УДК 514.17

С. А. Пичугов

Относительная константа Юнга пространства L_p

Доказано, что для действительных пространств L_p [0, 1], $1 \leqslant p < \infty$, и l_p относительная константа Юнга равна $2^{-1/r}$, где $r = \max\{p, p(p-1)^{-1}\}$. Получены оценки сверху этой величины для конечномерных пространств l_p^n, точные в некоторых размерностях при $p \leqslant 2$.

Доведено, що для дійсних просторів L_p [0, 1], $1 \leqslant p < \infty$, і l_p відносна константа Юнга дорівнює $2^{-1/r}$, де $r = \max\{p, p(p-1)^{-1}\}$. Одержані оцінки зверху цієї величини для скінченновимірних просторів l_p^n, точні в деяких вимірностях при $p \leqslant 2$.

В настоящей работе вычислены относительная константа Юнга [1] действительных пространств L_p [0, 1], $1 \leqslant p < \infty$. При этом получены оценки сверху (в некоторых случаях точные) этих констант для пространств l_p^n действительных числовых n-мерных векторов $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ с нормой $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x^k|^p\right)^{1/p}$ при $1 \leqslant p < \infty$ и $\|x\|_\infty = \max\{|x^k|;\ k = 1, \dots, n\}$.

Пусть M — ограниченное множество нормированного пространства X с диаметром $d(M)_X = \sup\{\|x_1 - x_2\|;\ x_1, x_2 \in M\}$, $r_s(M)_X = \inf_{a \in M} \sup_{x \in M} \|x - a\|$, $r(M)_X = \inf_{a \in X} \sup_{x \in M} \|x - a\|$. Константой Юнга и соответственно относительной константой Юнга пространства X называют величины [1 — 3]

$$\mathcal{J}(X) = \sup\left\{\frac{r(M)_X}{d(M)_X};\quad M \subset X\right\},$$

$$\mathcal{J}_s(X) = \sup\left\{\frac{r_s(M)_X}{d(M)_X};\quad M \subset X, \quad M \text{ — выпуклое}\right\}.$$

Докажем предварительно некоторые L_p-неравенства, возможно представляющие и самостоятельный интерес.

Теорема 1. *Пусть $x_k, k = 1, \dots, n,$ — элементы комплексного пространства $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, где μ — конечная σ-аддитивная мера. Тогда для любых чисел $\alpha_k \geqslant 0$ таких, что $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, выполняются неравенства*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \|x_k - \bar{x}\|_p^r\right)^{1/r} \leqslant 2^{-1/r'} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \|x_i - x_j\|_p^r\right)^{1/r}, \tag{1}$$

где $\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, $r = \min\{p, p'\}$, $p' = p(p-1)^{-1}$.

Подобные неравенства при иных значениях r и с другими константами доказаны в [4]. При доказательстве (1) будем следовать идеям указанной работы.

Доказательство. Пусть L_{pq}^1—пространство векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_k \in L_p$, с нормой

$$\|x\|_{pq} = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \|x_k\|_p^q\right)^{1/q}, \quad 1 \leqslant q < \infty,$$

и $\|x\|_{p\infty} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \|x_k\|_p$, L_{pq}^2 — пространство матриц $[z_{ij}]_{i,j=1}^n$, $z_{ij} \in L_p$, с нормой $\|[z_{ij}]\|_{pq} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \|z_{ij}\|_p^q\right)^{1/q}$. Введем линейный оператор $T: L_{pq}^1 \to L_{pq}^2$ по формуле $Tx = [x_i - x_j]$. Оценим норму оператора:

$$\|Tx\|_{22} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \langle x_i - x_j, x_i - x_j \rangle\right)^{1/2} = \left(2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|x_i\|_2^2 - \right.$$

$$\left. - 2 \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|_2^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{2}\, \|x\|_{22}, \tag{2}$$

$$\|Tx\|_{1\infty} = \max_{i,j} \|x_i - x_j\|_1 \leqslant 2 \max_i \|x_i\|_1 = 2\|x\|_{1\infty}, \tag{3}$$

$$\|Tx\|_{\infty\infty} = \max_{i,j} \|x_i - x_j\|_\infty \leqslant 2\|x\|_{\infty\infty}. \tag{4}$$

Применим теорему Риса — Торина интерполяции линейных операторов в пространствах со смешанной L_p-нормой [5]. Интерполируя (2) и (3), (2) и

(4), получаем

$$\|T\|_{pr'\to pr'} \leqslant 2^{1/r}. \tag{5}$$

Найдем сопряженный оператор $T^*: L^2_{p'q'} \to L^1_{p'q'}$:

$$\langle T^*[z_{ij}], x\rangle = \langle [z_{ij}], Tx\rangle = \langle [z_{ij}], [x_i - x_j]\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j \langle z_{ij}, x_i - x_j\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (z_{ij} - z_{ji}), x_i\rangle.$$

Таким образом, $T^*[z_{ij}] = \left\{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (z_{ij} - z_{ji})\right\}_{i=1}^{n}$. Тогда значение оператора T^* на элементе Tx равно

$$T^*Tx = T^*[x_i - x_j] = \left\{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j ((x_i - x_j) - (x_j - x_i))\right\}_{i=1}^{n} = 2(x - \bar{x}).$$

Теперь, применяя (5), получаем (1):

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \|x_k - \bar{x}\|_p^r\right)^{1/r} = \|x - \bar{x}\|_{pr} = 2^{-1} \|T^*Tx\|_{pr} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-1} \|T^*\|_{pr\to pr} \|Tx\|_{pr} = 2^{-1} \|T\|_{p'r'\to p'r'} \|Tx\|_{pr} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-1+1/r} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j \|x_i - x_j\|_p^r\right)^{1/r}.$$

Т е о р е м а 2. *Для относительных констант Юнга действительных пространств l_p^n выполняются неравенства*

$$\mathcal{J}_s(l_p^n) \leqslant \frac{1}{\sqrt[r']{2}} \sqrt[r]{\frac{n}{n+1}}, \quad r = \min\{p, p'\}. \tag{6}$$

В случае n таких, что существует матрица Адамара размерности $n+1$ [6], *при $p < 2$ в* (6) *имеет место знак равенства.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для выпуклого множества $M \subset l_p^n$ функция $f(x, a) = \|x - a\|_p$, $x, a \in M$, при любом фиксированном x является, очевидно, выпуклой и непрерывной по a. Используя обобщенный вариант теоремы о минимаксе [7], получаем

$$r_s(M)_p = \inf_{a\in M} \sup_{x\in M} \|x - a\|_p = \sup_{\left\{\alpha_k\geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k = 1\right\}} \ \sup_{x_k\in M} \inf_{a\in M} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \|x_k - a\|_p.$$

Применяя к правой части последовательно неравенство Йенсена для вогнутой функции $\varphi(t) = t^{1/r}$ и (1), получаем (6):

$$r_s(M)_p \leqslant \sup_{\left\{\alpha_k\geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k = 1\right\}} \ \sup_{x_k\in M} \inf_{a\in M} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \|x_k - a\|_p^r\right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\left\{\alpha_k\geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k = 1\right\}} \ \sup_{x_k\in M} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \|x_k - \bar{x}\|_p^r\right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-1/r'} \sup_{\left\{\alpha_k\geqslant 0\ \sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k = 1\right\}} \left(\sum_{i\neq j} \alpha_i\alpha_j\right)^{1/r} d(M)_p = 2^{-1/r'} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/r} d(M)_p.$$

Так как, очевидно, $\mathcal{J}_s(X) \geqslant \mathcal{J}(X)$, то случай равенства следует из [3], где доказаны соответствующие равенства для $\mathcal{J}(l_p^n)$.

Следствие. *Для действительных пространств l_p и $L_p[0, 1]$, $1 \leqslant p < \infty$,*

$$\mathcal{J}_s(l_p) = \mathcal{J}_s(L_p[0, 1]) = \mathcal{J}(l_p) = \mathcal{J}(L_p[0, 1]) = 2^{-1/r'}.$$

Доказательство следует из соотношения [2]

$$\mathcal{J}_s(l_p) = \mathcal{J}_s(L_p[0, 1]) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_s(l_p^n),$$

теоремы 2 и равенства [3] $\mathcal{J}(l_p) = \mathcal{J}(L_p[0, 1]) = 2^{-1/r'}$.

1. *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли.— М.: Мир, 1963.— 160 с.
2. *Amir D.* On Jung's constant and related constants in normed lenear spaces // Pacif. J. Math.—1985.— **118**, N 1.— P. 1—15.
3. *Пичугов С. А.* Константа Юнга пространства L_p // Мат. заметки.— 1988.— 43, № 5.— С. 604—614.
4. *Williams L. R., Wells J. H.* L_p-inequalities // J. Math. Anal. and Appl.— 1978.— **64**, N 3.— P. 518—529.
5. *Benedeck A., Panzone R.* The spaces L_p with mixed norm // Duke Math. J.— 1961.— **28**.— P. 301—324.
6. *Холл М.* Комбинаторика.— М. : Мир, 1970.— 536 с.
7. *Tanimoto S.* Uniform approximation and generalized minimax theorem // J. Approxim. Theory.— 1985.— **45**.— P. 1—10.

Днепропетр. ун-т

Получено 23.05.88