УДК 517.9

С. В. Гонченко, Л. П. Шильников

Инварианты Ω-сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией

Найдены условия Ω-сопряженности двумерных диффеоморфизмов с нетривиальной структурой предельного множества в окрестности негрубой гомоклинической траектории.

Знайдені умови Ω-спряженості двовимірних дифеоморфізмів з нетривіальною структурою граничної множини в околі негрубої гомоклінічної траєкторії.

В предыдущей статье авторов [1] установлены необходимые условия топологической сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией. В настоящей статье найдены достаточные условия Ω-сопряженности диффеоморфизмов в окрестности негрубых гомоклинических траекторий.

Рассмотрим $\mathbb{C}^r$-гладкий, $r \geqslant 3$, диффеоморфизм T двумерного многообразия, удовлетворяющий следующим условиям: а) T имеет седловую неподвижную точку с собственными значениями λ, γ, где $0 < |\lambda| < 1 < |\gamma|$; б) седловая величина $\sigma = |\lambda\gamma| < 1$; в) T имеет негрубую гомоклиническую траекторию Γ, образованную касанием нечетного порядка $n \geqslant 1$ устойчивого W^s и неустойчивого W^u многообразий седловой точки.

Будем считать, что неподвижной точкой является начало координат O (0, 0).

Лемма 1. *Существует замена переменных класса $\mathbb{C}^r$ такая, что в достаточно малой окрестности S седловой неподвижной точки O (0, 0) отображение T имеет вид**

$$\bar{x} = \lambda x + f(x, y)\, x^2 y, \quad \bar{y} = \gamma y + g(x, y)\, x y^2. \tag{1}$$

Доказательство. Двумерное отображение класса $\mathbb{C}^r$, $r \geqslant 3$, в окрестности седловой неподвижной точки можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \lambda x + \varphi_1(x) + \psi_1(y)\, x + f_1(x, y)\, x^2 y, \\ \bar{y} &= \gamma y + \varphi_2(y) + \psi_2(x)\, y + g_1(x, y)\, x y^2, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\varphi_i(0) = \varphi_i'(0) = \psi_i(0) = 0$, $i = 1,2$. Чтобы привести (2) к виду (1), необходимо сделать 4 последовательных замены переменных: 1°. $\xi = x + h_1(y)\, x$, $\eta = y$; 2°. $\xi = x$, $\eta = y + h_2(x)\, y$; 3°. $\xi = x + h_3(x)$, $\eta = y$; 4°. $\xi = x$, $\eta = y + h_4(y)$; где $h_i(0) = 0$, $h_3'(0) = h_4'(0) = 0$, $i = 1, \ldots, 4$. Функции h_i подбираются с таким расчетом, чтобы замены 1°—4° устраняли члены $\psi_1(y)\, x$, $\psi_2(x)\, y$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ в (2). Нетрудно убедиться, что h_i должны удовлетворять следующим гомологическим уравнениям:

$$\begin{gathered} h_1(\gamma y + \varphi_2(y)) = \frac{\lambda h_1(y) - \psi_1(y)}{\lambda + \psi_1(y)}, \quad h_2(\lambda x + \varphi_1(x)) = \frac{\gamma h_2(x) - \psi_2(x)}{\gamma + \psi_2(x)}, \\ h_3(\lambda x + \varphi_1(x)) = \lambda h_1(x) - \varphi_1(x), \quad h_4(\gamma y + \varphi_2(y)) = \gamma h_2(y) - \varphi_2(y). \end{gathered} \tag{3}$$

Проиллюстрируем, как получаются эти уравнения на примере замены 1°. Имеем

$$\bar{\xi} = \bar{x} + h_1(\bar{y})\, \bar{x} \equiv \lambda x + \varphi_1(x) - x\,[\lambda h_1(y) - h_1(\gamma y + \varphi_2(y))\, (\lambda + \psi_1(y))] + \ldots, \tag{4}$$

где многоточием обозначены члены вида $r(\xi, \eta)\, \xi^2 \eta$. Так как $x = \xi\,(1 + h_1(\eta))^{-1}$, то, очевидно, в правых частях для $\bar{\xi}$ не будет членов вида $r(\eta)\, \xi$, если в (4) выражение в квадратных скобках тождественно равно ну-

* Вид (1) отображения $T|_S$ использован в [1].

лю. При этом $\varphi_1(x)$ принимает вид $\varphi_1(\xi(1+h_1(\eta))^{-1})\equiv\varphi_1(\xi)+[\varphi_1(\xi(1+h_1(\eta))^{-1})-\varphi_1(\xi)]=\varphi_1(\xi)+\ldots$.

Нетрудно показать, что каждое из уравнений в (3) допускает решение в классе $\mathbb{C}^r$-гладких функций. А именно, эти уравнения можно рассматривать в качестве функциональных соотношений, определяющих некоторые инвариантные многообразия отображений плоскости. Например, $\xi=h_1(y)$ — это уравнение инвариантной кривой отображения $\bar{\xi}=(\lambda\xi-\psi_1(y))(\lambda+\psi_1(y))^{-1}$, $\bar{y}=\gamma y+\varphi_2(y)$, которое имеет неустойчивое многообразие [2, 3], проходящее через неподвижную точку $(0,0)$ с собственными значениями 1 и γ,— инвариантную кривую искомого вида с $h_1\in\mathbb{C}^r$. Аналогично, $\xi=h_3(y)$ — уравнение инвариантной кривой отображения $\bar{\xi}=\lambda\xi-\varphi_1(x)$, $\bar{x}=\lambda x+\varphi_1(x)$. В переменных $(\xi',x)=(\xi+x,x)$ это отображение имеет вид $\bar{\xi}'=\lambda\xi$, $\bar{x}=\lambda x+\varphi_1(x)$. Оно допускает $\mathbb{C}^r$-линеаризацию в некоторой окрестности дикритического узла (0,0), и, следовательно, имеет $\mathbb{C}^r$-гладкую инвариантную кривую вида $\xi'=x+h_3(x)$, а исходное отображение — инвариантную кривую $\xi=h_3(x)$. Аналогично доказывается существование $\mathbb{C}^r$-гладких функций $h_2(x)$ и $h_4(y)$. Отметим, что подобные замены переменных в окрестности многомерного состояния равновесия типа седло-фокус проведены в [4].

Итак, будем предполагать, что $T|_S$ имеет вид (1). Выберем в S пару точек траектории $\Gamma: M^+(x^+,0)\in W^s_{\text{loc}}$ и $M^-(0,y^-)\in W^u_{\text{loc}}$. При этом существует натуральное m такое, что $T^mM^-=M^+$. Пусть Π_0 и Π_1 — достаточно малые прямоугольные окрестности точек M^+ и M^- соответственно. Отображение $\hat{T}=T^m:\Pi_1\to\Pi_0$ может быть представлено в виде [5, 6]

$$\bar{x}-x^+=F(x,y-y^-),\quad \bar{y}=G(x,y-y^-)\equiv$$
$$\equiv D(x,y)(y-y^--\varphi(x))^{n+1}+E(x,y)x.$$

Здесь в силу условия в) $F(0,0)=0$, $\dfrac{\partial^iG}{\partial y^i}(0,0)=0$, $i=0,\ldots,n$, $\dfrac{\partial^{n+1}G}{\partial_y{}^{n+1}}(0,0)=(n+1)!\,d$, где $d=D(0,y^-)\neq0$; $\varphi(0)=0$. Пусть также $E(0,y^-)\equiv\dfrac{\partial G}{\partial x}(0,0)=c$, где $c\neq0$.

Аналогично [7] можно показать, что для любого достаточно большого k отображение $T^k:\Pi_0\to\Pi_1$ определено и представимо в виде $x_1=\xi_k(x_0,y_1)$, $y_0=\eta_k(x_0,y_1)$, где $(x_i,y_i)\in\Pi_i$, $i=0,1$, и

$$\xi_k\equiv\lambda^kx_0+|\lambda|^k|\gamma|^{-k}\theta_k(x_0,y_1),\quad \eta_k\equiv\gamma^{-k}y_1+|\gamma|^{-2k}\psi_k(x_0,y_1),\qquad(5)$$

а функции θ_k и ψ_k и их производные любого порядка $\leqslant r$ равномерно ограничены по k. В силу (5) область определения отображения $T^k:\Pi_0\to\Pi_1$ представляет собой «прямоугольник» σ_k^0, а область значений — «прямоугольник» $\sigma_k^1=T^k\sigma_k^0$. Аналогично [8] выберем специальную окрестность $U_{\bar{k}}=U_{\bar{k}}(\bar{\Gamma})$ так, чтобы Π_0 и Π_1 содержали целиком σ_k^0 и σ_k^1 с номерами $k\geqslant\bar{k}$, и $\Pi_i\cap\sigma_k^i=\varnothing$, если $k<\bar{k}$. Пусть $\sigma_i=\bigcup\limits_{k=\bar{k}}^{\infty}\sigma_k^i$, $i=0,1$.

Множество траекторий (полутраекторий), целиком лежащих в $U_{\bar{k}}$, обозначим через $N_{\bar{k}}(N_{\bar{k}}^{\pm})$. Пару натуральных чисел (j_i,j_{i+1}) назовем допустимой, если в $N_{\bar{k}}(N_{\bar{k}}^{\pm})$ есть траектория (полутраектория), пересекающая последовательно $\sigma^1_{j_i}$ и $\sigma^1_{j_{i+1}}$. В [5, 8] показано, что при достаточно большом $\bar{k}$ в $N_{\bar{k}}(N_{\bar{k}}^{\pm})$ можно указать подсистему $\tilde{N}_{\bar{k}}(\tilde{N}_{\bar{k}}^{\pm})$ траекторий седлового типа (полутраекторий), допустимые пары которых удовлетворяют неравенствам

$$d\,[\gamma^{-j_{i+1}}y^{-} - c\lambda^{j_i}x^{+}] > S_1(|\lambda|^{j_i} + |\gamma|^{-j_{i+1}})\,|\gamma|^{-\bar{k}/(n+1)}. \tag{6}$$

Заметим, что при выполнении неравенства (6) пересечение $\hat{T}\sigma^1_{j_i}$ с $\sigma^0_{j_{i+1}}$ «грубое» и состоит из двух компонент связности. С другой стороны, $\hat{T}\sigma^1_{j_i} \cap \sigma^0_{j_{i+1}} = \varnothing$, если, например,

$$d\,[\gamma^{-j_{i+1}}y^{-} - c\lambda^{j_i}x^{+}] < -S_2(|\lambda|^{j_i} + |\gamma|^{-j_{i+1}})\,|\gamma|^{-\frac{\bar{k}}{n+1}}. \tag{7}$$

В зависимости от типа описания множества $N_{\bar{k}}$ можно выделить два принципиально различных случая: 1) $N_{\bar{k}}$ имеет простую структуру, т. е. $N_{\bar{k}}$ содержит только две траектории: седло $O\,(0, 0)$ и гомоклиническую траекторию Γ: 2) $N_{\bar{k}}$ содержит нетривиальные гиперболические подмножества. Первый случай имеет место при $d < 0$, $\gamma > 0$. У таких диффеоморфизмов, за исключением тех, у которых $\lambda > 0$, $c < 0$, множество $N^{+}_{\bar{k}}$ содержит континуум полутраекторий, асимптотически приближающихся к Γ. Это вытекает из того, что неравенство (6) допускает бесконечное множество решений вида $j_{i+1} > j_i$. В случае же $d < 0$, $\gamma > 0$, $\lambda > 0$, $c < 0$ неравенство (6) вообще не имеет решений, и траектория Γ не будет предельной. (Здесь $T\sigma^1_j \cap \sigma_0 = \varnothing$ для любого $j \geqslant \bar{k}$.) Для диффеоморфизмов с нетривиальными $N_{\bar{k}}$ возможны случаи полного и смешанного описаний траекторий. Если $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $c < 0$, $d > 0$, то траектории в $N_{\bar{k}}$ описываются полностью; все траектории за исключением Γ будут седловыми [5, 8]. Остальные случаи отвечают диффеоморфизмам со смешанным описанием, здесь в $N_{\bar{k}}$ наряду с гиперболическими подмножествами могут быть устойчивые или негрубые периодические траектории. Подробнее об этом см. [1, 6].

Рассмотрим пару диффеоморфизмов T_1 и T_2, удовлетворяющих а)—в). Отметим некоторые условия, заведомо необходимые для сопряженности диффеоморфизмов T_1 и T_2. Одно из них имеет вид

$$\operatorname{sign}\lambda_1 = \operatorname{sign}\lambda_2, \quad \operatorname{sign}\gamma_1 = \operatorname{sign}\gamma_2. \tag{8}$$

Далее, пусть $M^{+}_i(x^{+}_i, 0)$ и $M^{-}_i(0, y^{-}_i)$, $i = 1, 2,$ — произвольно выбранные пары точек траекторий Γ_1 и Γ_2. Тогда $T^{m_i}_i M^{-}_i = M^{+}_i$ для некоторых m_1 и m_2. По этим парам точек согласно изложенному выше определяем параметры c_i и d_i. Пусть $\alpha_i = \operatorname{sign} c_i \operatorname{sign}(\lambda_i\gamma_i)^{m_i}$, $\beta_i = \operatorname{sign} d_i \operatorname{sign}(\gamma_i)^{m_i}$. Значения индексов α и β, в отличие от знаков параметров c и d, не зависят от выбора гомоклинических точек. Если рассмотреть гомоклинические точки TM^{+}, M^{-} (или M^{+}, $T^{-1}M^{-}$), то знаки новых параметров c' и d' будут связаны со знаками c и d по формулам [5] $\operatorname{sign} c' = \operatorname{sign} c \operatorname{sign}\lambda\gamma$, $\operatorname{sign} d' = \operatorname{sign} d \operatorname{sign}\gamma$. Второе необходимое условие сопряженности T_1 и T_2 — это равенства

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2. \tag{9}$$

Только в этом случае будут совпадать знаки параметров c и d соответствующих при сопряжении пар гомоклинических точек.

В работе [1] с помощью величин $\theta = -\ln|\lambda|/\ln|\gamma|$ и $\tau = \frac{1}{\ln|\gamma|}\ln|cx^{+}/y^{-}|$ установлены необходимые условия топологической сопряженности диффеоморфизмов в окрестности негрубой гомоклинической траектории. Одно из таких условий — это равенство θ_1 и θ_2. Кроме него требовалось, вообще говоря, выполнение определенных соотношений для величин τ_1 и τ_2 (см. теоремы 1—3 в [1]), которые вычислялись по специально подобранным парам гомоклинических точек диффеоморфизмов T_1 и T_2.

Последнее обстоятельство связано с тем, что τ зависит от выбора гомоклинических точек [1]

$$\tau(T^s M^+, T^p M^-) = \tau(M^+, M^-) + (s-p)(1-\theta), \qquad (10)$$

где $\tau(M', M'')$ — величина τ, построенная по гомоклиническим точкам M' и M'', лежащим на W^s_{loc} и W^u_{loc} соответственно. Пусть $M_i \in W^u_{\text{loc}}$, $T^k M_i \in \in W^s_{\text{loc}}$ — пары точек траектории Γ, тогда из (10) вытекает

$$\tau(M_1, T^k M_1) = \tau(M_2, T^k M_2) = \tau(k). \qquad (11)$$

Введем новую величину τ_0, связанную с θ и τ таким образом: $\tau_0 \equiv \tau(k) - - k(1-\theta)$.

Лемма 2. *Величина τ_0 не зависит от выбора гомоклинических точек.*

Действительно, пусть $M^s_i \in W^s_{\text{loc}}$, $M^u_i \in W^u_{\text{loc}}$, $i = 1, 2$, — две пары точек траектории Γ. Тогда, очевидно, существуют такие целые k_1, k_2, k_3, что

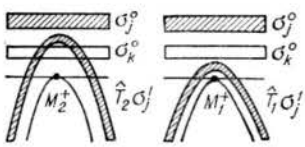

Рис. 1.

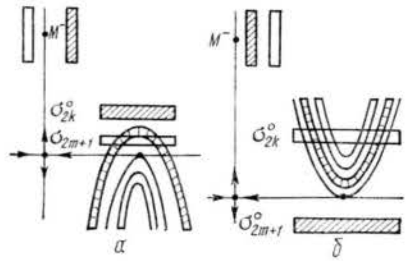

Рис. 2.

$M^s_i = T^{k_i} M^u_i$, $M^s_2 = T^{k_3} M^s_1$ и, следовательно, $M^u_2 = T^{k_3 - k_2 + k_1} M^u_1$. Из (10) и (11) получим

$$\tau(k_1) - k_1(1-\theta) = \tau(T^{-k_3} M^s_2,\ T^{k_2 - k_1 - k_3} M^u_2) - k_1(1-\theta) =$$

$$= \tau(M^s_2, M^u_2) + (-k_3 - k_2 + k_1 + k_3)(1-\theta) - k_1(1-\theta) = \tau(k_2) - k_2(1-\theta).$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что τ_0 также не зависит от гладких замен координат, сохраняющих вид (1) отображения $T|_S$.

Теорема 1. *Пусть T_1 и T_2 сопряжены. Тогда $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, и если не выполняется условие $\lambda_i > 0$, $\gamma_i > 0$, $c_i < 0$, то при иррациональном θ $\tau^1_0 = \tau^2_0$, а при θ рациональном и равном p/q*

$$s/q \leqslant \tau^i_0 \leqslant (s+1)/q, \quad i = 1, 2, \qquad (12)$$

для некоторого целого s.

Замечание. Если условия теоремы не выполняются, то, как следует из [1], существует бесконечное множество пар натуральных чисел j, k таких, что для одного из диффеоморфизмов, например T_1, $\hat{T}_1\sigma^1_j \cap \cap \sigma^0_k = \varnothing$, а для другого пересечения $\hat{T}_2\sigma^1_j$ с σ^0_k — «грубое» двусвязное (рис. 1). Такие пары (j, k) являются допустимыми для T_2 и недопустимыми для T_1, а при $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ удовлетворяют неравенству

$$\ldots - \tau^1_0 < k - j\theta < -\tau^2_0 + \ldots \qquad (13)$$

Если θ иррационально, то (13) допускает счетное множество целочисленных решений при $\tau^1_0 > \tau^2_0$. Если же $\theta = p/q$, то при выполнении условия (12) неравенство (13) не имеет решений в целых числах, а при нарушении этого условия ему будут удовлетворять, в частности, целочисленные решения уравнения $kq - jp = s'$, где s' равно либо s, либо $s+1$. Для диффеоморфизмов с простым описанием, за исключением случаев с $\lambda < 0$ при $\theta = p/q$, условия теоремы необходимы для сопряженности на множестве траекторий, ω-предельных к неблуждающим, а для диффеоморфизмов со смешанным описанием, кроме случаев, отвечающих $\gamma < 0$, $\lambda > 0$, $cd > 0$ при $\theta = p/q$,— для Ω-сопряженности. Если $\lambda < 0$, $\gamma > 0$, $d < 0$ при $\theta = p/q$ и не выполняется условие (12), то возможен следующий случай. Существует счетное множество чисел j, k таких, что $\hat{T}_1\sigma_j^1 \cap \sigma_k^0 = \varnothing$, $\hat{T}_2\sigma_j^1 \cap \sigma_k^0 \neq \varnothing$, но $\hat{T}_i\sigma_k^1 \cap \cap \sigma_0 = \varnothing$, $i = 1, 2$, (рис. 2, *a* иллюстрирует случай, когда j четное, k нечетное).

Такие T_1 и T_2 не сопряжены из-за того, например, что точка M_2^- в отличие от M_1^- принадлежит топологическому пределу множества последних точек на отрезках траекторий с описанием $[\ldots, j, k]$. Аналогичная ситуация имеет место и в случае $\gamma < 0$, $\lambda > 0$, $cd > 0$ при $\theta = p/q$. Но в данном случае «различающие» траектории можно выбрать в классе траекторий, ω-предельных к гомоклиническим (см. также теорему 3).

Теперь исследуем вопрос о достаточных условиях, при которых диффеоморфизмы со смешанным описанием будут Ω-сопряжены в некоторых специальных окрестностях гомоклинических траекторий. Сразу предположим, что выполняются соотношения (8) и (9), так как они, очевидно, не обходимы для Ω-сопряженности таких диффеоморфизмов. Предварительно докажем следующее утверждение.

Утверждение*. *Пусть T — диффеоморфизм со смешанным описанием и $\theta = p/q$, а $\tau_0 \neq s/q$ для любого целого s. Тогда существует такое натуральное $\bar{k}_0 = \bar{k}_0(\theta, \tau_0) \to \infty$ при $q \to \infty$ или $|\tau_0 - s/q| \to 0$, что $N_{\bar{k}_0} = \tilde{N}_{\bar{k}_0} \cup \Gamma$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $c > 0$, $d > 0$. В остальных случаях доказательство аналогично. Допустимые пары множества траекторий из $N_{\bar{k}_0} \setminus (\tilde{N}_{\bar{k}_0} \cup \Gamma)$ должны удовлетворять неравенствам, противоположным (6) и (7), т. е.

$$|\gamma^{-j_{i+1}}y^- - c\lambda^{j_i}x^+| < S_3(|\lambda|^{j_i} + |\gamma|^{-j_{i+1}})|\gamma|^{-\bar{k}_0/(n+1)}. \tag{14}$$

Прологарифмировав это неравенство, получим следующее: $|j_{i+1} - j_i\theta + \tau| < S_4|\gamma|^{-\bar{k}_0/(n+1)}$. Поскольку $\theta = p/q$ и $\tau \equiv \tau(m) = \tau_0 + m(1 - \theta)$, то последнее неравенство принимает вид $|(j_{i+1} + m) - (j_i + m)p/q + \tau_0| < S_4|\gamma|^{-\bar{k}_0/(n+1)}$. По условию теоремы $\tau_0 \neq s/q$, поэтому при достаточно большом $\bar{k}_0 = \bar{k}_0(\theta, \tau_0)$ данное неравенство не будет иметь целочисленных решений (прямая $j = ip/q - \tau_0$ при $\tau_0 \neq s/q$ находится на конечном зависящем от θ и τ_0 расстоянии от точек целочисленной решетки). Тем самым $N_{\bar{k}_0} = \tilde{N}_{\bar{k}_0} \cup \Gamma$.

Теорема 2. *Если $\theta_1 = \theta_2 = p/q$ и*

$$s/q < \tau_0^k < (s + 1)/q, \quad k = 1, 2, \tag{15}$$

для некоторого целого s, то диффеоморфизмы T_1 и T_2 будут Ω-сопряжены в некоторых окрестностях гомоклинических траекторий.

Доказательство. Выберем гомоклинические точки M_1^+, M_1^- и M_2^+, M_2^- траекторий Γ_1 и Γ_2 соответственно так, что

$$T_k^m(M_k^-) = M_k^+, \quad k = 1, 2, \tag{16}$$

для некоторого натурального m. Рассмотрим случай $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $c > 0$, $d > 0$. Диффеоморфизмы T_1 и T_2 удовлетворяют условиям утверждения, поэтому множества допустимых пар для $N_{\bar{k}_1}^1$ и $N_{\bar{k}_2}^2$ соответственно определяются неравенствами

$$\begin{aligned} &(j_{i+1} + m) - (j_i + m)p/q + \tau_0^1 < S_5|\gamma_1|^{-\bar{k}_1/(n_1+1)}, \\ &(j_{i+1} + m) - (j_i + m)p/q + \tau_0^2 < S_5|\gamma_2|^{-\bar{k}_1/(n_2+1)}. \end{aligned} \tag{17}$$

* См. также [7], где доказан аналогичный результат.

Так как выполняется условие (15), то неравенства (17) при достаточно большом $\overline{k}_1$ имеют одно и то же множество решений. Этим неравенствам, очевидно, эквивалентно такое:

$$(j_{i+1}+m)-(j_i+m)\,p/q+\hat{\tau}_0<0 \tag{18}$$

при условии $j_i,\ j_{i+1}\geqslant\overline{k}_1$, где $\hat{\tau}_0=s/q+1/2q$.

Обозначим через Ω фактор-систему, получаемую из топологической схемы Бернулли из трех символов $0, 1, 2$ путем отождествления траекторий $\omega_1=(\ldots,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,\ldots)$ и $\omega_2=(\ldots,0,\ldots,0,2,0,\ldots,0,\ldots)$. Рассмотрим подсистему $\Omega^1_{\overline{k}_1+m}\subset\Omega$, удовлетворяющую условиям: 1) $\Omega^1_{\overline{k}_1+m}$ содержит траекторию $(\ldots,0,\ldots,0,\ldots)$ и траекторию ω, «склеенную» из ω_1 и ω_2; 2) в $\Omega^1_{\overline{k}_1+m}$ нет траекторий, имеющих отрезки длины, большей единицы, составленные из отличных от 0 символов; 3) длина j_i+m отрезка из нулей, следующего за символом, отличным от 0, не менее $\overline{k}_1+m$; 4) для траекторий из $\Omega^1_{\overline{k}_1+m}$ выполняются условия (18).

Из настоящего рассмотрения вытекает, что $N^1_{\overline{k}_1}$ и $N^2_{\overline{k}_1}$ в этом случае сопряжены с $\Omega^1_{\overline{k}_1+m}$.

Аналогично проводится доказательство в оставшихся случаях. В зависимости от комбинаций знаков параметров λ, γ, c и d возможны 6 типов диффеоморфизмов со смешанным описанием (см. таблицу). При выполнении условий теоремы 2 диффеоморфизмы T_1 и T_2 будут Ω-сопряжены с некоторой подсистемой $\Omega^l_{\overline{k}_1+m}$, описанной ниже и удовлетворяющей, в частности, соотношениям 1—3. Здесь индекс l означает номер столбца в таблице, для определенности в каждом из столбцов будем рассматривать первую комбинацию знаков λ, γ, c и d. Пусть $j'_i=j_i+m$. Тогда $\Omega^l_{\overline{k}_1+m}$, $l=2,\ldots,6$, будут удовлетворять также условиям, аналогичным 4, связывающим длины j'_i и j'_{i+1} полных отрезков из нулей, разделенных ненулевым символом. Эти условия для $l=2,\ldots,6$, будут иметь следующий вид:

$$l=2:\begin{cases} j'_{i+1}<j'_i\theta-\hat{\tau}_0, \text{ где } j_i, j_{i+1} \text{ четные},\\ m \text{ четное при } \alpha=\beta=1 \text{ и нечетное при } \alpha=\beta=-1,\end{cases}$$

$$l=3:\begin{cases} \text{если } j_{i+1} \text{ четное, то } j'_{i+1}<j'_i\theta-\hat{\tau}_0,\\ m \text{ четное при } \alpha=\beta=-1 \text{ и нечетное при } \alpha=-\beta=-1,\end{cases}$$

$$l=4:\begin{cases} \text{если } j_j \text{ четное, то } j'_{i+1}>j'_i\theta-\hat{\tau}_0,\\ m \text{ четное при } \alpha=1 \text{ и нечетное при } \alpha=-1,\end{cases}$$

$$l=5\ (l=6):\begin{cases} \text{если } j_i \text{ четное (нечетное), то } j_{i+1} \text{ четное и } j'_{i+1}<j'_i\theta-\hat{\tau}_0,\\ \text{если } j_i \text{ нечетное (четное), то либо } j_{i+1} \text{ любое четное},\\ \text{либо } j'_{i+1}>j'_i\,\theta-\hat{\tau}_0,\\ m \text{ четное при } \beta=1 \text{ и нечетное при } \beta=-1.\end{cases}$$

Параметр	1	2		3		4		5		6	
		$\alpha=\beta$		$\alpha=-\beta$		$\beta=1$		$\alpha=1$		$\alpha=-1$	
λ	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−
γ	+	−	−	−	−	+	+	−	−	−	−
c	+	+	−	+	−	+	−	+	+	−	−
d	+	+	−	−	+	+	+	+	−	+	−

Теорема 3. *Пусть для отображений* T_1 *и* T_2 *выполнены условия* $\lambda > 0$, $\gamma < 0$, $cd > 0$ *и* $\theta_1 = \theta_2 = p/q$. *Предположим, что найдется* k, *для которого*

$$|\tau_0^i q - k| < 1, \quad i = 1, 2, \tag{19}$$

причем в случае $\alpha = \beta = 1$ k *— нечетное, а в случае* $\alpha = \beta = -1$ *нечетным является* $k - (p - q)$. *Тогда* T_1 *и* T_2 *будут* Ω*-сопряжены в некоторых окрестностях гомоклинических траекторий.*

Доказательство. Выберем гомоклинические точки так, чтобы выполнялись условия (16) и $c > 0$, $d > 0$. При этом m будет четным, если $\alpha = \beta = 1$, или нечетным, если $\alpha = \beta = -1$. Диффеоморфизмы T_1 и T_2 будут Ω-сопряжены, если оба неравенства в (17) имеют одно и то же множество решений в четных j_i и j_{i+1} (см. рис. 2, *б*). Пусть τ_0^1 и τ_0^2 удовлетворяют неравенствам (19) и $\alpha = \beta = 1$. В этом случае множества решений неравенств в (17) либо совпадают, либо отличаются на множество целочисленных решений уравнения $j_{i+1}q - j_i p = -(2r + 1) - m(q - p)$. Так как m четное, то это уравнение не может иметь решений в четных j_i и j_{i+1}. В случае $\alpha = \beta = -1$ аналогично получаем уравнение $j_{i+1}q - j_i p = -k - m(q - p)$, а так как здесь m нечетное, то в случаях 1) k четное, $(p - q)$ нечетное; 2) k нечетное, $(p - q)$ четное, это уравнение не имеет решений в четных числах.

1. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* Об арифметических свойствах топологических инвариантов систем с негрубой гомоклинической траекторией // Укр. мат. журн.—1987.—**39**, № 1.— С. 21—28.
2. *Kelley A.* The stable, senter-stable, senter, senter-unstable and unstable manifolds // J. Different. Equat.— 1967.— **3**, № 4.— P. 546—570.
3. *Hirsch M. W., Pugh C., Shub M.* Invariant manifolds // Lect. Notes Math.— 1983, N 5.— P. 1—149.
4. *Овсянников И. М., Шильников Л. П.* О системах с гомоклинической кривой седло-фокуса // Мат. сб.— 1986.— **130**, № 4.— С. 552—570.
5. *Гаврилов Н. К., Шильников Л. П.* О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. I, II // Там же.— 1972.— **88**, № 4.— С. 475—492; 1973.— **90**, № 1.— С. 139—157.
6. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми // Докл. АН СССР.— 1985.— **292**, № 5.— С. 1049—1053.
7. *Афраймович В. С., Шильников Л. П.* Об особых множествах систем Морса — Смейла // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1973.— **28**.— С. 181—214.
8. *Гонченко С. В.* Нетривиальные гиперболические подмножества систем с негрубой гомоклинической кривой // Методы качеств. теории диф. уравнений.— Горький, 1984.— С. 89—102.

НИИ прикл. математики и кибернетики
при Горьк. ун-те.

Получено 22.07.87