобразном контуре. I // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 11.— С. 1509—1517.
2. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана с плюс-бесконечным индексом на спрямляемой кривой // Там же.— № 9.— С. 1204—1213.
3. *Юров П. Г.* Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $\alpha \geqslant 1$ // Материалы Всесоюз. конф. по краевым задачам (Казань, 28—31 мая 1969 г.).— Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1970.— С. 279—284.

4. *Монахов В. Н., Семенко Е. В.* О корректных постановках краевых задач сопряжения с бесконечным индексом для квазианалитических функций // Некорректные задачи математической физики и анализа.— Новосибирск : Наука, 1984.— С. 91—101.
5. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана с минус-бесконечным индексом на спрямляемой кривой // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 10.— С. 1350—1356.
6. *Плакса С. А.* Краевые задачи с бесконечным индексом на спрямляемых кривых.— Киев, 1989.— 43 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.06).

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 05.02.90