УДК 512.544

Н. Ф. Кузенный, Н. Н. Семко

О метагамильтоновых группах с элементарным коммутантом ранга два

Изучается строение периодических метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга два, содержащих дополняемые подгруппы Миллера — Морено. Доказано, что существует четыре типа таких групп.

Вивчається будова періодичних метабелевих метагамільтонових груп з елементарним комутантом рангу два, маючих доповнювальні підгрупи Міллера — Морено. Доведено, що існує чотири типи таких груп.

Естественным и довольно значительным обобщением гамильтоновых групп являются метагамильтоновы группы, т. е. группы, у которых всякая неабелева подгруппа инвариантна. Изучение метагамильтоновых групп началось в [1] и было продолжено в [2—15]. В этих работах описание разрешимых ненильпотентных, непериодических нильпотентных, периодических неметабелевых и периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом опубликовано с доказательствами.

Настоящая статья посвящена изучению строения периодических метабелевых метагамильтоновых групп G с элементарным коммутантом G' непростого порядка. В силу теоремы 3 из [9] коммутант G' имеет ранг два или три. По теореме из [12] $G = H \times C$, где H — конечная метабелева p-группа с элементарным коммутантом непростого порядка, C — периодическая абелева группа. Следовательно, представляется естественным выделить следующие два случая, которые возможны для подгруппы H: 1) H не содержит дополняемых в ней подгрупп Миллера — Морено; 2) H содержит дополняемые в ней подгруппы Миллера — Морено. В работе дано полное описание периодических метабелевых метагамильтоновых групп $G = H \times C$ с элементарным коммутантом ранга два, подгруппа H которых удовлетворяет отмеченному выше случаю 2 ($*$-групп).

1. Р. 1 [16]. *Пусть G — метабелева группа, x, y, z — ее элементы, n — произвольное натуральное число. Тогда*

$$[x, y]^n = [x^n, y] = [x, y^n], \ (xy)^n = x^n y^n [x, y]^{-\frac{1}{2}n(n-1)}, \ [xy, z] = [x, z][y, z].$$

Р. 2 [17]. *Пусть G — p-группа Миллера — Морено, $|Z(G)| \neq p$. Тогда $G = \langle a, b\rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha + \beta \geqslant 3$ и G — группа одного из типов*: 1) $G = \langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle$, α, $\beta \geqslant 2$, при $\alpha = \beta = 2$ $p > 2$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$; 2) $G = \langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle$, $\alpha = \beta = p = 2$, $[a, b] = a^2$; 3) $G = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \rtimes \langle b\rangle$, $|c| = p$, $[a, b] = c$.

Р.3. *Пусть G — конечная метабелева p-группа с элементарным коммутантом G', $g \notin G'$, $|g| = p$. Тогда $G = X \rtimes \langle y\rangle$, где $y \neq 1$.*

Доказательство предложения почти очевидно.

Р. 4. *Пусть G — $*$-группа. Тогда выполняются следующие условия*: 1) *всякая неабелева подгруппа из G содержит G'*; 2) *всякая подгруппа Миллера — Морено из G типа 1—3 Р. 2*; 3) *G не содержит неабелевых подгрупп порядка p^3*; 4) *если M — подгруппа Миллера — Морено из G и найдутся такие элементы x из G и y из M, что подгруппа $\langle x, y\rangle$ неабелева, то $M \cap (\langle x, y\rangle) \neq \langle y\rangle$*; 5) *любые два неперестановочных элемента из G порождают подгруппу Миллера — Морено.*

Доказательство предложения непосредственно следует из теоремы 3 работы [8], Р. 2 и определения $*$-группы.

Р. 5 [15]. *Пусть $G = (\langle a\rangle \langle b\rangle)\langle x\rangle$ — метабелева p-группа с элементарным коммутантом, не содержащая неабелевых подгрупп порядка p^3, $|a| = p^\varepsilon$, $|b| = p^\Delta$, $|x| = p^\gamma$, $\varepsilon \geqslant \Delta \geqslant \gamma \geqslant 2$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = 1$, $(\langle a\rangle\langle b\rangle) \cap \langle x\rangle = \langle x^{p^{\gamma-1}}\rangle$, при $\varepsilon = \Delta$ $p > 2$, $\langle a\rangle\langle b\rangle \lhd G$. Тогда $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle) \rtimes \langle x_1\rangle$, где $|x_1| = p^{\gamma-1}$.*

2. Лемма 1 [15]. *Пусть G — $*$-группа, $G = A\langle z\rangle$, $A = \langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle$, $z^2 \in A$, $|a| = |b| = 4$, $[a, b] = a^2$. Тогда $G = A\langle x\rangle$, где $x \notin A$, $x^2 \in \langle b^2\rangle$ и выполняется одно из следующих условий*: 1) $x^2 = b^2$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2$; 2) $x^2 = b^2$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2b^2$; 3) $x^2 = b^2$, $[a, x] = 1$, $[b, x] = a^2b^2$; 4) $x^2 = 1$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2$; 5) $x^2 = 1$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2b^2$.

Группы типов 1—3 и 4—5 леммы 1 изоморфны.

Лемма 2. *Пусть G — $*$-группа и H — ее подгруппа, $H = A \rtimes \langle x\rangle$, A — группа типа 3 Р. 2. Тогда $H = H_1 \times \langle x_1\rangle$, где H_1 — группа типа 3 Р. 2.*

Доказательство. Положим $y_1 = a$, $y_2 = b$, $H_1 = \langle y_1, x\rangle$, $H_2 = \langle y_2, x\rangle$, где $A = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \rtimes \langle b\rangle$ и $[a, b] = c$. Понятно, что $H_1 =$

$= (\langle [y_1, x]\rangle \langle y_1\rangle) \rightthreetimes \langle x\rangle$, $H_2 = (\langle [y_2, x]\rangle \langle y_2\rangle) \rightthreetimes \langle x\rangle$ и $|A \cap H_1 \cap H_2| \leqslant p$. Так ввиду Р. 4 G' содержится в любой неабелевой подгруппе из G, $|G'| = p^2$, то из последнего соотношения имеем либо $H_1' = 1$, либо $H_2' = 1$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $H_1' = 1$. Значит, $[y_1, x] = 1$. Если $[y_2, x] = 1$, то, очевидно, H имеет искомое разложение. Предположим, что $[y_2, x] \neq 1$. Тогда по Р. 4 $H_2 = (\langle [y_2, x]\rangle \times \langle y_2\rangle) \rightthreetimes \langle x\rangle$, $\langle [y_2, x]\rangle \times \langle y_2\rangle \geqslant G'$ и потому $\langle c\rangle \times \langle y_2\rangle = \langle [y_2, x]\rangle \times \langle y_2\rangle$. Пусть $\langle c\rangle \neq \langle [y_2, x]\rangle$. Но тогда $[y_2, x] = c^i y_2^{jp^{\beta-1}}$, где $|y_2| = p^\beta$, $j \not\equiv 0 \pmod p$. Положим $x_1 = y_1^i x$. В силу Р. 1 $[y_2, x_1] = y_2^{jp^{\beta-1}}$, поэтому в G существует неабелева подгруппа $\langle y_2\rangle \langle x_1\rangle$. Так как $[y_1, x] = 1$, то $x_1^{p^\gamma} = y_1^{p^\gamma}$, где $|x| = p^\gamma$. Из этого следует, что $\langle y_2\rangle \langle x_1\rangle \cap A = \langle y_1^{p^\gamma}\rangle \times \langle y_2\rangle \ngeqslant G'$ — противоречие с Р. 4. Таким образом, $\langle c\rangle = \langle [y_2, x]\rangle$ и, значит, $[y_2, x] = c^i$, где $i = 1, \ldots, p-1$. Положим $x_2 = y_1^i x$. В силу Р. 1 $[y_2, x_2] = 1$. Пусть $|y_1| \leqslant |x|$. Тогда, очевидно, $H = A \times \langle x_2\rangle$ и, значит, требуемое разложение для H доказано. Пусть $|y_1| > |x|$ и $y_2 = u$, $x^{i_1} = v$, где $i_1 i \equiv 1 \pmod p$, $i_1 = 1, \ldots, p-1$. В силу Р. 1 $[u, v] = c$. Отсюда, очевидно, $H = (\langle c\rangle \times \langle u\rangle) \rightthreetimes \langle v\rangle$, а потому H имеет искомое разложение. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — конечная p-группа. Группа G является $*$-группой с циклически дополняемой подгруппой Миллера — Морено, когда $G = (\langle a\rangle \rightthreetimes \langle b\rangle) \rightthreetimes \langle x\rangle$, где $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$, $\alpha, \beta \geqslant 2$, $1 \leqslant \gamma \leqslant \min(\alpha, \beta)$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$ и выполняется одно из следующих условий: 1) $\gamma < \beta = \alpha$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = a^{sp^{\alpha-1}} b^{tp^{\beta-1}}$, $n^2 - tn - s \not\equiv 0 \pmod p$, $s, n = 1, \ldots, p-1$, $t = 0, \ldots, p-1$; 2) $\alpha \geqslant \beta$, $\gamma > \alpha$, при $\alpha = \beta = 2$ $p > 2$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = 1$; 3) $\alpha = \beta + 1$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = a^{sp^{\alpha-1}}$, $s = 1, \ldots, p-1$.*

Доказательство. Пусть $G = A \rightthreetimes \langle x\rangle$, где A — подгруппа Миллера — Морено из G, $|x| = p^\gamma$, $\gamma \geqslant 1$. Ясно, что A — группа типа 1 — 3 Р. 2. Так как $G' = A'[A, x]$, $|A'| = p$ [16, 17] и $|G'| = p^2$, то $[A, x] \ngeqslant A'$.

Пусть A — группа типа 3 Р. 2. Тогда $G = A_1 \times \langle x_1\rangle$. Из этого с учетом равенства $G' = A_1'$ и соотношения $|A_1'| = p$ [17] имеем $|G'| = p$, что противоречит определению $*$-группы. Следовательно, A — группа типа 1 или 2 Р. 2.

Пусть A — группа типа 2 Р. 2. Тогда $p = 2$, $\overline{G} = G/\langle x^2\rangle = (\langle \overline{a}\rangle \rightthreetimes \langle \overline{b}\rangle) \rightthreetimes \langle \overline{x}\rangle$ — группа из леммы 1. Значит, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2 b^2$. Если $\gamma = 1$, то нетрудно убедиться, что G — группа, для которой имеет место условие 1. Пусть $\gamma > 1$ и $d_1 = ab$, $d_2 = bx$. Тогда по Р. 1 $d_1^2 = b^2$, $d_2^2 = x^2 a^2$, $[d_1, d_2] = b^2$. Отсюда подгруппа $\langle d_1, d_2\rangle$ неабелева и по Р. 4 $\langle d_1, d_2\rangle \cap A \geqslant \langle d_2^{2^{\gamma-1}}\rangle$. Но $d_2^{2^{\gamma-1}} = x^{2^{\gamma-1}} a^{2^{\gamma-1}} \in A$, а потому $x^{2^{\gamma-1}} \neq 1 \in A$ — противоречие. Таким образом, если A — группа типа 1 Р. 2, то G — группа, для которой имеет место условие 1.

Пусть, наконец, A — группа типа 1 Р.2. Тогда $A = \langle a\rangle \rightthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha, \beta \geqslant 2$, при $\alpha = \beta = 2$ $p > 2$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$. Так как $A \geqslant G'$ и $Z(G) \geqslant G'$, то $G' = \langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}}\rangle$. Из этого следует $[a, x] = a^{\varepsilon p^{\alpha-1}} b^{fp^{\beta-1}}$, $[b, x] = a^{sp^{\alpha-1}} b^{tp^{\beta-1}}$, где $\varepsilon, f, s, t = 0, \ldots, p-1$, $\varepsilon + f + s + t \neq 0$. Поскольку, очевидно, $[A, x] \notin \langle a\rangle$, то $f + t \neq 0$.

Рассмотрим подгруппы $\langle a, x\rangle$ и $\langle b, x\rangle$. Ввиду Р. 4 имеем, что при $f = 0$ $\varepsilon = 0$, а при $s = 0$ $t = 0$. Далее, возможны следующие три случая: 1) $f = 0$; 2) $s = 0$; 3) $f, s = 1, \ldots, p-1$.

Случай 1. Очевидно, что $[a, x] = 1$ и $s = 1, \ldots, p-1$. Предположим, что $\alpha \geqslant \beta$. Положим $y = a^{sp^{\alpha-\beta}} b^t$. Так как $\langle a\rangle \ngeqslant [A, x]$, то $t \neq 0$. Ввиду Р. 1 $|y| = p^\beta$, $y^{p^{\beta-1}} = a^{sp^{\alpha-1}} b^{tp^{\beta-1}} [a, b]^k$, где $k = -\frac{1}{2} stp^{\alpha-1} \times (p^{\beta-1} - 1)$. Если для G не выполняется условие 1, то при $p = 2$ $\alpha > 2$, а потому $[a, b]^{-\frac{1}{2} st p^{\alpha-1}(p^{\beta-1}-1)} = 1$. Следовательно, $y^{p^{\beta-1}} = [b, x]$ и, значит, подгруппа $\langle y \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle$ неабелева, $\langle y \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle \not> G'$. Однако последнее утверждение противоречит Р. 4. Таким образом, $\beta > \alpha$.

Пусть $s_1 s \equiv 1 \pmod p$. Тогда, очевидно, $(s_1, p) = 1$, $\langle x \rangle = \langle x^{s_1} \rangle$. В силу Р. 1 $[a, x]^{s_1} = 1$, $[b, x]^{s_1} = a^{p^{\alpha-1}} b^{s_1 t p^{\beta-1}}$, где $s_1 t = 1, \ldots, p-1$. Не нарушая общности рассуждений, можно положить $s_1 t = t$. Пусть далее $d = ax$. Используя Р. 1, имеем $[b, d] = b^{tp^{\beta-1}}$, $d^{p^{\alpha-1}} = a^{p^{\alpha-1}} x^{p^{\alpha-1}}$. Из этого следует, что подгруппа $\langle b, d \rangle$ неабелева и потому в силу Р. 4 $d^{p^{\gamma_1}} \neq 1 \in A$. Но $d^{p^{\gamma_1}} = a^{p^{\gamma_1}} x^{p^{\gamma_1}}$ и, значит, $x^{p^{\gamma_1}} \in A$, т. е. $x^{p^{\gamma_1}} = 1$. Следовательно, $\gamma \leqslant \gamma_1$, $a^{p^{\gamma_1}} \neq 1$, т. е. $\alpha > \gamma$.

Положим $a_1 = b$, $b_1 = (ax)^{t_1}$, где $t_1 t \equiv 1 \pmod p$, $A_1 = \langle a_1, b_1 \rangle$. Нетрудно убедиться, используя Р. 1, что $b_1^{p^{\alpha-1}} = a^{t_1 p^{\alpha-1}}$, $|b_1| = p^{\alpha}$, $\langle b_1 \rangle \cap \langle a_1 \rangle = 1$, $|a_1| = p^{\beta}$, $[a_1, b_1] = a_1^{p^{\beta-1}}$, $A_1 = \langle a_1 \rangle \leftthreetimes \langle b_1 \rangle$. Отсюда $G = A_1 \leftthreetimes \langle x \rangle$, и потому при изменении обозначения образующих элементов группы G для нее выполняется условие 2 настоящей леммы.

Случай 2. Заменяя x на x^{f_1}, где $f_1 f \equiv 1 \pmod p$, в силу Р. 1 имеем $[b, x^{f_1}] = 1$, $[a, x^{f_1}] = a^{\varepsilon f_1 p^{\alpha-1}} b^{p^{\beta-1}}$. Следовательно, можно считать, что $[b, x] = 1$, $[a, x] = a^{\varepsilon p^{\alpha-1}} b^{p^{\beta-1}}$.

Предположим, что $\beta > \alpha$, $y = \alpha^{\varepsilon} b^{p^{\beta-\alpha}}$. Тогда, очевидно, $y^{p^{\alpha-1}} = [a, x]$ и в силу Р. 1 $[y, x] = [a, x]^{\varepsilon}$. Итак, $\langle y \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle \not> G'$ — что противоречит Р. 4, а потому $\varepsilon = 0$. Пусть $y_1 = ab$. Ввиду Р. 1 $y_1^{p^{\alpha}} = b^{p^{\alpha}} \neq 1$, $[y_1, x] = b^{p^{\beta-1}}$. Из этого следует, что $\langle y_1 \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle$ неабелева и потому по Р. 4 $\langle y_1 \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle > G'$ — противоречие. Следовательно, $\beta \leqslant \alpha$.

Пусть $b_1 = a^{\varepsilon p^{\alpha-\beta}} b$. Тогда в силу Р. 1 $|b_1| = p^{\beta}$, $[b_1, x] = [a, x]^{\varepsilon p^{\alpha-\beta}}$. Отсюда ввиду Р. 4 подгруппа $\langle b_1 \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle$ абелева, а потому либо $\varepsilon = 0$, либо $\alpha > \beta$. Понятно, что при $\alpha = \beta$ $\varepsilon = 0$ и, значит, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$. При $\alpha > \beta$, заменив b на b_1, в силу Р. 1 $[a, x] = b_1^{p^{\beta-1}}$, $[a, b] = [a, b_1]$, $[b_1, x] = 1$. Следовательно, всегда можно считать, что $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = 1$.

Пусть $d = bx^{p}$. В силу Р. 1 $[a, d] = a^{p^{\alpha-1}}$. Значит $[a, d] \neq 1$. Ввиду Р. 4 $\langle d \rangle \cap A \neq 1$, поэтому $d^{p^{\Delta}} \neq 1 \in A$. Так как, очевидно, $d^{p^{\Delta}} = b^{p^{\Delta}} x^{p^{\Delta+1}}$, то из последнего соотношения имеем $x^{p^{\Delta+1}} \neq 1$, $b^{p^{\Delta}} \neq 1$. Таким образом, $\beta > \Delta$, $\Delta + 1 \geqslant \gamma$ и потому $\beta \geqslant \gamma$.

Следовательно, при $\alpha > \beta$ для G справедливо условие 2 настоящей леммы. Пусть $\alpha = \beta$. Рассмотрим два подслучая: 2а) $\beta = \gamma$; 2б) $\beta > \gamma$.

2а) Положим $y_1 = ab$, $x_1 = bx$. В силу Р. 1 $y_1^{p^{\alpha-1}} = a^{p^{\alpha-1}} b^{p^{\beta-1}}$, $x_1^{p^{\alpha-1}} = b^{p^{\beta-1}} x^{p^{\gamma-1}}$, $[y_1, x_1] = a^{p^{\alpha-1}} b^{p^{\beta-1}}$. Из этого следует, что подгруппа $\langle y_1 \rangle \leftthreetimes \langle x_1 \rangle$ неабелева и потому по Р. 4 $\langle y_1 \rangle \leftthreetimes \langle x_1 \rangle > G'$ — противоречие.

2б) В этом подслучае $\gamma < \alpha = \beta$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = 1$. Используя лемму 1, имеем, что при $\alpha = \beta = 2$ $p > 2$. Следовательно, для G выполняется условие 2 настоящей леммы.

Итак, случай 2 полностью рассмотрен.

Случай 3. Заменяя x на x^{f_1}, где $f_1 f \equiv 1 \pmod p$, и рассуждая так же, как в начале случая 2, получаем $f = 1$. Рассмотрим далее три подслучая: 3а) $\beta > \alpha$; 3б) $\beta < \alpha$; 3в) $\beta = \alpha$.

3а) Положим $a_1 = ab$, $b_1 = a^{s} x$. Таким образом, переобозначая образующие элементы G, получаем, что 3а) сводится к 3б), поскольку $A = \langle a_1 \rangle \leftthreetimes \langle b_1 \rangle$.

3б) Положим $y = a^{sp^{\alpha-\beta}} b^{t}$. Ввиду Р. 1 $|y| = p^{\beta}$, $y^{p^{\beta-1}} = [b, x]$, $[y, x] = [b, x]^{t}$. Из этого с учетом Р. 4 следует, что подгруппа $\langle y \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle$ абелева. Значит, $t = 0$ и потому $[b, x] = a^{sp^{\alpha-1}}$.

Пусть $y_1 = a^p b$. Очевидно, что $|y_1| \geqslant p^\beta$, $y_1^{p^\beta} = a^{p^{\beta+1}}$, $[y_1, x] = [b, x]$. Если $\alpha > \beta + 1$, то $\langle y_1 \rangle \rightthreetimes \langle x \rangle \not\geqslant G'$ — противоречие с Р. 4. Итак, $\alpha = \beta + 1$. Пусть $b_1 = a^{\varepsilon p} b$. По Р. 1 $|b_1| = p^\beta$, $b_1^{p^{\beta-1}} = a^{\varepsilon p^{\alpha-1}} b^{p^{\beta-1}}$, $[a, b_1] = [a, b]$, $[a, x] = b_1^{p^{\beta-1}}$, $[b_1, x] = a^{sp^{\alpha-1}}$. Понятно, что $A = \langle a \rangle \rightthreetimes \langle b_1 \rangle$ и потому, заменив b на b_1, будем иметь $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$. Пусть $x_1 = bx^p$. Ввиду Р. 4 $\langle a, x_1 \rangle \cap A \neq \langle a \rangle$, поэтому $x_1^{p^\Delta} \neq 1 \in A$. Но, очевидно, $x_1^{p^\Delta} = b^{p^\Delta} x^{p^{\Delta+1}}$ и из последнего условия $x^{p^{\Delta+1}} = 1$, $b^{p^\Delta} \neq 1$. Таким образом, $\Delta + 1 \geqslant \gamma$, $\Delta < \beta$ и потому $\beta \geqslant \gamma$. Следовательно, в этом подслучае для G выполняются условия 3 настоящей леммы.

3в). Положим $b_1 = a^\varepsilon b$. Тогда по Р. 1 $|b_1| = p^\beta$, $[a, b] = [a, b_1]$. Отсюда, подгруппа $\langle a, b_1 \rangle$ неабелева и, очевидно, $A = \langle a \rangle \rightthreetimes \langle b_1 \rangle$. Таким образом, $[a, x] = b_1^{p^{\beta-1}}$ и потому, не умаляя общности, можно считать $\varepsilon = 0$, т. е. $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$. Пусть $d = bx^p$. Рассуждая так же, как в 3б), имеем $\beta \geqslant \gamma$.

Предположим $\beta = \gamma$, $y_1 = ab$, $x_1 = b^{1-s}x$. Тогда при $t = 0$ с учетом Р. 1 имеем $|y_1| = p^\alpha$, $|x_1| = p^\alpha$, $y_1^{p^{\alpha-1}} = a^{p^{\alpha-1}} b^{p^{\beta-1}}$, $x_1^{p^{\alpha-1}} = b^{(1-s)p^{\beta-1}} x^{p^{\gamma-1}}$. Но $x_1^{p^{\gamma-1}} \notin A$, поэтому $\langle y_1 \rangle \rightthreetimes \langle x_1 \rangle \not\geqslant G'$, что противоречит Р. 4. Итак, $t \neq 0$. Пусть теперь $y_1 = a^{-t} b$, $x_1 = a^{-s} x$. Ввиду Р. 1 $|y_1| = p^\alpha$, $|x_1| = p^\alpha$. Заменяя теперь y_1 на b, получаем, что $[b, x] = 1$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$. Это означает, что мы находимся в условиях случая 2, поэтому $\beta > \gamma$.

Пусть $y = a^i b^j$, где $i, j = 0, \dots, p-1$ и $i + j \neq 0$. Ввиду Р. 1 $|y| = p^\alpha$, $y^{p^{\alpha-1}} = a^{ip^{\alpha-1}} b^{jp^{\beta-1}}$, $[y, x] = a^{sjp^{\alpha-1}} b^{(i+jt)p^{\beta-1}}$. Нетрудно заметить, что $[y, x] \neq 1$. Предположим, что $[y, x] \in \langle y \rangle$. Тогда $[y, x] = y^{np^{\alpha-1}}$, где $n = 1, \dots, p-1$. Значит, $a^{inp^{\alpha-1}} b^{jnp^{\beta-1}} = a^{sjp^{\alpha-1}} b^{(i+jt)p^{\beta-1}}$. Из этого равенства получим систему сравнений

$$\begin{cases} ni - sj \equiv 0 \pmod p, \\ i + (t-n) j \equiv 0 \pmod p, \end{cases}$$

которая имеет решения тогда и только тогда, когда $n^2 - tn - s \equiv 0 \pmod p$. Так как по Р. 4 $[y, x] \notin \langle y \rangle$ $n^2 - tn - s \not\equiv 0 \pmod p$. Таким образом, для G выполняются условия 1 настоящей леммы. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — $*$-группа, $G = (\langle a \rangle \rightthreetimes \langle b \rangle) \rightthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$. Тогда $\alpha, \beta \geqslant 2$, $\gamma \geqslant 1$, $[a, x] = a^{\varepsilon p^{\alpha-1}} b^{fp^{\beta-1}}$, $[b, x] = a^{sp^{\alpha-1}} b^{tp^{\beta-1}}$, $\varepsilon, f, s, t = 0, \dots, p-1$, при $f = 0$ $\varepsilon = 0$, при $s = 0$ $t = 0$, $f + s \neq 0$ и выполняется одно из следующих условий: 1) $\alpha = \beta = p = 2$, $\gamma = 1$, $[a, b] = a^2$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2$; 2) $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$, при $\alpha = \beta = 2$ $p > 2$; 3) $|\alpha - \beta| = 1$, $[a, b] = 1$, $sf \not\equiv 0 \pmod p$, при $\alpha > \beta$ $t = 0$, при $\beta > \alpha$ $\varepsilon = 0$; 4) $\alpha = \beta$, $[a, b] = 1$, $sf \not\equiv 0 \pmod p$, $\varepsilon t - fs \not\equiv 0 \pmod p$, $n^2 - (\varepsilon + t) n + \varepsilon t - fs \not\equiv 0 \pmod p$, $n = 1, \dots, p-1$.*

Доказательство. Пусть $G = A \rightthreetimes \langle x \rangle$, где $A = \langle a \rangle \rightthreetimes \langle b \rangle$. Тогда $A \geqslant G'$, $\alpha, \beta \geqslant 2$, $\gamma \geqslant 1$, $x \in Z(G)$, $[A, x] = \langle [a, x], [b, x] \rangle$, и, значит, $[a, x] = a^{\varepsilon p^{\alpha-1}} b^{fp^{\beta-1}}$, $[b, x] = a^{sp^{\alpha-1}} b^{tp^{\beta-1}}$, где $\varepsilon, f, s, t = 0, \dots, p-1$. Если $f = 0$, то в силу Р.4 подгруппа $\langle a \rangle \rightthreetimes \langle x \rangle$ абелева и потому $\varepsilon = 0$. Аналогично, при $s = 0$ $t = 0$. Так как $|A'| = p$ и $G' = A'[A, x]$, то $[A, x] \neq 1$, и, значит, $f + s \neq 0$. Далее возможны два случая: 1) $[a, b] \neq 1$; 2) $[a, b] = 1$.

Случай 1. Очевидно, можно считать, что $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$. Отсюда, учитывая лемму 1, получаем, что выполняются условия 1 или 2 настоящей леммы.

Случай 2. Понятно, что в этом случае $G' = \langle [a, x], [b, x] \rangle$. Из этого следует, что $sf \not\equiv 0 \pmod p$ и $\langle [a, x] \rangle \cap \langle [b, x] \rangle = 1$. Пусть $l \equiv f_1 t \pmod p$, где $f_1 f \equiv 1 \pmod p$. Если $f_1 t \varepsilon \equiv s \pmod p$, то $t\varepsilon - fs \equiv 0 \pmod p$ и поэтому

$[a, x]^l = [b, x]$, что невозможно. Значит, $t\varepsilon - fs \not\equiv 0 \pmod p$. Пусть $\alpha > \beta$. Полагая $y = a^{sp^{\alpha-\beta}} b^t$, в силу Р.1 имеем $y^{p^{\beta-1}} = [b, x]$, $[y, x] = [b, x]^t$. Отсюда с учетом Р.4 подгруппа $\langle y \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle$ абелева и поэтому $t = 0$. Положим $y_1 = a^p b$. Тогда по Р.1 $y_1^{p^\beta} = a^{p^{\beta+1}}$, $[y_1, x] = a^{sp^{\alpha-1}}$. Отсюда при $a^{p^{\beta+1}} \neq 1$ $\langle y_1 \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle > G'$ — противоречие. Следовательно, $\alpha = \beta + 1$. Если же $\beta > \alpha$, то ввиду симметрии элементов a и b аналогично получаем, что $\varepsilon = 0$, $\beta = \alpha + 1$.

Таким образом, при $\alpha \neq \beta$ имеет место условие 3.

Пусть $\alpha = \beta$. Полагая $y = a^i b^j$, где $i + j \neq 0$, $i = 0, \dots, p-1$, $j = 0, \dots, p-1$ получаем $|y| = p^\alpha$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle = \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, где либо $z = a$, либо $z = b$. Очевидно, $[y, x] = 1$. Предположим, что $[y, x] \in \langle y \rangle$. Тогда по Р.1 $[y, x] = a^{(i\varepsilon+sj)p^{\alpha-1}} b^{(ji+tj)p^{\beta-1}} = y^{np^{\alpha-1}}$, где $n = 1, \dots, p-1$. Отсюда получаем систему сравнений

$$\begin{cases} ni \equiv \varepsilon i + sj \pmod p, \\ nj \equiv fi + tj \pmod p, \end{cases}$$

которая при заданных ограничениях на i, j, n совместна тогда и только тогда, когда $n^2 - (t + \varepsilon)\, n + \varepsilon t - fs \equiv 0 \pmod p$. Но, согласно Р. 4 $[y, x] \notin \langle y \rangle$, поэтому $n^2 - (t + \varepsilon)\, n + \varepsilon t - fs \not\equiv 0 \pmod p$. Итак, условие 4 настоящей леммы выполняется. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G — конечная p-группа. Группа G является $*$-группой с дополняемой подгруппой Миллера — Морено, когда $G = H \times C$, где H — группа типа 1—3 леммы 3, C — абелева группа.*

Доказательство. Пусть $G = A \leftthreetimes D$, где A — подгруппа Миллера — Морено из G. Согласно Р. 4 $D' = 1$. Обозначим через C наибольшую подгруппу из $Z(G) \cap D$, дополняемую в D. Тогда $D = B \times C$. Положим $G_1 = A \leftthreetimes B$. Понятно, что $G = G_1 \times C$, G_1 — $*$-группа и $[A, B] \notin A'$. Из этого следует, что $B = \langle x \rangle \times B_1$, где $[A, x] \notin A'$, $|x| = p^\gamma$. Полагая $H = A \leftthreetimes \langle x \rangle$, получаем, что H удовлетворяет условиям леммы 3 и, значит, является группой типа 1—3 этой леммы.

Предположим, что $B_1 \neq 1$. Тогда $B_1 = \langle y \rangle \times B_2$, где $y \neq 1$ и, значит, $D = (\langle x \rangle \times \langle y \rangle) \times B_2 \times C$. Покажем, что $\langle x \rangle \times \langle y \rangle = \langle x_1 \rangle \times \langle y_1 \rangle$, где $y_1 \neq 1 \in Z(G)$. Действительно,

$$[a, y] = a^{\varepsilon_1 p^{\alpha-1}} b^{f_1 p^{\beta-1}}, \quad [b, y] = a^{\Delta p^{\alpha-1}} b^{l p^{\beta-1}}$$

и по Р.4 при $f_1 = 0$ $\varepsilon_1 = 0$, при $\Delta = 0$ $l = 0$. Так как $y \notin Z(G)$, то $f_1 + \Delta \neq 0$. Пусть $i, j = 0, \dots, p-1$, $i + j \neq 0$, $d = x^i y^j$. Нетрудно заметить, что при заданных ограничениях на i, j $\langle x \rangle \times \langle y \rangle = \langle x_2 \rangle \times \langle d \rangle$, где либо $\langle x_2 \rangle = \langle x \rangle$, либо $\langle x_2 \rangle = \langle y \rangle$. Поскольку H — группа из леммы 3, то $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = a^{sp^{\alpha-1}} b^{tp^{\beta-1}}$, $s = 1, \dots, p-1$. Согласно Р.1

$$[a, d] = a^{j\varepsilon_1 p^{\alpha-1}} b^{(i+jf_1)p^{\beta-1}} \text{ и } [b, d] = a^{(si+\Delta j)p^{\alpha-1}} b^{(ti+lj)p^{\beta-1}}.$$

Отсюда с учетом того, что при любом f_1 найдутся числа i_0, j_0 такие, что $i_0 + f_1 i_0 \equiv 0 \,(p)$ имеем $[a, d_0] = a^{\varepsilon_1 j_0 p^{\alpha-1}}$, где $d_0 = x^{i_0} y^{j_0}$. Но тогда по Р.4 $\varepsilon_1 = 0$. Если же $[b, d_0] = 1$, то, очевидно, при $y_1 = d_0$ получим противоречие с максимальностью C. Итак, $[b, d_0] \neq 1$. Пусть $i_0 s + \Delta j_0 \equiv 0 \pmod p$. Тогда $\langle b \rangle \langle d_0 \rangle \not> G'$, что противоречит Р.4. Значит, $i_0 s + \Delta j_0 \not\equiv 0 \pmod p$. Полагая $z = a^{(si_0+\Delta j_0)p^{\alpha-\beta}} b^{(ti_0+lj_0)}$, по Р.1 имеем $|z| = p^\beta$, $[z, d_0] = [b, d_0]^{ti_0+lj_0}$ и $z^{p^{b-1}} = [b, d_0]$, если не выполняется равенство $\alpha = \beta = p = 2$. Отсюда по Р.4 подгруппа $[z] \leftthreetimes \langle d_0 \rangle$ абелева, поэтому $ti_0 + lj_0 \equiv 0 \pmod p$. Предположим, что $\alpha = \beta = p = 2$. Тогда $(\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle d \rangle$ — $*$-группа из леммы 1 и потому $ti_0 + lj_0 \equiv 0 \pmod p$. Следовательно, всегда $ti_0 + lj_0 \equiv 0 \pmod p$. А так как $i_0 \equiv -f_1 j_0 \pmod p$, $[b, d_0] \neq 1$, $si_0 + \Delta j_0 \not\equiv 0 \pmod p$, то $l - f_1 t \equiv 0 \pmod p$, $j_0 \not\equiv 0 \pmod p$, $\Delta - sf_1 \not\equiv 0 \pmod p$. Понятно, что при заданных ограничениях на i, j можно найти такие i_1, j_1, что $si_1 + \Delta j_1 \equiv 0 \pmod p$.

Положив $d_1 = x^{i_1}y^{j_1}$ и рассматривая подгруппу $\langle b, d_1\rangle$, в силу Р.4 будем иметь $si_1 + \Delta j_1 \equiv 0 \pmod p$ и $ti_1 + lj_1 \equiv 0 \pmod p$. Отсюда $sl - \Delta t \equiv \equiv 0 \pmod p$. Так как $l \equiv f_1 t \pmod p$, то из последнего равенства имеем $t(sf_1 - \Delta) \equiv 0 \pmod p$. Из этого с учетом $sf_1 \not\equiv \Delta \pmod p$ $t \equiv 0\ (p)$, поэтому $t = l = 0$. Нетрудно убедиться, что $[b, d_1] = 1$, а $[a, d_1] \neq 1$ и, значит, $i_1 + f_1 j_1 \not\equiv 0 \pmod p$. Итак, $[a, d_1] = b^{(i_1+j_1f_1)p^{\beta-1}}$, $[b, d_1] = a^{(i_1 s+\Delta j_1)p^{\alpha-1}}$ и потому $(\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle d_1\rangle$ — $*$-группа. Если $\alpha=\beta=2$, $p>2$, то в силу леммы 1 получаем противоречие с установленными выше соотношениями. Следовательно, при $\alpha = \beta = 2$ $p > 2$. По лемме 3 $\alpha \geqslant \beta$. Предположим, что $\alpha > \beta$. Полагая $z_1 = ab$ в силу Р.1 имеем $|z_1| = p^\alpha$, $z_1^{p^{\alpha-1}} = a^{p^{\alpha-1}}$, $[z_1, d_0] = = a^{(i_0 s+\Delta j_0)p^{\alpha-1}} \neq 1$. Отсюда по Р.4 $\langle z_1\rangle \leftthreetimes \langle d_0\rangle > G'$, что невозможно. Таким образом, $\alpha = \beta$. Очевидно, что для произвольных $s - 1$ и $\Delta - f_1$ найдутся i_2 и j_2, i_2, $j_2 = 0, \ldots, p-1$, $i_2 + j_2 \neq 0$ такие, что $(s-1)i_2 + + (\Delta - f_1) j_2 \equiv 0\ (p)$. Из этого следует, что $si_2 + \Delta j_2 \equiv i_2 + f_1 j_2 \pmod p$. Если $i_2 + f_1 j_2 \equiv 0 \pmod p$, то $d_2 = x^{i_2}y^{j_2}$. Полагая далее $y_1 = d_2$, получаем противоречие с выбором C. Итак, $i_2 + f_1 j_2 \equiv m \pmod p$, где $m \neq 0$. Положим теперь $z_2 = ab$. Ввиду Р.1 $|z_2| = p^\alpha$, $z_2^{p^{\alpha-1}} = a^{p^{\alpha-1}} b^{p^{\beta-1}}$, $[z_2, d_2] = = z_2^{mp^{\beta-1}}$. Отсюда, очевидно, $\langle z_2\rangle \leftthreetimes \langle d_2\rangle \not> G'$, что противоречит Р.4. Полученное противоречие показывает, что $B_1 = 1$. Таким образом, G удовлетворяет условиям леммы. Лемма доказана.

Теорема. *Группа G является $*$-группой тогда и только тогда, когда $G = H \times C$, где $H = \langle a, b, x\rangle$, $|a| = p^\alpha$, $\alpha \geqslant 2$, $|b| = p^\beta$, $\beta \geqslant \geqslant 2$, $|x| = p^\gamma$, $\gamma \geqslant 1$, C — периодическая абелева группа, экспонента силовской p-подгруппы которой не превышает $p^{\beta-1}$ и H удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $H = (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle x\rangle$, $\gamma < \alpha = \beta$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = = a^{sp^{\alpha-1}} b^{tp^{\beta-1}}$, $n^2 - tn - s \not\equiv 0 \pmod p$, s, $n = 1, \ldots, p-1$, $t = 0, \ldots, p-1$;

2) $H = (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle x\rangle$, $\gamma < \alpha \geqslant \beta$, *при* $\alpha = \beta = 2$ $p > 2$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = 1$;

3) $H = (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle x\rangle$, $\alpha = \beta + 1$, $\gamma < \alpha$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = a^{sp^{\alpha-1}}$, $s = 1, \ldots, p-1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть G — исследуемая группа. Тогда в силу теоремы из [12] $G = H_1 \times C_1$, где H_1 — конечная метабелева метагамильтонова p-группа с элементарным коммутантом порядка p^2, C_1 — периодическая абелева группа, экспонента силовской p-подгруппы которой меньше экспоненты любой подгруппы Миллера — Морено из H_1.

Так как H_1 содержит дополняемую в ней подгруппу Миллера — Морено (по определению $*$-групп), то, пользуясь леммами 4 и 5, получаем, что G имеет искомое разложение и H удовлетворяет условиям 1—3. Необходимость доказана.

Достаточность доказывается прямой проверкой. Теорема доказана.

Замечание. Пусть $G = H \times C$, где H — конечная метабелева метагамильтонова p-группа с элементарным коммутантом порядка p^2, C — периодическая абелева группа, экспонента силовской p-подгруппы которой меньше экспоненты любой подгруппы Миллера — Морено из H, H содержит дополняемые в ней неабелевы подгруппы. Тогда G является группой типа 1—3 теоремы.

Доказательство этого утверждения будет приведено в другой работе авторов.

1. *Ромалис Г. М.* О метагамильтоновых группах // Успехи мат. наук.— 1962.— 17, № 6.— С. 228—235.
2. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах. I // Мат. зап. Урал. ун-та.— 1966.— 5, № 3.— С. 45—49.

3. *Сесекин Н. Ф., Ромалис Г. М.* О метагамильтоновых группах. II // Там же.— 1968.— **6**, № 5.— С. 50—53.
4. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах. III // Там же.— 1970.— **7**, № 3.— С. 195—199.
5. *Черников С. Н.* Бесконечные неабелевы группы, у которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы // Укр. мат. журн.— 1971.— **23**, № 5.— С. 604—628.
6. *Нагребецкий В. Т.* Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна // Мат. зап. Урал. ун-та.— 1967.— **6**, № 1.— С. 80—88.
7. *Махнев А. А.* О конечных метагамильтоновых группах // Всесоюз. алгебр. симп. (Гомель, 1975) : Тез. докл.— Минск : Ин-т математики АН БССР, 1975.— С. 39.
8. *Махнев А. А.* О конечных метагамильтоновых группах // Мат. зап. Урал. ун-та.— 1976.— **10**, № 1.— С. 60—75.
9. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп // Мат. заметки.— 1983.— **34**, № 2.— С. 179—188.
10. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* Строение локально ступенчатых метагамильтоновы групп // XVII Всесоюз. алгебр. конф. (Минск, 1983): Тез. докл.— Минск : Ин-т математики АН БССР, 1983.— Ч. 2.— С. 214—215.
11. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* Строение метациклических метагамильтоновых групп (метод. рекомендации).— Киев : Киев. пед. ин-т, 1983.— 22 с.
12. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* О строении бесконечных нильпотентных периодических метагамильтоновых групп // Строение групп и их подгрупповая характеризация.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 101—111.
13. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение разрешимых метагамильтоновых групп // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 2.— С. 6—9.
14. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* О строении непериодических метагамильтоновых групп // Изв. вузов. Математика.— 1986.— **11**.— С. 32—39.
15. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 2.— С. 180—185.
16. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.
17. *Redei L.* Das «Schiefe Produkt» in Gruppentheorie mit Anwendungen... Cooment // Math. Helv.— 1947.— **20**.— S. 225—264.

НПО «Горсистемотехника», Киев

Получено 09.07.87