УДК 519.46

М. И. Кабенюк

Компактные элементы и подгруппы Картана связных групп Ли

Устанавливается, что количество компактных подгрупп Картана связной группы Ли определяется топологической величиной множества ее компактных элементов. Это обстоятельство объясняет строение тех связных групп Ли, в которых указанное множество всюду плотно.

Встановлюється, що кількість компактних підгруп Картана зв'язної групи Лі визначається топологічною величиною множини її компактних елементів. Ця обставина пояснює будову тих зв'язних груп Лі, в яких згадана множина всюди щільна.

Элемент g топологической группы G называется компактным, если g содержится в некоторой компактной подгруппе. Обозначим через Ω_G множество компактных элементов группы G, $\overline{\Omega}_G$ — его замыкание. Вопрос о строении локально компактных связных групп с плотным множеством компактных элементов, вероятно, впервые поставлен в работе [1]. Там же установлена компактность редуктивной группы Ли G с условием $G = \overline{\Omega}_G$. Затем этот вопрос рассматривался в [2], где было замечено, в частности, что для компактности связной полупростой группы Ли G достаточно, чтобы ее единичный элемент был внутренней точкой множества $\overline{\Omega}_G$. В [3] доказано, что для локально компактных связных групп G равенство $G = \overline{\Omega}_G$ выполняется тогда и только тогда, когда единичный элемент G является внутренней точкой множества $\overline{\Omega}_G$, причем связные группы Ли, обладающие одним из этих эквивалентных свойств, охарактеризованы в групповых терминах. По вине автора в следствии 2 и лемме 2 из [3], там, где говорится о внутренности множества $\overline{\Omega}_G$, пропущено условие, что в этой внутренности должна лежать единица группы G. Без этого уточнения оба утверждения теряют смысл. В связи с этим возникает вопрос: что можно сказать о связной группе Ли G, если внутренность множества $\overline{\Omega}_G$ не пуста и не содержит единицы G. Примером такой группы может быть группа $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$; внутренность множества $\overline{\Omega}_G$ в этом случае состоит из тех и только тех матриц a, для которых $|\operatorname{tr} a| < 2$. В настоящей статье такие группы будут охарактеризованы в терминах подгрупп Картана. Согласно [4], максимальная нильпотентная подгруппа H группы G называется подгруппой Картана, если каждый нормальный делитель конечного индекса в H имеет конечный индекс в своем нормализаторе в G. Привлечение подгрупп Картана позволяет описать и те связные группы Ли G, для которых $G = \overline{\Omega}_G$. Справедливы следующие утверждения, анонсированные в [5].

Теорема 1. *Следующие условия на связную группу Ли G равносильны: 1) внутренность множества $\overline{\Omega}_G$ не пуста; 2) внутренность множества $\overline{\Omega}_G$ не пуста; 3) некоторая подгруппа Картана группы G компактна.*

Теорема 2. *Пусть G — связная группа Ли. Равенство $G = \overline{\Omega}_G$ справедливо тогда и только тогда, когда все подгруппы Картана группы G компактны.*

Теорема 3. *В связной группе Ли G оба множества Ω_G и $G \setminus \Omega_G$ имеют непустую внутренность тогда и только тогда, когда в G есть как компактные, так и некомпактные подгруппы Картана.*

Теорема 4. *Если полупростая часть связной группы Ли G компактна, то одно из множеств Ω_G или $G \setminus \Omega_G$ нигде не плотно в G.*

В дальнейшем потребуются некоторые понятия и факты, связанные с подгруппами Картана. Пусть $\mathcal{G}$ — алгебра Ли связной группы Ли G, H — связная компонента единицы некоторой подгруппы Картана группы G. Тогда H однозначно определяет эту подгруппу Картана, а соответствующая ей подалгебра $\mathcal{H}$ в алгебре Ли $\mathcal{G}$ является подалгеброй Картана (т. е. нильпотентной подалгеброй, совпадающей со своим нормализатором в $\mathcal{G}$). Обратно, если $\mathcal{H}$ — подалгебра Картана в $\mathcal{G}$, то соответствующая ей связная подгруппа из G является связной компонентой единицы некоторой подгруппы Картана [4, гл. VI, § 5], в частности, она замкнута в G. Элемент $g \in G$ называется регулярным, если кратность собственного значения, равного единице, линейного оператора $\operatorname{Ad} g$ (действующего на алгебре Ли $\mathcal{G}$) минимальна. Множество $\operatorname{reg} G$ всех регулярных элементов группы G является открытым и плотным в G [6, гл. VII, § 4]. Элемент $a \in G$ регулярен тогда и только тогда, когда множество

$$\mathcal{G}(a) = \{u \in \mathcal{G} \mid (\operatorname{Ad} a - 1)^n (u) = 0\},$$

где n — достаточно большое целое положительное число, является подалгеброй Картана алгебры Ли $\mathcal{G}$ [6, гл. VII, § 4, предложение 8]. Далее следует [6, гл. VII, § 4], что множество $\operatorname{reg} H = H \cap \operatorname{reg} G$ является открытым и плотным в H.

Доказательству теорем предпошлем ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть $a \in \operatorname{reg} G$, H — связная подгруппа G, соответствующая подалгебре Картана $\mathcal{G}(a)$. Тогда отображение $f: G \times H \to G$, определяемое формулой $f(g, h) = g^{-1} ahg$, $g \in G$, $h \in H$, будет локально открытым в единице группы $G \times H$.*

Доказательство следует из [6, гл. VII, § 4, предложение 4].

Лемма 2. *Пусть H — связная компонента единицы некоторой подгруппы Картана группы G. Тогда множество $(\operatorname{reg} H)^G$ открыто в G. (Здесь $X^Y = \{x^y = y^{-1} xy \mid x \in X,\ y \in Y\}$.)*

Доказательство. Как отмечалось выше, множество $\operatorname{reg} H \neq \varnothing$.

Достаточно заметить, что это множество лежит внутри множества $(\operatorname{reg} H)^G$. Пусть $a \in \operatorname{reg} H$. Выберем такие окрестности единицы $U \subset G$, $V \subset H$, что $W = f(U, V)$ открыто в G (лемма 1) и $aV \subset \operatorname{reg} H$. Поскольку $a \in$

$\in W$, $W \subset (\operatorname{reg} H)^G$, то a — внутренняя точка множества $(\operatorname{reg} H)^G$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть a — регулярный элемент, содержащийся в некоторой подгруппе Картана со связной компонентой единицы H. Тогда подалгебра Ли, соответствующая подгруппе H, совпадает с $\mathcal{G}(a)$. В частности, регулярный элемент содержится не более чем в одной подгруппе Картана.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ — подалгебра, соответствующая H. Так как $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}(a)$ — подалгебры Картана алгебры Ли $\mathcal{G}$, то для доказательства равенства $\mathcal{H} = \mathcal{G}(a)$ достаточно проверить включение $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(a)$. Пусть $1 = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_s = H$ — такой ряд связных подгрупп нильпотентной группы H, что $[a, H_i] \subseteq H_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Такой ряд существует, ибо по условию a, H содержатся в нильпотентной подгруппе. Пусть $0 = \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{H}_s = \mathcal{H}$ — соответствующий ряд подалгебр. Тогда $(\operatorname{Ad} a - 1)\mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{H}_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Из этих включений и следуют сформулированные утверждения. Для их доказательства выберем в достаточно малой окрестности U нуля алгебры $\mathcal{G}$ элемент $u \in \mathcal{H}_i$. Тогда $\exp u \in H_i$ и, стало быть, $a^{-1} \exp ua = \exp uh$, $h \in H_{i-1}$. Пусть $h = \exp v$, где $v \in \mathcal{H}_{i-1}$. Учитывая формулу $a^{-1} \exp ua = \exp \operatorname{Ad} a(u)$ и формулу Кэмпбелла—Хаусдорфа, получаем $\exp(\operatorname{Ad} a(u)) = \exp u \exp v = \exp(u + v + w$, где w является суммой конечного (в силу нильпотентности $\mathcal{H}$) числа элементов из $[\mathcal{H}, \mathcal{H}_{i-1}]$. В силу выбора окрестности U отсюда следует, что $(\operatorname{Ad} a - 1)(u) \in \mathcal{H}_{i-1}$, а тогда и $(\operatorname{Ad} a - 1)(\mathcal{H}_i) \subseteq \mathcal{H}_{i-1}$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть H — связная компонента единицы некоторой подгруппы Картана группы G, K — связная характеристическая подгруппа H. Если $K \neq H$, то множество K^G нигде не плотно в G.*

Доказательство. Заметим сначала, что пересечение $H \cap K^G$ нигде не плотно в H. Поскольку множество $\operatorname{reg} H$ открыто и плотно в H, то достаточно убедиться в том, что $H \cap K^G \subseteq (H \setminus \operatorname{reg} H) \cup K$. Пусть $x \in H \cap K^G$ и x — регулярный элемент. Тогда $x \in H$ и $x \in K^g$ для некоторого $g \in G$. В частности, $x \in H^g$. Так как H^g — тоже связная компонента единицы некоторой подгруппы Картана группы G, то, поскольку x — регулярный элемент, $H^g = H$ (лемма 3). Отсюда, согласно условию, следует $K^g = K$, т. е. $x \in K$.

Предположим, что замыкание L множества K^G содержит внутренние точки. Пусть V — открытое множество, лежащее в пересечении $L \cap \operatorname{reg} G$. Заменяя, если это необходимо, V на сопряженное, можно считать, что $V \cap K \neq \varnothing$, в частности, $V \cap H \neq \varnothing$. В силу сказанного выше, можно так выбрать $a \in H$, окрестность U единицы в группе H и окрестность V' единицы группы G, что $aU \subseteq V$, $U \cap K^G = \varnothing$ и $W = f(U, V')$ (см. лемму 1) является окрестностью элемента a в группе G. Если $f(u, g) \in K^G$, то $g^{-1}aug \in K^G$ или $au \in K^G$, что противоречит условию $aU \cap K^G = \varnothing$. Следовательно, $W \cap K^G = \varnothing$. Последнее противоречит включениям $a \in V \subset L$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если H — связная компонента единицы некоторой подгруппы Картана связной группы Ли G, $f: G \to G'$ — сюръективный гомоморфизм групп Ли, то $f(H)$ — связная компонента единицы некоторой подгруппы Картана группы G'.*

Доказательство вытекает из соответствующего свойства подалгебр Картана алгебр Ли [6, гл. VII, § 2, следствие 2 предположения 4] и указанной выше связи между подалгебрами и подгруппами Картана.

Лемма 6. *Пусть H — связная компонента единицы некоторой подгруппы Картана связной группы Ли G. Если H компактна, то централизатор $C_G(H)$ совпадает с H, а нормализатор $N_G(H)$ компактен. В частности, подгруппа Картана, содержащая H, компактна.*

Доказательство. Заметим, что центр G в этом случае компактен и, стало быть, содержится в H. Пусть A — минимальная связная абелева подгруппа G, содержащая почти весь центр Z группы G [7, теорема 9].

Пусть $D = A \cap Z$. Тогда индекс $|Z : D| < \infty$ и фактор-группа $\bar{A} = A/D$ компактна. Пусть $\bar{G} = G/D$, $\bar{H}$ — образ H при каноническом гомоморфизме. Ввиду леммы 5 $\bar{H}$ — связная компонента единицы некоторой подгруппы Картана группы $\bar{G}$. Поскольку $\bar{A}$ компактна, то она сопряжена некоторой подгруппе $\bar{H}$ (так как сопряжены максимальные компактные подгруппы в $\bar{G}$ и максимальные торы в последних). Тогда для некоторого $x \in G$ имеет место включение $x^{-1}Ax \subseteq HD$. Так как связная компонента единицы центра компактна (она лежит в H), то компактна связная компонента единицы группы D, а значит и группы HD. В силу связности A отсюда следует, что A компактна, но тогда компактна и группа Z.

В случае, когда G — полупростая группа Ли, H является подгруппой Картана в G [8, предложение 1.4.]. Следовательно, H совпадает со своим централизатором и имеет конечный индекс в своем нормализаторе. Дальнейшее доказательство проведем индукцией по размерности G. Пусть A — минимальная связная коммутативная нормальная подгруппа группы G. Если A компактна, то она содержится в центре G, а тогда и в H. Переходя к фактор-группе $\bar{G} = G/A$ и учитывая индуктивное предположение и лемму 5, делаем вывод о компактности группы $N_{\bar{G}}(\bar{H})$. Следовательно, компактен и ее прообраз в G, совпадающий в этом случае с $N_G(H)$. Столь же легко заметить в этом случае, что условие $C_{\bar{G}}(\bar{H}) = \bar{H}$ влечет $C_G(H) = H$.

Пусть теперь группа A не является компактной. Тогда ввиду минимальности A не содержит нетривиальных компактных элементов. По индуктивному предположению $C_{\bar{G}}(\bar{H}) = \bar{H}$ (черта означает переход к образу в фактор-группе G/A). Если $C_G(H) \neq H$, то из коммутативности H следует $D = C_G(H) \cap A \neq 1$. Группа D является дискретной нормальной подгруппой связной группы Ли $F = HA$, причем фактор-группа F/D содержит большую чем HD/D компактную связную подгруппу. Последнее противоречит лемме 5. Следовательно, $C_G(H) = H$.

Пусть N — полный прообраз $N_{\bar{G}}(\bar{H})$ в группе G. Тогда связная компонента группы N совпадает с $F = HA$, фактор-группа N/F конечна, $N_G(H) \subseteq N$. Докажем, что в каждом смежном классе F_x, $x \in N$, содержится по модулю H не более одного элемента, нормализующего подгруппу H. Отсюда и будет следовать конечность индекса $N_G(H) : H$, а значит, и компактность $N_G(H)$. Пусть $H^{ax} = H$, $H^{a'x} = H$, где $a, a' \in A$. Тогда $a'a^{-1} \in N_G(H)$. В силу нормальности A последнее означает $a'a^{-1} \in C_G(H)$. Согласно предыдущему $a'a^{-1} \in H$, т. е. $a' = a$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть F — максимальная компактная подгруппа группы G. Из [7, теорема 11] следует связность группы F, там же доказано, что все подобные подгруппы сопряжены в G. Пусть K — максимальный тор F. Тогда K связна, и все такие подгруппы сопряжены в F. Следовательно, $\Omega_G = K^G$. Пусть H — связная компонента единицы некоторой подгруппы Картана, содержащая подгруппу K, такая, что в силу компактности K обязательно существует. Поскольку K — максимальная компактная подгруппа нильпотентной группы H, то K характеристична в H. Так как по условию множество $\bar{\Omega}_G$ содержит внутренние точки, то по лемме 4 $K = H$, а в силу леммы 6 группа Картана, содержащая H, компактна.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть H — компонента связности компактной подгруппы Картана группы G. Тогда по лемме 2 множество $(\operatorname{reg} H)^G$ открыто в группе G и не пусто. Следовательно, множество Ω_G содержит внутренние точки. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $G = \bar{\Omega}_G$, но группа G содержит компактную подгруппу Картана. Пусть H — ее связная компонента единицы. В силу леммы 6 H некомпактна. Пусть K — максимальная компактная подгруппа H. По лемме 2 H^G имеет непустую внутренность, в то же время, если $K \neq H$, то множество K^G нигде не плотно в G по лемме 4.

Следовательно, множество $M = H^G \setminus K^G$ имеет непустую внутренность. С другой стороны, из нильпотентности H вытекает, что множество $H \setminus K$, а значит, и M не имеет компактных элементов — противоречие с условием $G = \overline{\Omega}_G$.

Обратное утверждение будет доказано, если доказать компактность любого регулярного элемента группы G. Пусть $a \in G$ — регулярный элемент. Тогда множество $\mathscr{G}(a) = \{u \in \mathscr{G} \mid (\mathrm{Ad}\, a - 1)^n (u) = 0\}$, n — достаточно большое целое число, является подалгеброй Картана алгебры Ли $\mathscr{G}$. Из определения следует, что $\mathrm{Ad}\, a$ нормализует $\mathscr{G}(a)$. Тогда a нормализует связную подгруппу H, соответствующую $\mathscr{G}(a)$, т. е. $a \in N_G(H)$. По лемме 6 $N_G(H)$ компактен, а значит, компактен и элемент a. Теорема доказана.

Теорема 3 очевидным образом следует из теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 4. Пержде всего заметим, что если полупростая часть группы G компактна, то связные компоненты единицы подгрупп Картана сопряжены. Пусть H и H' — две такие подгруппы из G, R — разрешимый радикал G. Тогда в силу леммы 5 $\overline{H}$, $\overline{H}'$ — максимальные торы компактной группы $\overline{G}$ (черта означает образ при каноническом гомоморфизме). Пусть элемент $g \in G$ выбран так, что $\overline{g}^{-1} \overline{H}' \overline{g} = \overline{H}$. Тогда $g^{-1} H' g \subseteq HR$. Поскольку H и $g^{-1} H g'$ — связные компоненты некоторых подгрупп Картана разрешимой группы HR, то они сопряжены в HR [6, § 3, теорема 3)]. Пусть теперь множество Ω_G не является нигде не плотным в G. Тогда по теореме 1 G обладает компактной подгруппой Картана. Ввиду только что сделанного замечания о сопряженности компактными будут все подгруппы Картана. В доказательстве теоремы 2 замечено, что в этом случае компактны все регулярные элементы. Таким образом, $\mathrm{reg}\, G \subset \Omega_G$, т. е. $G \setminus \Omega_G \subseteq G \setminus \mathrm{reg}\, G$. Отсюда вытекает, что множество $G \setminus \Omega_G$ нигде не плотно. Теорема доказана.

1. *Платонов В. П.* Периодические и компактные подгруппы топологических групп // Сиб. мат. журн.— 1966.— **39**, № 4.— С. 854—877.
2. *Djoković D. Ž.* The union of compact subgroups of a connected locally compact group // Math. Z.— 1978.— **185**, N 2.— P. 99—105.
3. *Кабенюк М. И.* Связные группы с плотными множествами компактных элементов // Укр. мат. журн.— 1981.— **33**, № 2.— С. 179—183.
4. *Шевалле К.* Теория групп Ли. III.— М. : Изд-во иностр. лит., 1958.—307 с.
5. *Кабенюк М. И.* Компактные элементы и подгруппы Картана связных групп Ли // X Всесоюзный симпоз. по теории групп: Тез. докл.— Минск; Ин-т математики АН БССР, 1986.— 97 с.
6. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли, гл. VIII.— М. : Мир, 1978.— 342 с.
7. *Malcev A. I.* On the theory of the Lie groups in the large // Мат. сб.— 1945.— **16**, N 2.— С. 163—189.
8. *Warner G.* Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie groups. I.— Berlin etc.: Springer, 1972.—529 p.

Кемер. ун-т

Получено 25.04.88