УДК 517.5

Г. А. Мкртчян

О сильной гиперкомплексной выпуклости

Введено понятие гиперкомплексно выпуклого множества. Рассмотрены свойства сильно гиперкомплексно выпуклых множеств. Приведены теоремы о сильной гиперкомплексной выпуклости. Установлен гиперкомплексный вариант геометрической формы теоремы Хана — Банаха.

Введено поняття гіперкомплексно випуклої множини. Розглянуті властивості сильно гіперкомплексно випуклих множин. Наведені теореми про сильну гіперкомплексну випуклість. Установлений гіперкомплексний варіант геометричної форми теореми Хана — Банаха.

$4n$-мерное евклидово пространство R^{4n}, точками которого являются упорядоченные наборы n кватернионов $h=(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ с операцией покомпонентного сложения, называется n-мерным гиперкомплексным пространством [1] и обозначается символом H^n. В частности, при $n = 1$ получаем $H^1 = h$ — плоскость кватернионов.

Пусть E — произвольное подмножество гиперкомплексного пространства H^n, содержащее начало координат $O\,(0, 0, \ldots, 0)$.

Определение 1. *Множество* $\tilde{E} = \{h : \langle h, q\rangle \neq 1$ *для всех* $q \in E\}$ ***называется сопряженным** множеством к* E. (*Учитывая некоммутативность умножения кватернионов, необходимо употреблять здесь термин* *«левое сопряженное пространство». Далее будет сделано замечание, в силу которого, если не возникает неоднозначности, то слова «левый», «правый» для простоты изложения можно опустить*).

Если не оговорена вещественность, то прямыми и гиперплоскостями будем называть гиперкомплексные афинные подмногообразия пространства H^n гиперкомплексной размерности 1 и $n-1$ соответственно.

Замечание 1. Поставив каждой точке q° в соответствие гиперплоскость $\{h : \langle h, q^\circ \rangle = 1\}$, сопряженное множество можно интерпретировать как множество гиперплоскостей, не пересекающих множество E.

Замечание 2. Так как умножение в алгебре кватернионов некоммутативно, то в записи, например, уравнения гиперплоскости существен порядок умножения. Поэтому здесь и в дальнейшем для определенности, когда говорим о гиперплоскостях, тогда рассматриваем левые гиперплоскости в сопряженном пространстве, т. е., точку с переменной координатой умножаем на фиксированную точку слева, а правые гиперплоскости рассматриваем в исходном пространстве.

Введем понятие гиперкомплексного выпуклого множества.

Определение 2. *Множество E назовем гиперкомплексно выпуклым, если для каждой точки $h_0 \in H^n \setminus E$ существует гиперплоскость, проходящая через h° и не пересекающая E.*

Для аналогии напомним [2], что множество E, лежащее в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, называется линейно выпуклым, если для каждой точки $z^0 \in \mathbb{C}^n \setminus E$ существует $(n-1)$-мерная комплексная плоскость, проходящая через z^0 и не пересекающая E.

Пример 1. Очевидно, что всякое выпуклое, а также линейно выпуклое множество в H^n будет гиперкомплексно выпуклым, так как через каждую точку дополнения к E в первом случае проходит вещественная гиперплоскость, во втором — комплексная гиперплоскость, не пересекающая E. В обоих случаях эти вещественно $(4n-1)$- или $(4n-2)$-мерные плоскости содержат гиперплоскость с требуемыми свойствами.

Обратное не верно (см. пример 2). Поэтому класс гиперкомплексно выпуклых множеств шире класса линейно выпуклых множеств и тем более класса выпуклых множеств.

Пример 2. Пусть $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \subset H^n$ — топологическое произведение множеств $E_i \subset H$. Это множество гиперкомплексно выпукло, так как для произвольной точки $h \in H$ найдется проекция π_i на одну из координатных плоскостей H_i (т. е. H_i есть i-й экземпляр H) такая, что $\pi_i(h) = \pi_i(h_1, \ldots, h_i, \ldots, h_m) = h_i \notin E_i$. Но тогда гиперплоскость $\underbrace{H \times \ldots \times H}_{i-1} \times h_i \times \underbrace{H \times \ldots \times H}_{n-1}$ не пересекает множество E.

Пример 3. Если $n = 1$, то гиперплоскостью является точка.

Значит всякое множество $E \subset H^1$ является гиперкомплексно выпуклым.

В частности, сфера $S^3 \subset H^1$ будет гиперкомплексно выпуклым множеством. Но эта же сфера S^3 не является ни выпуклым, ни линейно выпуклым множеством, так как она разбивает вещественное четырехмерное пространство $R^4 = H^1$.

Пусть $\tilde{H}^i(E)$ — приведенная группа когомологии Александрова — Чеха множества E с коэффициентами в группе целых чисел [3].

Определение 3. *Множество $E \subset H^n$ (компакт или область) назовем сильно гиперкомплексно выпуклым, если произвольное сечение его прямой λ ациклично (т. е. $\tilde{H}^i(\lambda \cap E) = 0\ \forall i$).*

Замечание 3. Определения гиперкомплексно выпуклого и сильно гиперкомплексно выпуклого множества эквивалентны заданию выпуклых множеств. Первое определение — аналог того, что через каждую точку дополнения к выпуклому множеству области или компакту можно провести вещественную гиперплоскость, не пересекающую данное множество. Второе определение аналогично тому, что пересечение выпуклого множества с произвольной прямой связно (другими словами: любые две точки множества можно соединить отрезком, лежащим в этом множестве). В вещественном случае для связных множеств области или компактов эти определения эквивалентны. В рассматриваемом случае, так же как и в комплексном [4], получаем два несовпадающих класса. Далее покажем, что в случае областей и компактов сильно гиперкомплексно выпуклые множества будут гиперкомплексно выпуклыми. Обратное утверждение, как видно из следующего примера, не имеет места.

Пример 4. Пусть $K = S^3 \times S^3 \subset H \times H = H^2$, где $S^3 \subset H$ — трехмерная сфера. Это частный случай рассмотренного выше примера 3. Поэтому K — гиперкомплексно выпуклый компакт. Произвольное сечение его прямой вида (x_1, a), где $a \in S^3$, пересекает K по сфере S^3, т. е. не ациклично. Следовательно, K не будет сильно гиперкомплексно выпуклым компактом.

Теорема 1. *Всякий сильно гиперкомплексно выпуклый компакт K K ацикличен.*

Доказательство. Зафиксируем точку $x \in K$. Множество прямых, проходящих через эту точку, образует гиперкомплексное проективное пространство HP^{n-1}. Получаем многозначное полунепрерывное сверху ациклическое отображение $F : HP^{n-1} \to K$, ставящее в соответствие прямой λ сечение $\lambda \cap K$. Рассмотрим график этого отображения $\Gamma(F)$ и проекцию $P : \Gamma(F) \to HP^{n-1}$. В силу ацикличности F для произвольной точки $y \in HP^{n-1}$ множество $P^{-1}y$ ациклично. Поэтому по теореме Вьеториса — Бегла P индуцирует изоморфизм $P^* : \tilde{H}^i(\Gamma(F)) \approx \tilde{H}^i(HP^{n-1})$. Аналогично [4] имеет место коммутативная диаграмма отображений

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(F) & \xrightarrow{q} & K \\ \cup & & \cup \\ x \times HP^{n-1} & \to & x. \end{array}$$

Ей соответствует коммутативная диаграмма для группы когомологий

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^i(\Gamma(F)) & \xleftarrow{q^*} & \tilde{H}^i(K), \\ \approx & & \downarrow \\ \tilde{H}^i(x \times HP^{n-1}) & \leftarrow & \tilde{H}^i(x), \end{array}$$

где отображение q стягивает множество $x \times HP^{n-1}$ в точку x и является гомеоморфизмом на его дополнении. Поэтому в коммутативной диаграмме для длинных когомологических последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}^i(\Gamma(F), x \times HP^{n-1}) & \xrightarrow{\psi_1} & \tilde{H}^i(\Gamma(F)) & \xrightarrow{p^*} & \tilde{H}^i(x \times HP^{n-1}) & \xrightarrow{\psi_2} & \tilde{H}^{i+1}(\Gamma(F), x \times HP^{n-1}), \\ \approx \uparrow q_1^* & & \uparrow & & \uparrow & & \approx \uparrow q_1^* \\ \tilde{H}^i(K, x) & \to & \tilde{H}^i(K) & \to & \tilde{H}^i(x) & \to & \tilde{H}^{i+1}(K, x), \end{array}$$

q_1^* — изоморфизм. В силу точности верхней последовательности $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$ и $\tilde{H}^i(\Gamma(F), x \times HP^{n-1}) = 0 \ \forall i \geqslant 0$. В силу изоморфности g_1^*, $\tilde{H}^i(K, x) = 0 \ \forall i \geqslant 0$. Следовательно, в силу точности нижней строки $\tilde{H}^i(K) \approx \tilde{H}^i(x) = 0 \ \forall_i \geqslant 0$.

Следствие 1. *Сечение сильно гиперкомплексно выпуклого компакта K произвольными гиперкомплексными m-плоскостями ациклично. Очевидно, что для пересечения $K \cap L$, где L m — плоскость, выполнены условия приведенного выше определения. Следовательно, $K \cap L$ — сильно гиперкомплексно выпуклый компакт.*

Следствие 2. *Проекции сильно гиперкомплексно выпуклого компакта K на произвольные гиперкомплексные q-плоскости или на q-мерные проективные пространства HP^q, образованные множеством гиперплоскостей, проходящих через некоторую фиксированную $(n - q - 1)$-плоскость T, $T \cap K = \varnothing$, ацикличны.*

В силу предыдущего следствия и теоремы Вьеториса — Бегла прообразами точек при проекции будут сечения K $(n-q)$-мерными плоскостями. Следовательно, проекции индуцируют изоморфизм групп когомологий. Заметим, что сечениям проекции прямыми в прообразе соответствуют ацикличные, в силу следствия 2, сечения K $(n-q+2)$-мерными плоскостями.

Следствие 3. *Область $D = \tilde{K}$, K — сильно гиперкомплексно выпуклый компакт, сильно гиперкоплексно выпукла.*

Следствие 3 вытекает из [5] и предыдущего следствия, так как сечения области прямыми гомеоморфны дополнениям к проекциям K на прямые, ацикличные в силу следствия 2.

Замечание 4. Аналогично [4] можно установить и обратное утверждение к следствию 3: компакт $K = \tilde{D}$, D — сильно гиперкомплексно выпуклая область, является сильно гиперкомплексно выпуклым.

Теорема 2. *Сильно гиперкомплексно выпуклый компакт $K \subset H^n$ будет гиперкомплексно выпуклым.*

Доказательство. Применим метод индукции. Пусть существует $(n-2)$-плоскость T через точку x, не пересекающая K. Множество гиперплоскостей, содержащих T, образует одномерное проективное пространство HP^1. Если K не является гиперкомплексно выпуклым, то все гиперплоскости, содержащие T, пересекают K. Тогда получим многозначное ациклическое отображение $F: HP^1 \to K$, ставящее в соответствие гиперплоскости λ ацикличное сечение $\lambda \cap K$. Заметим, что график отображения $\Gamma(F)$, с одной стороны, гомеоморфен K, так как гиперплоскости попарно пересекаются лишь по $(n-2)$-плоскости T, но $T \cap K = \varnothing$, т. е. при проекции графика на образ никаких склеек не происходит, а с другой стороны, по теореме Вьеториса — Бегла $\tilde{H}^i(\Gamma(F)) \approx \tilde{H}^i(HP^1)$. Но известно [1], что $H^3(HP^1) \neq 0$, что противоречит ацикличности K. Следовательно, если K сильно гиперкомплексно выпуклый, но не гиперкомплексно выпуклый компакт, то любая $(n-2)$-плоскость T через точку x непременно пересекает K. По индукции, уменьшая n (при помощи переходов к сечениям, а именно: на втором шаге рассматриваем уже сильно гиперкомплексно выпуклый компакт $K \cap H^{n-1} \subset H^{n-1}$), при $n = 2$ точка x, не принадлежащая K, должна принадлежать компакту K, что противоречит выбору точки x.

Замечание 5. Аналогичным образом доказывается теорема 2, если компакт K заменить сильно гиперкомплексно выпуклой областью D.

Замечание 6. Согласно [5], образы проекции на прямые сильно линейно выпуклых множеств — дополнения к сечениям прямыми сопряженных множеств, и, очевидно, все образы проекций на q-мерные гиперкомплексные плоскости сильно гиперкомплексно выпуклых множеств также сильно гиперкомплексно выпуклы, так как их сечения прямыми ацикличны.

Теорема Хана — Банаха в гиперкомплексных пространствах. Теорема 3. *Пусть $D \subset H^n$ — сильно гиперкомплексно выпуклая область и M — гиперкомплексное линейное многообразие, не пересекающееся с D. Тогда существует гиперплоскость P, содержащая M и не пересекающаяся с D.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно ограничиться случаем, когда M проходит через начало координат. Пусть P — гиперкомплексное линейное многообразие максимальной размерности, которое содержит M и не пересекает область D. Для того чтобы доказать, что P является гиперплоскостью, достаточно показать, что фактор-пространство H^n/P гиперкомплексно одномерно. Рассмотрим каноническую проекцию $\pi: D \to F = H^n/P$. Образ $B = \pi(D)$, согласно замечанию 6,— непустая сильно гиперкомплексно выпуклая область, не содержащая начало координат. Поэтому, если $\dim_H F > 1$, где $\dim_H$ — гиперкомплексная размерность, то через начало координат, согласно теореме 2, можно провести гиперплоскость T, которая не пересекает область B. Справедливы включения $\pi^{-1}(T) \supset P \supset M$ и, следовательно, $\pi^{-1}(T)$ — гиперплоскость пространства H^n, не пересекающая B. Противоречие с максимальностью размерности P доказывает теорему. Обобщим теорему 3 на бесконечномерный случай.

Пусть $\mathscr{E}$ — топологическое векторное пространство над H (гиперкомплексное ТВП).

Определение 4. *Множество $A \subset \mathscr{E}$ назовем сильно гиперкомплексно выпуклым, если а) все сечения A произвольными гиперкомплексными прямыми ацикличны; б) все образы при канонических проекциях множества A удовлетворяют условию а).*

Заметим, что согласно замечанию 6 в конечномерном случае из условия а) следует условие б) и тогда определения совпадают.

Следующая теорема представляет собой гиперкомплексный вариант геометрической формы теоремы Хана — Банаха [6, 7].

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{E}$ — гиперкомплексное ТВП, A — непустое сильно гиперкомплексно выпуклое открытое множество в $\mathscr{E}$ и M — линейное многообразие, которое не пересекается с A. Тогда существует замкнутая гиперплоскость P, содержащая M и не пересекающаяся с A.*

Доказательство. Как и в теореме 3, ограничимся случаем, когда M проходит через начало координат. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех гиперкомплексных подпространств, содержащих M и не пересекающихся с A. Множество $\mathfrak{M}$ не пусто, так как по меньшей мере содержит M. Очевидно, что на множестве $\mathfrak{M}$ можно ввести отношение порядка ($M_1 \leqslant M$, если $M_1 \subset \subset M$). Если выберем в $\mathfrak{M}$ совершенно упорядоченное подмножество плоскостей $\mathfrak{N}$ (т.е. множество, любые два элемента M_1 и M_2 которого связаны отношением $M_1 \leqslant M_2$ или $M_2 \leqslant M_1$), то оно обладает максимальным элементом, а именно объединением $\bigcup\limits_{\tau \in \mathfrak{N}} M_\tau$.

Если $\overline{N} \in \mathfrak{M}$, то и $\overline{N} \in \mathfrak{M}$, так как A — открытое множество. Поэтому если P — максимальный элемент в $\mathfrak{M}$, то P замкнут. Покажем, что P — гиперплоскость. Это эквивалентно тому, что $\dim_H \mathscr{E}/P = 1$. Рассмотрим каноническую проекцию $\pi : \mathscr{E} \to F = \mathscr{E}/P$. Тогда согласно определению 4 $B = \pi(A)$ — непустое сильно гиперкомплексно выпуклое открытое множество в F, которое не содержит начала координат. Согласно максимальности P в F нет ненулевого гиперкомплексного векторного подпространства, которое не пересекало бы B. Покажем, что F — гиперкомплексно одномерное пространство. Предположим, что $\dim_H F \geqslant 2$. Проведем через начало координат произвольное двумерное линейное гиперкомплексное многообразие λ. По предположению, оно пересекает B. Тогда согласно определению $\pi^{-1}(\lambda) \cap A$ — сильно гиперкомплексно выпуклая область. Следовательно, $\lambda \cap B = \pi(\pi^{-1}(\lambda) \cap A)$ — сильно гиперкомплексно выпуклая область в λ, не содержащая начало координат. Согласно теореме 3, $\lambda \cap B$ — гиперкомплексно выпуклая область, поэтому в λ существует прямая l, проходящая через начало координат, которая не пересекает $\lambda \cap B$. Но тогда $\pi^{-1}(l)$ — замкнутое многообразие, которое, во-первых, не пересекает A и, во-вторых, содержит P как собственное подмногообразие. Но это невозможно, поскольку P выбран как максимальный элемент множества $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{E}$ — гиперкомплексное ТВП, A — открытое сильно гиперкомплексно выпуклое подмножество в $\mathscr{E}$, L — векторное гиперкомплексное подпространство в $\mathscr{E}$, не пересекающее A. Тогда существует такая непрерывная гиперкомплексно линейная форма f на $\mathscr{E}$, что $f(L) = 0$ и $f(A) \neq 0$, т.е. $f(x) = 0$ для $x \in L$ и $f(a) \neq 0$ для $a \in A$.*

Доказательство. Применим теорему 4 к L вместо M. Получим однородную гиперплоскость P, которая в силу своей замкнутости определяется уравнением $f(x) = 0$, где f — непрерывная гиперкомплексно линейная форма на $\mathscr{E}$. Так как $P \supset l$, то $f(l) = 0$ и, следовательно, P не пересекает A. Поэтому $f(A) \neq 0$.

Определение 5. *Опорной гиперплоскостью множества A в гиперкомплексном ТВП $\mathscr{E}$ назовем гиперплоскость L, содержащую по крайней мере одну точку из A и такую, что при канонической проекции $\mathscr{E}$ параллельно L точку $\pi(L)$ можно соединить в $\mathring{H} = \pi(\mathscr{E}) \cup \{\infty\}$ непрерывным путем с точкой (∞).*

Пусть f — ненулевая линейная форма на $\mathscr{E}$. Если гиперплоскость, заданная уравнением $f(x) = \alpha$, — опорная гиперплоскость множества A, то это эквивалентно тому, что $\alpha \in \partial f(A)$ и α — точка границы множества $f(A)$, достижимая путем из бесконечности. Иными словами, для того чтобы множество A обладало опорной гиперплоскостью, параллельной гиперплоскости, заданной уравнением $f(x) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы множество $\partial f(A)$ обладало конечными точками, достижимыми путем из бесконечности.

Предложение. *Пусть $\mathscr{E}$ — гиперкомплексное ТВП и A — непустое компактное множество в $\mathscr{E}$. Для каждой замкнутой гиперплоскости L в $\mathscr{E}$ существует опорная гиперплоскость множества A, параллельная L.*

Доказательство. В самом деле, пусть $f(x) = \alpha$ — уравнение, задающее гиперплоскость L. Так как f — непрерывная линейная форма на $\mathscr{E}$, то ее сужение на A непрерывно, а потому и ограниченно. Очевидно, что для компакта $f(A)$ существуют точки, достижимые путем из бесконечности. Чтобы показать это, достаточно заключить $f(A)$ в шар B с центром в нуле, взять произвольную трехмерную вещественную гиперплоскость, не пересекающую B, а потом приближать ее параллельно самой себе до касания с компактом $f(A)$. Любая из точек $f(A)$, лежащая на этой вещественной касательной гиперплоскости, достижима путем из бесконечности.

1. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М. : Наука, 1977.— 488 с.
2. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П., Макарова Л. Я.* О линейной выпуклости в $\mathbb{C}^n$ // Сиб. мат. журн.— 1968.— **9**, № 4,— С. 733—746.
3. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология.— М. : Мир, 1971.— 680 с.
4. *Зелинский Ю. Б.* Об одном критерии сильной выпуклости // Геометрическая теория функций и топологий. Киев : Ин-т математики АН УССР.— 1981.— С. 18—29.
5. *Мкртчян Г. А.* О гиперкомплексно выпуклых множествах.— Киев, 1987.— 16 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87. 42).
6. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства.— М. : Изд-во иностр. лит., 1959.— 412 с.
7. *Зелинский Ю. Б.* Теорема Хана — Банаха для сильно линейно выпуклых областей // Докл. расшир. заседаний семинара ИПМ ТГУ.— 1985.— **1**, № 1.— С. 79—81.

Ерев. ин-т нар. хоз-ва
Получено 16.05.88