УДК 517.984.48

Г. В. Радзиевский

Минимальность производных цепочек, отвечающих краевой задаче на конечном отрезке

Изучена минимальность производных цепочек, построенных по корневым векторам полиномиальных пучков операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Подробно исследован квадратичный пучок операторов. В частности, для $L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2$ с ограниченными операторами $L_0 \geqslant 0$, $L_2 \leqslant 0$ и $\operatorname{Re} L_1 \geqslant 0$ показана минимальность в пространстве $\mathfrak{H}^2$ системы $\{x_k, \mu_k e^{\mu_k} x_k\}$, где x_k — собственные векторы $L(\lambda)$, отвечающие характеристическим числам μ_k, в проколотых окрестностях которых справедливо представление $L^{-1}(\lambda) = (\lambda - \mu_k)^{-1} R_k + W_k(\lambda)$ с одномерными операторами R_k и аналитическими при $\lambda = \mu_k$ оператор-функциями $W_k(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Вивчена мінімальність похідних ланцюжків, побудованих по кореневих векторах поліноміальних жмутків операторів, діючих у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. Вивчений квадратичний пучок операторів. Зокрема, для $L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2$ з обмеженими операторами $L_0 \geqslant 0$, $L_2 \leqslant 0$ и $\operatorname{Re} L_1 \geqslant 0$ показана мінімальність у просторі $\mathfrak{H}^2$ системи векторів $\{x_k, \mu_k e^{\mu_k} x_k\}$, де x_k — власні вектори $L(\lambda)$, відповідні характеристичним числам μ_k, в проколених околах яких справедливе представлення $L^{-1}(\lambda) = (\lambda - \mu_k)^{-1} R_k + W_k(\lambda)$ з одновимірними операторами R_k і аналітичними при $\lambda = \mu_k$ оператор-функціями $W_k(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots$.

В настоящей статье из результатов статьи [1] выводятся признаки минимальности производных цепочек, отвечающих краевой задаче на конечном отрезке для операторно-дифференциального уравнения, символом которого является исследуемый пучок операторов. Далее используются те же определения и обозначения, что и в [1], а при ссылках на формулы и утверждения из [1] применяется двойная нумерация. Например, формула (I.7) или теорема I.3 означают, соответственно, формулу (7) или теорему 3 из статьи [1]. Так как признаки минимальности производных цепочек, отвечающих краевой задаче на конечном отрезке, выводятся из результатов статьи [1] с использованием признаков минимальности производных по Келдышу цепочек (т. е., отвечающих задаче Коши), то вначале сформулируем необходимые понятия и утверждения, относящиеся к случаю производных по Келдышу цепочек. Отметим, что далее, за исключением п. 3 и леммы 3 из п. 1, рассматриваются линейные ограниченные операторы.

1. Минимальность производных по Келдышу цепочек. Введем восходящее к М. В. Келдышу [2; 3, с. 19] понятие канонической системы. Рассмотрим аналитическую в области Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}$ оператор-функцию $L(\lambda)$ со значениями в $[\mathfrak{H}]$. Каждому собственному вектору x_0 оператор-функции $L(\lambda)$ поставим в соответствие число d, равное максимальному порядку присоединенных к x_0 элементов. Число $d + 1$ называется *кратностью собственного вектора* x_0. Пусть все собственные векторы $L(\lambda)$, отвечающие характеристическому числу μ, имеют конечные кратности, ограниченные в совокупности одним и тем же числом, а $\dim \mathfrak{Z}(L(\lambda)) < \infty$. Тогда определена *каноническая система корневых векторов*, отвечающая характеристическому числу μ оператор-функции $L(\lambda)$, т. е. система элементов $x_{0,j}, \ldots, x_{d_j,j}$, $j = \overline{1, \dim \mathfrak{Z}(L(\mu))}$, обладающая следующими свойствами: 1) вектор $x_{0,j}$ — собственный, а $x_{1,j}, \ldots, x_{d_j,j}$ — присоединенные к нему векторы; 2) кратность собственного вектора $x_{0,1}$ достигает возможного максимума $d_1 + 1$ среди всех собственных векторов, отвечающих характеристическому числу μ; 3) кратность собственного вектора $x_{0,j}$ при $j > 1$ достигает возможного максимума $d_j + 1$ среди всех собственных векторов, не выражающихся линейно через элементы $x_{0,1}, \ldots, x_{0,j-1}$.

Спектром $\sigma(L(\lambda))$ оператор-функции $L(\lambda)$ называется множество тех значений $\mu \in \Omega$, при которых оператор $L(\mu)$ не имеет ограниченного обратного. Число $\mu \in \sigma(L(\lambda))$ назовем *дискретной точкой спектра* $L(\lambda)$, если оператор-функция $L(\lambda)$ обратима в некоторой проколотой окрестности точки μ и в этой окрестности

$$L^{-1}(\lambda) = \sum_{h=0}^{p} (\lambda - \mu)^{-h-1} R_{p-h} + W(\lambda) \tag{1}$$

с аналитической в точке μ оператор-функцией $W(\lambda)$ и с конечномерными операторами R_h при $h = \overline{0, p}$, причем $R_0 \neq 0$. Введенное здесь понятие дискретной точки спектра аналогично соответствующему понятию для линейных операторов из [4, с. 237].

Лемма 1. [5, лемма 11]. *Если μ — дикретная точка спектра оператор-функции $L(\lambda)$, то μ является характеристическим числом $L(\lambda)$, причем кратность любого собственного вектора, отвечающего характеристическому числу μ оператор-функции $L(\lambda)$, не превышает $p+1$, где p из представления (1). Кроме того, область значений оператора $L(\mu)$-замкнута и имеет конечную коразмерность, а ядро его — конечномерно.*

Доказательство. Так как оператор $R_0 \neq 0$, то найдется такой вектор f, что $R_0 f \neq 0$. В силу представления (1) в окрестности точки μ выполнено соотношение $\left\| L(\lambda) \sum_{h=0}^{p} (\lambda - \mu)^h R_h f \right\| = O(|\lambda - \mu|^{p+1})$. Следовательно, вектор $R_0 f$ — собственный, а $R_1 f, \dots, R_p f$ — цепочка присоединенных векторов, отвечающая характеристическому числу μ оператор-функции $L(\lambda)$.

Пусть $x_0, \dots, x_d$ — произвольная цепочка корневых векторов, отвечающая характеристическому числу μ. Положим вектор-функцию $f(\lambda) = L(\lambda) \sum_{h=0}^{d} (\lambda - \mu)^{-d+h-1} x_h$, которая, на основании определения цепочек корневых векторов, аналитически продолжается в точку μ. Отсюда и из равенства (1) вытекает, что порядок полюса вектор-функции $L^{-1}(\lambda) f(\lambda)$ не выше $p+1$, а из определения $f(\lambda)$ видно, что порядок этого полюса равен $d+1$. Значит, $d \leqslant p$, т. е. кратность любого собственного вектора не превышает $p+1$.

Установим теперь последнее утверждение леммы. В силу конечномерности операторов R_h из представления (1) операторы

$$K_1 = \sum_{h=0}^{p} \frac{1}{(h+1)!} L^{(h+1)}(\mu) R_{p-h}, \quad K_2 = \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{(h+1)!} R_{p-h} L^{(h+1)}(\mu)$$

конечномерны, и справедливы равенства $L(\mu) W(\mu) = I - K_1$ и $W(\mu) L(\mu) = I - K_2$. Поэтому $\mathfrak{R}(L(\mu)) \supseteq \mathfrak{R}(I - K_1)$ и $\mathfrak{Z}(L(\mu)) \subseteq \mathfrak{Z}(I - K_2)$. Но для конечномерного оператора K линейное многообразие $\mathfrak{R}(I - K)$ замкнуто и имеет конечную коразмерность в $\mathfrak{H}$, а $\dim \mathfrak{Z}(I - K) < \infty$. Отсюда вытекает замкнутость $\mathfrak{R}(L(\mu))$, соотношение $\operatorname{codim} \mathfrak{R}(L(\mu)) < \infty$ и $\dim \mathfrak{Z}(L(\mu)) < \infty$. Тем самым лемма 1 доказана.

Число дискретных точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$ не более чем счетно. Обозначим эти дискретные точки спектра через μ_k, где $k = 1, 2, \dots$. Из леммы 1 заключаем, что каждая дискретная точка спектра μ_k является характеристическим числом и для него существует каноническая система корневых векторов $x_{0,j,k}, \dots, x_{d_{j,k},j,k}$, $j = \overline{1, \dim \mathfrak{Z}(L(\mu_k))}$. Множество мультииндексов (h, j, k), нумерующих элементы $x_{h,j,k}$, входящие в эти канонические системы корневых векторов оператор-функции $L(\lambda)$, которые отвечают характеристическим числам μ_k, принадлежащим некоторому множеству Ω, обозначим символом $\Lambda(L, \Omega)$. Далее, когда формулируются свойства, относящиеся к системам векторов $x_{h,j,k}(Q_1(\mu), \dots, Q_m(\mu))$ при мультииндексах $(h, j, k) \in \Lambda(L, \Omega)$, считается, что эти векторы построены по правилам (I.2) и (I.3) по каноническим системам $x_{0,j,k}, \dots, x_{d_{j,k},j,k}$, $j = \overline{1, \dim \mathfrak{Z}(L(\mu_k))}$, отвечающим дискретным точкам спектра $\mu_k \in \Omega$ оператор-функции $L(\lambda)$.

Введем также множество мультииндексов $\Lambda_q(L, \mu)$. Пусть μ_k — дискретная точка спектра, пронумерованная индексом k. Тогда через $\Lambda_q(L, \mu_k)$ обозначим множество мультииндексов $(h, j, k) \in \Lambda(L, \mu_k)$, для которых $h \leqslant q$, а $j = \overline{1, \dim \mathfrak{Z}(L(\mu_k))}$. Если $q < 0$ или μ_k не является дискретной точкой спектра, то полагаем $\Lambda_q(L, \mu_k) = \{\varnothing\}$.

Рассмотрим оператор-функцию

$$L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \ldots + \lambda^n L_n \tag{2}$$

с операторами $L_v \in [\mathfrak{H}]$. Для произвольного $q = \overline{1, n}$ введем действующие в пространстве $\mathfrak{H}^q$ операторы

$$\tilde{M}_q = \{L_{v-s}\}_{s,v=1}^q, \quad \tilde{N}_q = \{L_{n-q+s+v-1}\}_{s,v=1}^q, \tag{3}$$

считая $L_v = 0$, если $v < 0$ или $v > n$. При $q = 0$ полагаем $\operatorname{diag}^q I = \tilde{M}_q = \tilde{N}_q = 0$, а гильбертово пространство $\mathfrak{X}^q = \{0\}$, т. е. нульмерным пространством. В этих обозначениях справедлива лемма.

Лемма 2. *Для любых целых неотрицательных p и q таких, что $p + q \leqslant n$, система векторов*

$$[\tilde{M}_p \oplus (\operatorname{diag}^q I) \oplus \tilde{N}_{n-p-q}]\, \tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \quad (h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C}) \setminus \Lambda_{p-1}(L, 0) \tag{4}$$

минимальна в пространстве $\mathfrak{X}^n$.

Доказательство. На основании результата М. В. Келдыша [2; 3, с. 25] существуют такие канонические системы корневых векторов $z_{0,u,v}, \ldots \ldots z_{d_{u,v},u,v}$, отвечающие характеристическим числам $\bar{\mu}_v$ оператор-функции $L^*(\bar{\lambda})$, что для вектор-функций

$$g_{r,u,v}(\lambda) = \sum_{s=0}^{r} (\lambda - \bar{\mu}_v)^{-s-1} z_{r-s,u,v} \tag{5}$$

выполнены равенства:

$$\sum_{s=0}^{h} \frac{1}{s!} \frac{d}{d\lambda^s} (x_{h-s,j,k},\ L^*(\lambda)\, g_{d_{u,v}-r,u,v}(\bar{\lambda}))|_{\lambda=\mu_k} = \delta_{h,r}\delta_{j,u}\delta_{k,v},$$
$$(h, j, k),\ (r, u, v) \in \Lambda(L, \mathbb{C}). \tag{6}$$

Заметим, что в силу определений цепочек корневых векторов и вектор-функций $g_{r,u,v}(\lambda)$ вектор-функция $L^*(\bar{\lambda})\, g_{r,u,v}(\lambda)$ аналитически продолжается в точку $\bar{\mu}_v$, а так как $L^*(\bar{\lambda})$ — операторнозначный полином степени n, то $\| L^*(\bar{\lambda})\, g_{r,u,v}(\lambda) \| \leqslant c\,(1 + |\lambda|)^{n-1}$ с независящей от $\lambda \in \mathbb{C}$ постоянной $c > 0$. Поэтому

$$L^*(\bar{\lambda})\, g_{r,u,v}(\lambda) = z^1_{r,u,v} + \lambda z^2_{r,u,v} + \ldots + \lambda^{n-1} z^n_{r,u,v}, \tag{7}$$

и, если положить векторы

$$\tilde{z}^n_{r,u,v} = \{z^1_{r,u,v},\ z^2_{r,u,v}, \ldots,\ z^n_{r,u,v}\} \tag{8}$$

из пространства $\mathfrak{H}^n$, то равенства (6) запишутся в виде

$$(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0),\ \tilde{z}^n_{d_{u,v}-r,u,v}) = \delta_{h,r}\delta_{j,u}\delta_{k,v}, \quad (h, j, k),\ (r, u, v) \in \Lambda(L, \mathbb{C}). \tag{9}$$

Вычислим векторные коэффициенты $z^j_{r,u,v}$ в тождестве (7). Для этого отметим, что вектор-функции $g_{r,u,v}(\lambda)$, заданные формулой (5), представимы в виде

$$g_{r,u,v}(\lambda) = \sum_{s=0}^{r} \frac{1}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \mu^s} \left(\frac{1}{\lambda - \mu} \right) |_{\mu=\bar{\mu}_k}\, z_{r-s,u,v}. \tag{10}$$

Тем самым в окрестности бесконечно уделенной точки справедливо разложение $g_{r,u,v}(\lambda)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^l}\sum_{s=0}^{r}\frac{1}{s!}\frac{d^s(\mu^{l-1})}{d\mu^s}\Big|_{\mu=\bar\mu_v} z_{r-s,u,v}=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^l}z_{r,u,v}(\mu^{l-1})$, в котором векторы $z_{r,u,v}(\mu^{l-1})$ строятся по правилу (I.2) по цепочке корневых векторов $z_{0,u,v},\ldots,z_{d_{u,v},u,v}$, отвечающей характеристическому числу $\bar\mu_v$ оператор-функции $L^*(\bar\lambda)$, причем $Q_l(\lambda)=\lambda^{l-1}I$. Подставляя это равенство в левую часть тождества (7) и приравнивая векторные коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях λ, имеем $z^l_{r,u,v}=\sum_{s=1}^{n-l+1}L^*_{l+s-1}\times$ $\times z_{r,u,v}(\mu^{s-1})$, т. е. вектор

$$\{z^{p+q+1}_{r,u,v},\ldots,z^n_{r,u,v}\}=\tilde N^*_{n-p-q}\tilde z^{n-p-q}_{r,u,v}(0),\quad (r,u,v)\in\Lambda(L,\mathbb{C}). \tag{11}$$

Если $\bar\mu_v\neq 0$, то из формулы (10) в окрестности нуля получаем разложение $g_{r,u,v}(\lambda)=\sum_{l=0}^{\infty}\lambda^l\frac{1}{l!}g^{(l)}_{r,u,v}(0)=-\sum_{l=0}^{\infty}\lambda^l z_{r,u,v}(\mu^{-l-1})$, подставляя которое в тождество (7), имеем $z^l_{r,u,v}=-\sum_{s=1}^{l}L^*_{l-s}z_{r,u,v}(\mu^{-s})$, т. е. вектор

$$\{z^1_{r,u,v},\ldots,z^p_{r,u,v}\}=-\tilde M^*_p z_{r,u,v}(\mu^{-1},\mu^{-2}\ldots,\mu^{-p}),\ (r,u,v)\in\Lambda(L,\mathbb{C}\setminus\{0\}). \tag{12}$$

Найдем теперь выражение этих векторов в случае, когда $\bar\mu_v=0$ Полагая в равенстве (5) число $\bar\mu_v=0$ и подставляя это равенство в левую часть тождества (7), приходим к формулам $\sum_{s=0}^{r}L^*_s z_{r-s,u,v}=0$ при $r=\overline{0,d_{u,v}}$ и $z_{l,u,v}=\sum_{s=1}^{r+1}L^*_{l+s-1}z_{r-s+1,u,v}$, в которых, как и раньше, $L_v=0$, если $v>n$.

Отсюда, когда $l+r\leqslant d_{u,v}$, заключаем, что $z^l_{r,u,v}=-\sum_{s=1}^{l}L^*_{l-s}z_{r+s,u,v}$, т. е.

$$\{z^1_{d_{u,v}-r,u,v},\ldots,z^p_{d_{u,v}-r,u,v}\}=-\tilde M^*_v\{z_{d_{u,v}-r+1,u,v},\ z_{d_{u,v}-r+2,u,v},\ldots$$
$$\ldots,z_{d_{u,v}-r+p,u,v}\}=-\tilde M^*_v z_{d_{u,v}-r+p,u,v}(\mu^p,\mu^{p-1},\ldots,1),$$
$$(r,u,v)\in\Lambda(L,0)\setminus\Lambda_{p-1}(L,0). \tag{13}$$

Из тождеств (8), (9), (11) — (13) вытекает утверждение леммы 2.

Если $p=q=0$, то утверждение леммы 2 совпадает с соответствующим результатом из статьи [6, с. 857 — 859]. Если же $p=n$, а $q=0$, то утверждение леммы 2 обобщает для оператора $L_0\neq I$ теорему 1 из [7]. При этом учитывается явный вид (11) или соответственно (12) сопряженной системы для системы $\tilde x^n_{h,j,k}(0)$ и равенства (8) и (9). Выражение же векторов $z_{r,u,v}(\mu^{-1},\ldots,\mu^{-p})$ через векторы $\tilde z^p_{r,u,v}(0)$ указано в доказательстве приведенной далее леммы 8.

Следующее утверждение относится к неограниченному оператору.

Лемма 3. *Пусть* $\operatorname{Im}(\nu Lx,x)\geqslant 0$ *для некоторого* $\nu\neq 0$ *и всех* $x\in\mathfrak{D}(L)$. *Тогда линейные многообразия* $\mathfrak{R}(L)$ *и* $\mathfrak{Z}(L)$ *ортогональны, а когда* $\operatorname{Im}(\nu Lx_0,x_0)=0$ *для некоторого* $x_0\in\mathfrak{D}(L)$, *то* $(\nu Lx_0,y)=(x_0,\nu Ly)$ *для всех* $y\in\mathfrak{D}(L)$. *Если же* $L\in[\mathfrak{H}]$, *то* $\mathfrak{Z}(L)=\mathfrak{Z}(L^*)$ *и* $\overline{\mathfrak{R}(L)}\oplus\mathfrak{Z}(L)=\mathfrak{H}$.

Доказательство. Введем полуторалинейную форму $\Phi(x,y)=$ $=i(x,\nu Ly)-i(\nu Lx,y)$ при x и $y\in\mathfrak{D}(L)$. Так как $\Phi(x,x)\geqslant 0$, то, применяя неравенство Коши — Буняковского, имеем $|\Phi(x,y)|^2\leqslant\Phi(x,x)\times$ $\times\Phi(y,y)$. Если $\operatorname{Im}(\nu Lx_0,x_0)=0$, в частности, когда $x_0\in\mathfrak{Z}(L)$, то $\Phi(x_0,x_0)=$

$= 0$, поэтому $\Phi(x_0, y) = 0$, т. е. $(\nu L x_0, y) = (x_0, \nu L y)$ для всех $y \in \mathfrak{D}(L)$. Значит, $(x_0, Ly) = 0$ при $x_0 \in \mathfrak{Z}(L)$ и $y \in \mathfrak{D}(L)$, что и показывает ортогональность многообразий $\mathfrak{R}(L)$ и $\mathfrak{Z}(L)$. Если же L — произвольный ограниченный оператор, то $\overline{\mathfrak{R}(L)} \oplus \mathfrak{Z}(L^*) = \mathfrak{H}$, откуда, учитывая ортогональность $\overline{\mathfrak{R}(L)}$ и $\mathfrak{Z}(L)$, получаем включение $\mathfrak{Z}(L) \subseteq \mathfrak{Z}(L^*)$. Но оператор L^* удовлетворяет требованиям леммы 3, следовательно, $\mathfrak{Z}(L^*) \subseteq \mathfrak{Z}(L)$, т. е. $\mathfrak{Z}(L) = \mathfrak{Z}(L^*)$.

Если $\operatorname{Im}(\nu L x, x) \geqslant 0$ для некоторого $\nu \neq 0$ и всех $x \in \mathfrak{D}(L)$, то через L^0 обозначим ортопроектор на $\overline{\mathfrak{R}(L)}$.

Лемма 4. *Если 0 — дискретная точка спектра оператор-функции* (2), *у которой оператор* $\operatorname{Im} \nu L_0 \geqslant 0$ *для некоторого* $\nu \neq 0$, *то оператор* $L_0 + I - L_0^0$ *обратим.*

Доказательство. На основании лемм 1 и 3, $\mathfrak{R}(L_0 + I - L_0^0) = \mathfrak{H}$, а $\mathfrak{Z}(L_0 + I - L_0^0) = \{0\}$, откуда, по теореме Банаха, получаем утверждение леммы.

Лемма 5. *Пусть у оператор-функции* (2) *оператор* $\operatorname{Im} \nu L_0 \geqslant 0$, *а* $L_1 = \tau I$ *для некоторых неравных нулю комплексных* ν *и* τ. *Тогда, если* $\mathfrak{Z}(L_0) \neq \{0\}$, *то у произвольного собственного вектора* $x_0 \in \mathfrak{Z}(L_0)$, *отвечающего характеристическому числу* 0 *оператор-функции* $L(\lambda)$, *нет присоединенных элементов.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть у собственного вектора $x_0 \in \mathfrak{Z}(L_0) = \mathfrak{Z}(L_0^*)$ имеется присоединенный элемент x_1. Тогда $L_0 x_1 + L_1 x_0 = 0$, откуда и из условия $L_1 = \tau I$ имеем $0 = (L_0 x_1 + L_1 x_0, x_0) = \tau(x_0, x_0)$. Значит, $x_0 = 0$, что противоречит определению собственного вектора, который всегда неравен нулю.

Для оператор-функции $L(\lambda)$, удовлетворяющей условию леммы 5, может оказаться, что 0 является характеристическим числом, но не является дискретной точкой спектра. Оказывается, что в этом случае утверждение леммы 2 при $p = 1$ допускает обобщение в том смысле, что в минимальную систему (4) можно включить и производные по Келдышу векторы, отвечающие нулевому характеристическому числу. Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем обозначения. Через $\{x_{0,j,0}\}$ обозначим произвольную минимальную систему из $\mathfrak{Z}(L_0)$, а символом $\Lambda(L_0)$ обозначим множество мультииндексов $(0, j, 0)$, у которых индекс j изменяется от 1 до $\dim \mathfrak{Z}(L_0)$. Далее, если рассматриваются векторы $\tilde{x}^n_{h,j,k}(0)$ при $(h, j, k) \in \Lambda(L_0)$, то считается, что $h = k = 0$, а сами векторы $\tilde{x}^n_{0,j,0}(0) = x_{0,j,0} \oplus 0_{n-1}$, где 0_{n-1} — нулевой элемент пространства $\mathfrak{H}^{n-1}$, построены по какой-либо минимальной системе собственных векторов $x_{0,j,0}$ из $\mathfrak{Z}(L_0)$, отвечающей нулевому характеристическому числу. Отметим, что множества $\Lambda(L, \mathbb{C})$ и $\Lambda(L_0)$ не пересекаются, так как у мультииндексов $(h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C})$ индекс $k = 1, 2, \ldots$. В приведенных обозначениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть оператор-функция* (2) *удовлетворяет условиям леммы* 5. *Тогда для любого* $q = \overline{0, n-1}$ *система векторов* $[(L_0 + I - L_0^0) \oplus (\operatorname{diag}^q I) \oplus \tilde{N}_{n-q-1}]\, \tilde{x}^n_{h,j,k}(0)$ *при* $(h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \Lambda(L_0)$ *минимальна в пространстве* $\mathfrak{H}^n$.

Доказательство леммы 6 проведем используя обозначения, введенные в доказательстве леммы 2. Из минимальности системы векторов $\{x_{0,j,0}\} \in \mathfrak{Z}(L_0)$ вытекает существование такой системы элементов $\{z_{0,u,0}\} \in \mathfrak{Z}(L_0)$, для которой $\tau(x_{0,j,0}, z_{0,u,0}) = \delta_{j,u}$. На основании леммы 3 элементы $x_{0,j,0}$ и $z_{0,u,0}$ являются одновременно собственными векторами, отвечающими характеристическому числу 0 как оператор-функции $L(\lambda)$, так и оператор-функции $L^*(\bar{\lambda})$. Поэтому

$$(x_{0,j,0}, L^*(\lambda)\, \bar{\lambda}^{-1} z_{0,u,0})|_{\lambda=0} = (x_{0,j,0}, L_1^* z_{0,u,0}) = \delta_{j,u}, \qquad (14)$$

$$(x_{0,j,0}, L^*(\lambda)\, g_{d_{u,v}-r,u,v}(\bar{\lambda}))|_{\lambda=0} = (L(0)\, x_{0,j,0}, g_{d_{u,v}-r,u,v}(0)) = 0 \qquad (15)$$

при $(r, u, v) \in \Lambda(L, \mathbb{C} \setminus \{0\})$, а

$$\sum_{s=0}^{h} \frac{1}{s!} \frac{d^s}{d\lambda^s} (x_{h-s,j,k},\ L^*(\bar{\lambda})^{-1} z_{0,u,0})\,|_{\lambda=\mu_k} =$$

$$= \sum_{r=0}^{h} \frac{(-1)^r}{\mu_k^{r+1}} \left(\sum_{s=r}^{h} \frac{1}{(s-r)!} \frac{d^{s-r} L(\lambda)}{d\lambda^{s-r}}\,|_{\lambda=\mu_k} x_{h-s,j,k},\ z_{0,u,0} \right) = 0 \qquad (16)$$

при $(h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ и $(0, u, 0) \in \Lambda(L_0)$. Эти равенства показывают, что соотношения (6) справедливы, когда мультииндексы (h, j, k) и $(r, u, v) \in \Lambda(L, \mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \Lambda(L_0)$. Замечая, что $L^*(\bar{\lambda})\,\lambda^{-1} z^n_{0,u,0} = z^1_{0,u,0} + \lambda z^2_{0,u,0} + \ldots + \lambda^{n-1} z^n_{0,u,0}$ с векторами $z_{0,u,0} = L_l^* z_{0,u,0}$, имеем $\{z^{p+q+1}_{0,u,0},\ z^{p+q+2}_{0,u,0}, \ldots, z^n_{0,u,0}\} = \tilde{N}^*_{n-p-q}(z_{0,u,0} \oplus 0_{n-p-q-1}) = \tilde{N}^*_{n-p-q}\tilde{z}^{n-p-q}_{0,u,0}(0)$, а $z^1_{0,u,0} = L_1^* z_{0,u,0} = \bar{\tau} z_{0,u,0} = (L_0^* + I - L_0^0)(\bar{\tau} z_{0,u,0})$. Отсюда и из соотношений (14) — (16), (5) — (9), а также из равенств (11) и (12), примененных при $p = 1$, с учетом тождеств $M_1^* z = L_0^* z = (L_0^* + I - L_0^0)\,L_0^0 z$ для всех элементов $z \in \mathfrak{H}$, вытекает доказательство леммы 6.

Замечание 1. Если 0 — дискретная точка спектра оператор-функции $L(\lambda)$, удовлетворяющей требованиям леммы 5, то утверждение леммы 6 выводится из утверждения леммы 2, когда в нем $p = 0$, а q равно $q + 1$, где q взято из леммы 6. Это вытекает из обратимости в данном случае оператора $L_0 + I - L_0^0$ (см. лемму 4) и равенства $\Lambda(L, \mathbb{C}) = \Lambda(L, \mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \Lambda(L_0)$ (см. лемму 5).

Лемма 7 [5, лемма 13]. *Пусть векторы* $f_{h,k}$, где $h = \overline{0, \nu_k}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — *минимальны в* $\mathfrak{H}$ *и* $f_{h,k} = \sum_{s=0}^{\nu_k} c^{(k)}_{h,s} y_{s,k}$, *где* $c^{(k)}_{h,s}$ — *некоторые числа. Тогда минимальную систему в* $\mathfrak{H}$ *образуют также векторы* $y_{h,k}$.

Доказательство. Обозначим через $g_{h,k}$ сопряженную систему векторов к системе $f_{h,k}$ и пусть соотношения биортогональности имеют вид $(f_{h,k},\ g_{r,v}) = \delta_{h,r}\delta_{k,v}$. Значит,

$$\sum_{s=0}^{\nu_k} c^{(k)}_{h,s}(y_{s,k},\ g_{r,v}) = \delta_{h,r}\delta_{k,v}, \qquad (17)$$

откуда при $k = v$

$$\{c^{(k)}_{h,s}\}^{\nu_k}_{h,s=0}\ \{(y_{s,k},\ g_{r,k})\}^{\nu_k}_{s,r=0} = \{\delta_{h,r}\}^{\nu_k}_{h,r=0}. \qquad (18)$$

Тем самым определитель матрицы $\{c^{(k)}_{h,s}\}^{\nu_k}_{h,s=0}$ отличен от нуля при любом $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому при $k \neq v$ система уравнений (17), когда $h = 0, \ldots, \nu_k$, относительно неизвестных $(y_{s,k},\ g_{r,v})$ имеет лишь нулевое решение. Следовательно,

$$(y_{h,k},\ g_{r,v}) = 0 \qquad (19)$$

при $k \neq v$. Переходя в равенстве (18) к транспонированным матрицам, имеем $\sum_{s=0}^{\nu_k} c^{(k)}_{s,r}\,(y_{h,k}, g_{s,k}) = \delta_{h,r}$. Из этого тождества и тождеств (19) вытекает, что векторы $z_{h,k} = \sum_{s=0}^{\nu_k} \overline{c^{(k)}_{s,h}} g_{s,k}$ образуют сопряженную систему к системе $y_{h,k}$.

Подмножество Λ множества мультииндексов (h, s, k), где индекс h принимает целые неотрицательные значения, называется *правильным*, если из включения $(h_0, j, k) \in \Lambda$ при $h_0 \geqslant 1$, следует, что Λ содержит также все мультииндексы $(0, j, k), \ldots, (h_0 - 1, j, k)$.

Лемма 8. *Пусть* $\alpha(\lambda)$ *и* $Q_l(\lambda)$, $l = \overline{1, m}$, — *аналитические при* $\lambda \in \Omega$ *функции со значениями в* $\mathbb{C}$ *и* $[\mathfrak{H}]$, *соответственно, оператор* $\tilde{D} \in$

$\in[\mathfrak{H}^m]$, *а* Λ *— правильное множество мультииндексов и* $\Lambda\subseteq\Lambda\ (L,\Omega)$. *Из минимальности в пространстве* $\mathfrak{H}^m$ *системы векторов* $\tilde{D}x_{h,j,k}(\alpha(\mu)\times\times Q_1(\mu),\dots,\ \alpha(\mu)Q_m(\mu))$ *при* $(h,j,k)\in\Lambda$ *вытекает минимальность системы* $\tilde{D}x_{h,j,k}(Q_1(\mu),\dots,\ Q_m(\mu))$ *при* $(h,j,k)\in\Lambda$. *В частности, для произвольного* T *система векторов* $\tilde{D}\tilde{x}^m_{h,j,k}(T)$ *при* $(h,j,k)\in\Lambda$ *минимальна тогда и только тогда, когда минимальна система векторов* $\tilde{D}\tilde{x}^m_{h,j,k}(0)$ *при* $(h,j,k)\in\Lambda$.

Доказательство. Используя формулы (I.2) и (I.3), имеем

$$\tilde{D}x_{h,j,k}(\alpha(\mu)\,Q_1(\mu),\dots,\alpha(\mu)\,Q_m(\mu))=\sum_{s=0}^{h}\frac{1}{s!}\,\alpha^{(s)}(\mu_h)\,\tilde{D}x_{h-s,j,k}(Q_1(\mu),\dots,Q_m(\mu)),$$

откуда и из леммы 7 выводим первое утверждение леммы 8. На основании формулы (1.7) $\tilde{x}^m_{h,j,k}(T)=x_{h,j,k}(e^{\mu T},\mu e^{\mu T},\dots,\mu^{m-1}e^{\mu T})$, поэтому, полагая в первом утверждении леммы 8 функции $\alpha(\lambda)=e^{\lambda T}$ и $Q_l(\lambda)=\lambda^{l-1}I$, из минимальности векторов $\tilde{D}\tilde{x}^m_{h,j,k}(T)$ выводим минимальность векторов $\tilde{D}\tilde{x}^m_{h,j,k}(0)$. Полагая теперь $\alpha(\lambda)=e^{-\lambda T}$ и $Q_l(\lambda)=\lambda^{l-1}e^{\lambda T}I$ из минимальности векторов $\tilde{D}\tilde{x}^m_{h,j,k}(0)$ выводим минимальность векторов $\tilde{D}\tilde{x}^m_{h,j,k}(T)$. Тем самым лемма 8 полностью доказана.

2. Случай произвольного порядка. В этом пункте покажем, как из теорем 2—4 и следствий 1, 2 статьи [1] выводятся утверждения о минимальности производных цепочек, отвечающих краевым задачам на конечном отрезке. Положив в утверждении леммы 2 числа $p=0$ и $q=n-1$, получим, что система векторов $[(\mathrm{diag}^{n-1}I)\oplus L_n]\,\tilde{x}^n_{h,j,k}(0)$ при $(h,j,k)\in\Lambda(L,\mathbb{C})$ минимальна в пространстве $\mathfrak{H}^n$. Из полярного представления оператора L_n имеем: $L_n=U\,|L_n|^{1/2}\,|L_n|^{1/2}$, поэтому минимальной в пространстве $\mathfrak{H}^n$ является и система элементов $[(\mathrm{diag}^{n-1}I)\oplus|L_n|^{1/2}]\,\tilde{x}^n_{h,j,k}(0)$, когда $(h,j,k)\in\Lambda(L,\mathbb{C})$. Если система векторов f_k из $\mathfrak{H}$ минимальна, а g_k — произвольные элементы некоторого гильбертового пространства $\mathfrak{H}_1$, то система векторов $f_k\oplus g_k$ из пространства $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}_1$ также будет минимальной. Тем самым показана минимальность системы элементов, находящейся в правой части соотношения (I.32), когда мультииндекс $(h,j,k)\in\Lambda(L,\mathbb{C})$ $(\subseteq\Delta(L,\mathbb{C}))$. Аналогично показывается минимальность векторов $\tilde{x}^n_{h,j,k}(0)\oplus\oplus\tilde{x}^n_{h,j,k}(T)$ при $(h,j,k)\in\Lambda(L,\mathbb{C})$. Если справедливо соотношение $x_h\simeq f_h$ и векторы f_h миниальны, то минимальными будут и векторы x_h. Отсюда и из изложенного выше следует минимальность системы векторов, находящейся в левой части соотношения (1.32) при $(h,j,k)\in\Lambda(L,\mathbb{C})$. Значит, например, из теоремы 1.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть оператор-функция (2) задана при четном* $n\geqslant 2$, *а операторы* $L_0\gg 0$, $\mathrm{Im}\,L_{2s}=0$, *когда* $s=\overline{1,[n/2]}$, *а* $(-1)^s\mathrm{Re}\,L_{2s+1}\geqslant 0$, *когда* $s=\overline{0,[(n-1)/2]}$. *Предположим, что коэффициенты* $\alpha_{l,r}$ *и* $\beta_{l,r}$ *оператор-функций* $U_l(\lambda)=\sum_{r=1}^{n-1}\lambda^{r-1}(\alpha_{l,r}+e^{\lambda T}\beta_{l,r})\,I$, $l=\overline{1,n-1}$, *удовлетворяют следующему условию: для всех ненулевых решений (относительно* ζ_r *и* η_r*) системы линейных уравнений* $\sum_{r=1}^{n-1}(\alpha_{l,r}\zeta_r+\beta_{l,r}\eta_r)=0$, $l=\overline{1,n-1}$, *справедливо неравенство* $\sum_{q=1}^{n/2}\xi_q\sum_{s=0}^{2q-1}(-1)^{q+s}(\zeta_{2q-s}\bar{\zeta}_s-\eta_{2q-s}\bar{\eta}_s)<0$ *для некоторого фиксированного набора* $\{\xi_1,\dots,\xi_{n/2}\}\in\mathbb{R}_+^{n/2}$ *с* $\xi_{n/2}>0$. *Тогда найдется такое* $\tau_0>0$, *что для всех* $\tau\geqslant\tau_0$ *система векторов*

$x_{h,j,k}(U_1(\mu\tau), \ldots, U_{n-1}(\mu\tau), \mu^{n-1}\{[(-i)^n L_n]_-^{1/2} + e^{\mu\tau T}[(-i)^n L_n]_+^{1/2}\})$ *при мультииндексах* $(h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C})$ *минимальна в пространстве* $\mathfrak{H}^n$.

Аналогичные утверждения вытекают и из теорем I.2 и I.4, а также из следствий I.1 и I.2. Отметим, что к ним относятся и замечания I.1—I.3. Приведем здесь еще лишь одно утверждение, вытекающее из следствия I.2.

Теорема 2. *Пусть оператор-функция* $L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2$ *и* L_0, L_2 — *самосопряжены*, а $\operatorname{Re} L_1 \geqslant 0$. *Тогда система векторов* $x_{h,j,k}([\alpha + e^{\mu}\beta] I, \mu [(L_2)_+^{1/2} + e^{\mu}(L_2)_-^{1/2}])$ *при* $(h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C})$ *минимальна в пространстве* $\mathfrak{H}^2$, *когда* $|\alpha| > |\beta|$ *и* $L_0 \gg 0$, *или, когда* $|\alpha| < |\beta|$ *и* $L_0 \ll 0$.

Следующие два пункта посвящены изучению минимальности производных цепочек, построенных по корневым векторам квадратичного пучка операторов. Вначале, в п. 3, будут приведены признаки эквивалентности, а затем из них, в п. 4, будут выведены утверждения о минимальности. Причем утверждения об эквивалентности сформулированы и доказаны в п. 3 для квадратичного пучка, вообще говоря, неограниченных операторов.

3. Эквивалентность корневых векторов квадратичного пучка операторов. Для пучка операторов

$$L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2 \tag{20}$$

полагаем область определения $\mathfrak{L} = \mathfrak{D}(L_0) \cap \mathfrak{D}(L_1) \cap \mathfrak{D}(L_2)$. Для него формы $\Phi_m[\tilde{x}^n]$, заданные равенством (I.13), имеют вид

$$\Phi_1[\tilde{x}^2] = (iL_1 x^1, x^1) + 2\operatorname{Re}(iL_2 x^2, x^1), \tag{21}$$

$$\Phi_2[\tilde{x}^2] = (L_0 x^1, x^1) + (L_2 x^2, x^2), \tag{22}$$

$$\Phi_3[\tilde{x}^2] = 2\operatorname{Re}(-iL_0 x^1, x^2) - (iL_1 x^2, x^2), \tag{23}$$

а условия (I.17) и (I.18) перепишутся, соответственно, следующим образом: для любого элемента $x \in \mathfrak{L}$

$$\operatorname{Im}(L_0 x, x) \leqslant 0, \quad \operatorname{Re}(L_1 x, x) = 0, \quad \operatorname{Im}(L_2 x, x) \geqslant 0, \tag{24}$$

$$\operatorname{Im}(L_0 x, x) = 0, \quad \operatorname{Re}(L_1 x, x) \geqslant 0, \quad \operatorname{Im}(L_2 x, x) = 0. \tag{25}$$

Кроме того, как и в статье [1], вектор-функции

$$\hat{x}_{h,j,k}(t) = e^{\mu_k t}\left(\frac{t^h}{h!} x_{0,j,k} + \ldots + \frac{t}{1!} x_{h-1,j,k} + x_{h,j,k}\right)$$

построены по цепочкам корневых векторов $x_{0,j,k}, \ldots, x_{h,j,k}$, отвечающих характеристическим числам μ_k оператор-функции (20).

Теорема 3. *Пусть оператор-функция* (20) *удовлетворяет условию* (24), *а* α, β, γ *и* δ *такие комплексные числа, что* $\alpha\bar{\beta} > 0$ *и* $\gamma\bar{\delta} > 0$. *Тогда для произвольного* $T \geqslant 0$ *и всех мультииндексов* $(h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C})$ *справедливы соотношения*

$$[(\alpha i L_1 + \beta I)\hat{x}_{h,j,k}(0) + 2\alpha i L_2 \hat{x}'_{h,j,k}(0)] \oplus [(\gamma i L_1 - \delta I)\hat{x}_{h,j,k}(T) + 2\gamma i L_2 \hat{x}'_{h,j,k}(T)] \simeq \left[\operatorname{diag}^2\begin{pmatrix} L_1 & 2L_2 \\ I & 0 \end{pmatrix}\right][\tilde{x}^2_{h,j,k}(0) \oplus \tilde{x}^2_{h,j,k}(T)] \tag{26}$$

и

$$[2\alpha i L_0 \hat{x}_{h,j,k}(0) + (\alpha i L_1 - \beta I)\hat{x}'_{h,j,k}(0)] \oplus [2\gamma i L_0 \hat{x}_{h,j,k}(T) + (\gamma i L_1 + \delta I)\hat{x}'_{h,j,k}(T)] \simeq \left[\operatorname{diag}^2\begin{pmatrix} 2L_0 & L_1 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right][\tilde{x}^2_{h,j,k}(0) \oplus \tilde{x}^2_{h,j,k}(T)]. \tag{27}$$

Доказательство. Учитывая вид (21) формы $\Phi_1[\tilde{x}^2]$ и условие $\operatorname{Re}(L_1 x, x) = 0$, заключаем, что для любого вектора $\tilde{x}^2 = \{x^1, x^2\} \in \mathfrak{L}^2$ выполняется тождество

$$\Phi_1[\tilde{x}^2] = (4\alpha\bar{\beta})^{-1}\,\|\,\alpha i L_1 x^1 + \beta x^2 + 2\alpha i L_2 x^2\,\|^2 - (4\alpha\bar{\beta})^{-1}\,\|\,\alpha i L_1 x^1 - \beta x^2 + 2\alpha i L_2 x^2\,\|^2. \quad (28)$$

Определим действующие в пространстве $\mathfrak{H}^4$ операторы

$$\tilde{\mathcal{T}}_1\{x^1, x^2, y^1, y^2\} = \{\alpha i L_1 x^1 + \beta x^2 + 2\alpha i L_2 x^2, 0, 0, \gamma i L_1 y^1 - \delta y^1 + 2\gamma i L_2 y^2\} \quad (29)$$

и

$$\tilde{\mathcal{T}}_2\{x^1, x^2, y^1, y^2\} = \{0, \alpha i L_1 x^1 - \beta x^2 + 2\alpha i L_2 x^2, \gamma i L_1 y^1 + \delta y^1 + 2\gamma i L_2 y^2, 0\} \quad (30)$$

с областями определения, равными $\mathfrak{L}^4$. Так как области значений операторов $\tilde{\mathcal{T}}_1$ и $\tilde{\mathcal{T}}_2$ ортогональны, то $\|(\tilde{\mathcal{T}}_1 + \tilde{\mathcal{T}}_2)\tilde{f}^4\|^2 = \|\tilde{\mathcal{T}}_1\tilde{f}^4\|^2 + \|\tilde{\mathcal{T}}_2\tilde{f}^4\|^2 \geqslant \|\tilde{\mathcal{T}}_1\tilde{f}^4\|^2$ для любого элемента $\tilde{f}^4 \in \mathfrak{L}^4$, т. е. справедливо требование (I.20), а, исходя из тождества (28), имеем $\Phi_1[\tilde{x}^2] - \Phi_1[\tilde{y}^2] \leqslant c_1\|\tilde{\mathcal{T}}_1(\tilde{x}^2 \oplus \tilde{y}^2)\|^2 - c_2\|\tilde{\mathcal{T}}_2(\tilde{x}^2 \oplus \tilde{y}^2)\|^2$ с постоянными $c_1 = 4^{-1}\max\{(\alpha\bar{\beta})^{-1}, (\bar{\gamma}\delta)^{-1}\}$ и $c_2 = 4^{-1}\min\{(\alpha\bar{\beta})^{-1}, (\gamma\bar{\delta})^{-1}\}$. Тем самым выполнены требования теоремы I.1, на основании которой справедливо соотношение (I.24) при $n = 2$ и с операторами $\tilde{\mathcal{T}}_1$ и $\tilde{\mathcal{T}}_2$, заданными формулами (29) и (30). Учитывая вид (29) оператора $\tilde{\mathcal{T}}_1$, заключаем, что векторы из левой части соотношения (I.24) эквивалентны векторам из левой части соотношения (26). А из равенств (29) и (30) получаем

$$\tilde{\mathcal{T}}_1 + \tilde{\mathcal{T}}_2 = \left[\begin{pmatrix} \alpha i I & \beta I \\ \alpha i I & -\beta I \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \gamma i I & \delta I \\ \gamma i I & -\delta I \end{pmatrix}\right]\left[\operatorname{diag}^2\begin{pmatrix} L_1 & 2L_2 \\ I & 0 \end{pmatrix}\right],$$

причем первый сомножитель в правой части этого тождества — обратимый оператор в пространстве $\mathfrak{H}^4$. Значит, векторы из правой части соотношения (I.24) эквивалентны векторам из правой части соотношения (26). Отсюда и следует утверждение (26).

Соотношение (27) устанавливается аналогично, лишь вместо формы (21) исследуется форма (23), для которой равенство (28) заменяется на тождество

$$\Phi_3[\tilde{x}^2] = (4\alpha\bar{\beta})^{-1}\,\|\,2\alpha i L_0 x^1 + \alpha i L_1 x^2 - \beta x^2\,\|^2 - (4\alpha\bar{\beta})^{-1}\,\|\,2\alpha i L_0 x^1 + \alpha i L_1 x^2 + \beta x^2\,\|^2. \quad (31)$$

Теорема 4. *Пусть оператор-функция* (20) *удовлетворяет условию* (24) *и* $i(L_1 x, x) \leqslant -c\|x\|^2$ *с независящей от* $x \in \mathfrak{L}$ *постоянной* $c > 0$, *а* α *и* β *такие комплексные числа, что* $\alpha\bar{\beta} > 0$. *Тогда для произвольного* $T \geqslant 0$ *и всех мультииндексов* $(h, j, k) \in \Delta(L, \mathbb{C})$

$$[2\alpha i L_0 \hat{x}_{h,j,k}(0) + (\alpha i L_1 - \beta I)\hat{x}'_{h,j,k}(0)] \oplus [(L_0 + I - L_0^0)\hat{x}_{h,j,k}(T)] \simeq$$

$$\simeq \left[\begin{pmatrix} 2L_0 & L_1 \\ 0 & I \end{pmatrix}\tilde{x}^2_{h,j,k}(0)\right] \oplus [\operatorname{diag}\{L_0 + I - L_0^0, I\}\,\tilde{x}^2_{h,j,k}(T)]. \quad (32)$$

Доказательство. По лемме $3\|(L_0 + I - L_0^0)y\| \geqslant \|L_0 y\|$, поэтому из равенства (23) и условия $(-iL_1 y, y) \geqslant c\|y\|^2$, имеем $\Phi_3[\tilde{y}^2] \geqslant c\|y^2\|^2 - 2\|L_0 y^1\|\|y^2\| \geqslant (c/2)\|y^2\|^2 - (2/c)\|(L_0 + I - L_0^0)y^1\|^2$. Из этой оценки и тождества (31), полностью повторяя доказательство теоремы 3, приходим к утверждению (32).

Теорема 5. *Пусть оператор-функция* (20) *удовлетворяет условию* (25), *а* $\tilde{F}$ — *такой сопряженный оператор, действующий в пространстве* $\mathfrak{H}^4$, *что* $\mathfrak{D}(\tilde{F}) \subseteq \mathfrak{L}^4$ *и* $(\tilde{F}\tilde{x}^4, \tilde{x}^4) \geqslant (\operatorname{diag}\{L_0, L_2, -L_0, -L_2\}\tilde{x}^4, \tilde{x}^4)$ *для всех* *векторов $\tilde{x^4} \in \mathfrak{L}^4$. Тогда для произвольного $T \geqslant 0$ и всех мультииндексов $(h, j, k) \in \Delta(L, \mathbb{C})$*

$$\tilde{F}_{+}^{1/2} [\tilde{x}^2_{h,j,k}(0) \oplus \tilde{x}^2_{h,j,k}(T)] \simeq \tilde{F}^{1/2} [\tilde{x}^2_{h,j,k}(0) \oplus \tilde{x}^2_{h,j,k}(T)]. \tag{33}$$

Доказательство. Из равенства $(\tilde{F}\tilde{x}^4\tilde{x}^4) = \| \tilde{F}_{+}^{1/2}\tilde{x}^4\|^2 - \|\tilde{F}_{-}^{1/2}\tilde{x}^4\|^2$ и из вида (22) формы $\Phi_2[\tilde{x}^2]$ на основании теоремы I.1, в которой полагаем операторы $\tilde{\mathcal{J}}_1 = \tilde{F}_{+}^{1/2}$ и $\tilde{\mathcal{J}}_2 = \tilde{F}_{-}^{1/2}$, выводим соотношение (33).

4. Минимальность корневых векторов квадратичного пучка операторов. Приведем следствия из теорем 3—5.

Следствие 1. *Пусть оператор-функция* (20) *с операторами L_0, L_1 $L_2 \in [\mathfrak{H}]$ удовлетворяет условию* (24), *а α, β, γ, δ — такие комплексные числа, что $\alpha\bar{\beta} > 0$ и $\gamma\bar{\delta} > 0$. Тогда для произвольного $T \geqslant 0$ следующие системы векторов минимальны в пространстве $\mathfrak{H}^2$*

$$[(\alpha i L_1 + \beta I)\hat{x}_{h,j,k}(0) + 2\alpha i L_2 \hat{x}'_{h,j,k}(0)] \oplus [(\gamma i L_1 - \delta I)\hat{x}_{h,j,k,}(T) + \\ + 2\gamma i L_2 \hat{x}'_{h,j,k}(T)], \quad (h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C}), \tag{34}$$

и

$$[2\alpha i L_0 \hat{x}_{h,j,k}(0) + (\alpha i L_1 - \beta I)\hat{x}'_{h,j,k}(0)] \oplus [2\gamma i L_0 \hat{x}_{h,j,k}(T) + \\ + (\gamma i L_1 + \delta I)\hat{x}'_{h,j,k}(T)], \quad (h, j\, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C}) \setminus \Lambda_1(L, 0). \tag{35}$$

Доказательство. Так как для квадратичного пучка операторов (20) оператор $\tilde{N}_2$, заданный равенством (3), имеет вид $\tilde{N}_2 = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2 & 0 \end{pmatrix}$ и $\tilde{N}_2 = \begin{pmatrix} 2^{-1}I & 2^{-1}L_1 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_1 & 2L_2 \\ I & 0 \end{pmatrix}$, то применяя при $p = q = 0$ и $n = 2$ утверждение лемма 2, получаем минимальность в пространстве $\mathfrak{H}^2$ системы векторов $\begin{pmatrix} L_1 & 2L_2 \\ I & 0 \end{pmatrix}\tilde{x}^2_{h,j,k}(0)$ при $(h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C})$. Отсюда следует минимальность в пространстве $\mathfrak{H}^4$ системы векторов, находящейся в правой части равенства (26), при мультииндексах $(h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C})$. Тем самым минимальна в пространстве $\mathfrak{H}^2$ и система, находящаяся в левой части этого соотношения, т. е. система (34). Аналогично из леммы 2 при $n = p = 2$ и $q = 0$ и из соотношения (27) выводится минимальность системы векторов (35).

Используя определения множества мультииндексов $\Lambda(L_0)$ и минимальной системы собственных векторов $x_{h,j,k}$, отвечающей характеристическому числу 0 оператор-функции $L(\lambda)$, при $(h, \gamma, k) \in \Lambda(L_0)$, которые даны перед формулировкой леммы 6, сформулируем утверждение.

Следствие 2. *Пусть у оператор-функции* (20) *операторы L_0, $L_2 \in [\mathfrak{H}]$ и $L_1 = iI$, а $\operatorname{Im} L_0 \leqslant 0$, $\operatorname{Im} L_2 \geqslant 0$. Тогда для произвольного $T \geqslant 0$ следующие системы векторов минимальны в пространстве $\mathfrak{H}^2$:*

$$L_2\hat{x}'_{h,j,k}(0) \oplus [L_1\hat{x}_{h,j,k}(T) + L_2\hat{x}'_{h,j,k}(T)], \quad (h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C}), \tag{36}$$

$$L_2\hat{x}''_{h,j,k}(0) \oplus L_0\hat{x}_{u,j,k}(T), \quad (h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C}) \setminus \Lambda_0(L, 0), \tag{37}$$

$$L_2\hat{x}''_{h,j,k}(0) \oplus (L_0 + I - L_0^0)\hat{x}_{h,j,k}(T), \quad (h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \Lambda(L_0). \tag{38}$$

Доказательство минимальности систем (36) и (37) непосредственно вытекает из следствия 1, в котором полагаем $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$. При этом для вывода минимальности системы (37) следует лишь отметить, что, так как вектор-функции $\hat{x}_{h,j,k}(t)$ являются решениями уравнения

$L_0\hat{x}(t) + L_1\hat{x}'(t) + L_2\hat{x}''(t) = 0$, то $2iL_0\hat{x}_{h,j,k}(0) + (iL_1 - I)\,\hat{x}'_{h,j,k}(0) = 2i\,[L_0\hat{x}_{h,j,k}(0) + L_1\hat{x}'_{h,j,k}(0)] = -2iL_2\hat{x}''_{h,j,k}(0)$, а в силу леммы 5 кратность любого собственного вектора, отвечающего характеристическому числу 0, равна 1, поэтому $\Lambda_1(L, 0) = \Lambda_0(L, 0)$. Утверждение о минимальности системы (38) выведем из теоремы 4 и леммы 6. Полагая в лемме 6 числа $n = 2$ и $q = 1$, получаем минимальность системы элементов $\operatorname{diag}\{L_0 + I - L_0^0, I\}\,\tilde{x}^2_{h,j,k}(0)$ при $(h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C}\setminus\{0\}) \cup \Lambda(L_0)$, откуда и из леммы 8 вытекает минимальность системы элементов $\operatorname{diag}\{L_0 + I - L_0^0, I\}\,\tilde{x}^2_{h,j,k}(T)$ при тех же значениях мультииндексов (h, j, k).

Поэтому система векторов, находящаяся в правой части соотношения (32), при $(h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C}\setminus\{0\}) \cup \Lambda(L_0)$ минимальна в пространстве $\mathfrak{H}^4$, а значит, минимальна в $\mathfrak{H}^2$ система векторов, находящаяся в левой части соотношения (32) при тех же значениях мультииндексов (h, j, k). Полагая $\alpha = \beta = 1$ и вычисляя, как и при выводе о минимальности системы (37), векторы из левой части соотношения (32), приходим к утверждению о минимальности системы (38).

Следствие 3. *Пусть у оператор-функции* (20) *операторы* $L_0, L_1, L_2 \in [\mathfrak{H}]$, *а* L_0, L_2 *самосопряжены и* $\operatorname{Re} L_1 \geqslant 0$. *Тогда для произвольного* $T \geqslant 0$ *следующие системы векторов минимальны в пространстве* $\mathfrak{H}^2$:

$$[(L_0)_+^{1/2}\hat{x}_{h,j,k}(0) + (L_0)_-^{1/2}\hat{x}_{h,j,k}(T)] \oplus [(L_2)_+^{1/2}\hat{x}'_{h,j,k}(0) + (L_2)_-^{1/2}\hat{x}'_{h,j,k}(T)], \tag{39}$$

$$(h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C})\setminus\Lambda_0(L, 0)$$

$$\{[(L_0)_+^{1/2} + I - L_0^0]\,\hat{x}_{h,j,k}(0) + (L_0)_-^{1/2}\hat{x}_{h,j,k}(T)\} \oplus [(L_2)_+^{1/2}\hat{x}'_{h,j,k}(0) +$$

$$+ (L_2)_-^{1/2}\hat{x}'_{h,j,k}(T)], \quad (h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C}). \tag{40}$$

В частности, если оператор $L_0 \geqslant 0$, *а* $L_2 \leqslant 0$, *то в* $\mathfrak{H}^2$ *минимальны векторы* $\hat{x}_{h,j,k}(0) \oplus \hat{x}'_{h,j,k}(T)$ *при* $(h, j, k) \in \Lambda(L, \mathbb{C})$.

Доказательство. Минимальность системы векторов (39) вытекает из теоремы 5 и леммы 2, если положить в них, соответственно, оператор $\tilde{F} = \operatorname{diag}\{L_0, L_2, -L_0, -L_2\}$ и числа $n = 2$, $p = 1$, $q = 0$. Для получения же минимальности системы (40) в теореме 5 необходимо положить $\tilde{F} = \operatorname{diag}\{L_0 + I - L_0^0, L_2, -L_0, -L_2\}$, а в лемме 2 считать числа $n = 2$, $p = 0$, $q = 1$ и учесть, что, согласно лемме 4, оператор $L_0 + I - L_0^0$ обратим.

1. *Радзиевский Г. В.* Эквивалентность производных цепочек, отвечающих краевой задаче на конечном отрезке, для полиномиальных пучков операторов // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 1.— С. 83—95.
2. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР.— 1951.— **77**, № 1.— С. 11—14.
3. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук.— 1971.— **26**, № 4.— С. 15—41.
4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
5. *Радзиевский Г. В.* Квадратичный пучок операторов (эквивалентность части корневых векторов).— Киев, 1984.— 52 с. (Препринт / Ин-т математики АН УССР; 84.32).
6. *Костюченко А. Г., Радзиевский Г. В.* О суммировании методом Абеля n-кратных разложений // Сиб. мат. журн.— 1974.— **15**, № 4.— С. 855—870.
7. *Шкаликов А. А.* О минимальности производных цепочек, отвечающих части собственных и присоединенных элементов самосопряженных пучков операторов // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика.— 1985.— № 6.— С. 10—19.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 04.11.88