УДК 517.944

В. Б. Мосеенков

Начально-краевая задача конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости при наличии осевой симметрии. I. Однозначная разрешимость в целом

Изучается начально-краевая задача конвекции вязкой термически неоднородной слабо сжимаемой жидкости, заполняющей полость в твердом теле. Доказана теорема о ее однозначной разрешимости в целом (по времени). Для решения задачи предложен сходящийся итерационный процесс специального вида.

Досліджується початково-крайова задача конвекції в'язкої термічно неоднорідної слабко стисливої рідини, що заповнює порожнину в твердому тілі. Доведена теорема про її однозначну розв'язність у цілому (за часом). Для розв'язування задачі запропонований збіжний ітераційний процес спеціального вигляду.

1. Если вязкая термически неоднородная слабо сжимаемая жидкость заполняет полость $\Pi_1 \times [0, 2\pi]$ в твердом теле $\Pi_2 \times [0, 2\pi]$, где $\Pi_1 = \{(r, z) \mid 0 < \delta < r < 1,\ h_1 < z < h_2\}$, $\Pi_2 = \{(r, z) \mid 0 \leqslant r < R,\ H_1 < z < H_2\}$, $R > 1$, $[h_1, h_2] \subset (H_1, H_2)$, то конвективный теплообмен в ней описывается, как известно [1], системой уравнений

$$\operatorname{div} v = \varepsilon \frac{d\tau}{dt} \quad (\text{в } \Pi_1^T), \tag{1}$$

$$\frac{dv^r}{dt} - \nu\left(\Delta v^r - \frac{v^r}{r^2}\right) = -\frac{q_r}{\rho} - \varepsilon B^r(v, \tau) + 2\varepsilon\left(\frac{d\tau}{dt}\right)_r + F_1^r \quad (\text{в } \Pi_1^T), \tag{2}$$

$$\frac{dv^z}{dt} - \nu\Delta v^z = -\frac{q_z}{\rho} - \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) - \varepsilon B^z(v, \tau) + 2\varepsilon\left(\frac{d\tau}{dt}\right)_z + F_1^z \quad (\text{в } \Pi_1^T), \tag{3}$$

$$\sigma\frac{d\tau}{dt} - \operatorname{div}(\varkappa \nabla \tau) = \varepsilon\widetilde{\Phi}_1(v) + F_2 \quad (\text{в } \Pi_2^T), \tag{4}$$

$$-\Delta q = -\tau_z + \widetilde{\Phi}_2(v) + \varepsilon C(v, \tau) - \operatorname{div}\overline{F}_1 \quad (\text{в } \Pi_1^T), \tag{5}$$

где t — время, (r, φ, z) — цилиндрические координаты (все функции в (1) — (5) не зависят от угла φ), τ — температура, $v = (v^r, v^z)$ — скорость, q — разность между истинным и гидростатическим давлениями; $\rho = \rho(\varepsilon\tau)$ — плотность ($\rho(0) = 1$), $\nu = \nu(\varepsilon\tau)$ — кинематическая вязкость ($\nu(0) = 1$), $\varkappa = \varkappa(\varepsilon\tau, \varepsilon\nabla\tau)$ — коэффициент теплопроводности (постоянный в $\Pi_2 \setminus \overline{\Pi}_1$ и равный $P_2 > 0$), $\varkappa(0, 0, 0) \equiv P_1$, $\overline{F}_1 = (F_1^r, F_1^z)$ и F_2 — внешние возмущения; ε — малый положительный параметр (равный нулю в $\Pi_2 \setminus \overline{\Pi}_1$); $\sigma = 1$, если $(r, z) \in \Pi_1$, $0 < \sigma = \text{const}$, если $(r, z) \in \Pi_2 \setminus \overline{\Pi}_1$;

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v\cdot\nabla, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \operatorname{div} v = r^{-1}[(rv^r)_r + (rv^z)_z],$$

$$\Delta = \operatorname{div}\nabla,$$

$$B(v, \tau) = (2v_r^r\tau_r + (v_z^r + v_r^z)\tau_z,\ \ (v_z^r + v_r^z)\tau_r + 2v_z^z\tau_z),$$

$$\widetilde{\Phi}_1(v) = 2[(v_r^r)^2 + (r^{-1}v^r)^2 + (v_z^z)^2] + (v_z^r + v_r^z)^2,$$

$$\widetilde{\Phi}_2(v) = (v_r^r)^2 + (v_z^z)^2 + 2v_z^r v_r^z,$$

$$\varepsilon C(v, \tau) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\rho + \tau\right)_z - \overline{F}_1 \cdot \nabla \rho + (\rho - 1)\widetilde{\Phi}_2(v) + \nabla \rho \cdot (v \cdot \nabla) v +$$

$$+ \rho (v \cdot \nabla) \operatorname{div} v - \nu\rho\Delta \operatorname{div} v - \nabla(\nu\rho) \cdot \Delta v + \varepsilon \operatorname{div}(\rho B(v, \tau)) - 2\varepsilon\rho\Delta \frac{d\tau}{dt} = O(\varepsilon).$$

Здесь все параметры безразмерные [1], $O(\varepsilon)$ — малая величина порядка ε индекс снизу означает дифференцирование по соответствующей переменной. Все результаты, приведенные ниже, справедливы для произвольных областей Π_1 и Π_2 с достаточно гладкими границами такими, что $\overline{\Pi}_1 \subset \Pi_2$ и Π_1 отстоит от оси вращения Oz.

При выводе системы (1)—(5) из общих уравнений сохранения массы, импульса и энергии предполагалось, что все реологические и теплофизические параметры жидкости являются известными медленно меняющимися функциями температуры (в этом состоит существенное ее отличие от моделей, изучавшихся в [2, 3], где плотность ρ —неизвестная функция). При условии, что

$$\lim_{\xi \to 0} \xi^{-1}(1 - \rho(\xi)) = 1,$$

система (1)—(5) обобщает и уточняет модель Буссинеска [4], которая получается из (1)—(5) предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ (обобщает она и задачи, исследованные в [5, 6]). Система (1)—(5) является модельной в том смысле, что некоторые известные константы в ней ($\rho'(0)$, $\nu'(0)$ и др.) приняты равными единице [1].

Неизвестные функции v, τ и q подчиним обычным [4—6] начально-краевым условиям

$$v|_{t=0} = v_0 \ ((r, z) \in \Pi_1), \quad \tau|_{t=0} = \tau_0 \ ((r, z) \in \Pi_2), \tag{6}$$

$$v \cdot n|_{\partial\Pi_1^T} = (\operatorname{rot} v)^\varphi|_{\partial\Pi_1^T} = q|_{\partial\Pi_1^T} = 0, \tag{7}$$

$$[\tau]_{\partial\Pi_1^T} = \left[\varkappa \frac{\partial\tau}{\partial n}\right]_{\partial\Pi_1^T} = \tau|_{\partial\Pi_2^T} = 0, \tag{8}$$

где n — нормаль к стенке $\partial\Pi_1$ твердого тела, $[\tau]$ — скачок функции τ на $\partial\Pi_1^T$, $\partial\Pi_1^T = \partial\Pi_1 \times (0, T]$, $\partial\Pi_1 = \overline{\Pi}_1 \setminus \Pi_1$.

Асимптотическое решение задачи (1) — (8) будем искать в виде

$$v = \overset{0}{v} + \varepsilon \nabla u \quad \left(\overset{0}{v}{}^r = \frac{\psi_z}{r}, \ \overset{0}{v}{}^z = -\frac{\psi_r}{r}\right), \tag{9}$$

где (ψ, τ, q, u) — решение начально-краевой задачи

$$D\psi_t - r\partial(\psi, r^{-2}D\psi) - D_\nu D\psi =$$

$$= r\left\{F_1 - \frac{1}{\varepsilon}(\mathrm{P}(\varepsilon\tau))_r - \varepsilon[\nabla \cdot (U(\psi, \tau) + V(\psi, u)) + \partial(q, \tau)]\right\}, \tag{10}$$

$$\sigma[\tau_t - r^{-1}\partial(\psi, \tau)] - \operatorname{div}(\varkappa \nabla \tau) = F_2 + \varepsilon[\Phi_1(\psi) - \nabla u \cdot \nabla\tau], \tag{11}$$

$$-\Delta q = -\tau_z + \Phi_2(\psi) + F_3, \tag{12}$$

$$-\varepsilon\Delta^2 u + \operatorname{div}[(1 + \varepsilon^{2\gamma}|\nabla u|^{2\gamma})\nabla u] = P_1\Delta\tau + F_2, \tag{13}$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(r, z), \quad \tau|_{t=0} = \tau_0(r, z), \tag{14}$$

$$\psi = D\psi = u = \frac{\partial u}{\partial n} = q = 0 \qquad ((r, z, t) \in \partial\Pi_1^T), \tag{15}$$

$$[\tau]_{\partial\Pi_1^T} = \left[\varkappa \frac{\partial\tau}{\partial n}\right]_{\partial\Pi_1^T} = \tau|_{\partial\Pi_2^T} = 0, \tag{16}$$

где

$$D_\nu\varphi = r\left[\left(\frac{\nu}{r}\varphi_r\right)_r + \left(\frac{\nu}{r}\varphi_z\right)_z\right] (D \equiv D_1), \quad \partial(\psi, \varphi) = \psi_r\varphi_z - \psi_z\varphi_r,$$

$$U^r(\psi, \tau) = -B^z(\overset{0}{v}(\psi), \tau), \quad U^z(\psi, \tau) = B^r(\overset{0}{v}(\psi), \tau), \quad V(\psi, u) = \frac{D\psi}{r}\nabla u,$$

$$\Phi_i(\psi) = \widetilde{\Phi}_i(\overset{0}{v}(\psi)) \quad (i = 1, 2), \qquad F_1 = F_{1z}^r - F_{1r}^z,$$

$$F_3 = -\operatorname{div}\overline{F}_1, \quad \mathrm{P}(\xi) = \frac{1}{\rho(\xi)} - 1,$$

ψ_0 — решение задачи

$$D\psi_0 = r(v_{0z}^r - v_{0r}^z), \qquad \psi_0|_{\partial\Pi_1} = 0.$$

Легко видеть, что при $\gamma \geqslant 1/2$ и достаточно гладких $\rho(\xi)$ и $\varkappa(\xi, \eta)$ функции (v, τ) вида (9) и q удовлетворяют уравнениям (1)—(4) и (5) с точностью до слагаемых порядка ε^2 и ε соответственно (аппроксимация уравнения (5) уравнением (12) возможна, так как q входит в (10) с коэффициентом ε).

2. Пусть $L_p(\Pi)$ — банахово пространство с нормой

$$\|\varphi\|_{p,\Pi} = \left(\int_\Pi |\varphi|^p\, rdrdz\right)^{1/p}, \quad \|\varphi\|_{2,\Pi} \equiv \|\varphi\|_\Pi, \quad \|\psi\|^2_{\Pi_\sigma} = \int_{\Pi_\sigma} \sigma|\varphi|^2\, rdrdz,$$

(норму в $L_p(\Pi)^2 = L_p(\Pi) \times L_p(\Pi)$ будем обозначать тем же символом $\|\cdot\|_{p,\Pi}$); $W_{2,0}^{(1)}(\Pi)$, $W_{2,0}^{(2)}(\Pi)$, $W_{2,0}^{(3)}(\Pi)$ — гильбертовы пространства функций $\varphi(r, z)$, удовлетворяющих граничным условиям $\varphi = D\varphi = 0$ на $\partial\Pi$, со скалярными произведениями

$$(\varphi, \psi)_{(1),\Pi} = \int_\Pi \nabla\varphi\cdot\nabla\psi\, rdrdz, \qquad (\varphi, \psi)_{(2),\Pi} = \int_\Pi \frac{D\varphi}{r^2}\,\frac{D\psi}{r^2}\, rdrdz,$$

$$(\varphi, \psi)_{(3),\Pi} = \left(\frac{D\varphi}{r^2}, \frac{D\psi}{r^2}\right)_{(1),\Pi}$$

и соответствующими нормами $\|\cdot\|_{(i),\Pi}$, $i = 1, 2, 3$; $\overset{0}{W}{}_2^{(2)}(\Pi)$ — подпространство функций из $W_{2,0}^{(2)}(\Pi)$, удовлетворяющих условию $\partial\varphi/\partial n = 0$ на $\partial\Pi$, оснащенное нормой $\|\Delta\varphi\|_\Pi$; $W_{2+2\gamma,0}^{(1)}(\Pi)$ — подпространство $W_{2,0}^{(1)}(\Pi)$ с нормой $\|\nabla\varphi\|_{2+2\gamma,\Pi}$, $\gamma \geqslant 0$.

Обозначим через $L_{p,q}(\Pi^T)$ $(L_{p,p}(\Pi^T) \equiv L_p(\Pi^T))$ банахово пространство функций $\psi(r, z, t)$ с нормой

$$\|\psi\|_{p,q,\Pi^T} = \left(\int_0^T \|\psi\|^q_{p,\Pi}\, dt\right)^{1/q}$$

$$\left(\|\psi\|_{p,p,\Pi^T} \equiv \|\psi\|_{p,\Pi^T}, \ \|\psi\|_{p,\frac{2p}{3p-2},\Pi^T} \equiv |||\psi|||_{p,\Pi^T}\right),$$

и через $V_{2,0}^{1,0}(\Pi^T)$, $V_{2+2\gamma,0}^{1,0}(\Pi_2^T)$, $V_{2,0}^{2,0}(\Pi_1^T)$, $\overset{0}{V}{}_{2+2\gamma}^{2}(\Pi_1^T)$, $V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T)$ банаховы пространства распределений

$$C^0(0, T; L_2(\Pi)) \cap L_2(0, T; W_{2,0}^{(1)}(\Pi)),$$

$$V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T) \cap L_{2+2\gamma}(0, T; W_{2+2\gamma,0}^{(1)}(\Pi_1)),$$

$$C^0(0, T; W_{2,0}^{(1)}(\Pi_1)) \cap L_2(0, T; W_{2,0}^{(2)}(\Pi_1)),$$

$$L_2(0, T; \overset{0}{W}{}_2^{(2)}(\Pi_1)) \cap L_{2+2\gamma}(0, T; W_{2+2\gamma,0}^{(1)}(\Pi_1)),$$

$$C^0(0, T; W_{2,0}^{(2)}(\Pi_1)) \cap L_2(0, T; W_{2,0}^{(3)}(\Pi_1)),$$

снабженные нормами

$$|\tau|_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi^T)} = (\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\tau\|_{\Pi}^2 + \|\tau\|_{(1),\Pi^T}^2)^{1/2},$$

$$|\tau|_{V_{2+2\gamma,0}^{1,0}(\Pi_2^T)} = |\tau|_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)} + \varepsilon^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \|\nabla\tau\|_{2+2\gamma,\Pi_1^T}, \quad \gamma \geqslant 0,$$

$$|\psi|_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_1^T)} = \left(\max_{0\leqslant t\leqslant T} \left\|\frac{\nabla\psi}{r}\right\|_{\Pi_1}^2 + \left\|\frac{D\psi}{r}\right\|_{\Pi_1^T}^2\right)^{1/2},$$

$$|u|_{\overset{0}{V}{}_{2+2\gamma}^{2}(\Pi_1^T)} = (\varepsilon\|\Delta u\|_{\Pi_1^T}^2 + \|\nabla u\|_{\Pi_1^T}^2 + \varepsilon^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\|\nabla u\|_{2+2\gamma,\Pi_1^T})^{1/2},$$

$$|\psi|_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T)} = (\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\psi\|_{(2),\Pi_1}^2 + \|\psi\|_{(3),\Pi_1^T}^2)^{1/2}$$

(здесь $\Pi^T = \Pi \times (0, T]$, $\|\cdot\|_{(i),\Pi_j^T}$ — норма в $L_2(0, T;\ W_{2,0}^{(i)}(\Pi_j))$.

Обобщенным решением задачи (10) — (16) будем называть вектор-функцию (ψ, τ, q, u), компоненты которой принадлежат пространствам $V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T)$, $V_{2+2\gamma,0}^{1,0}(\Pi_2^T)$, $L_2(0, T;\ W_{2,0}^{(1)}(\Pi_1))$, $\overset{0}{V}{}_{2+2\gamma}^{2}(\Pi_1^T)$, соответственно, и удовлетворяют интегральным тождествам

$$\int_{\Pi_1} r^{-1}\varphi D\psi drdz\Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Pi_1^{t_1}} [-r^{-1}\varphi_t D\psi - \varphi\partial(\psi, r^{-2}D\psi) +$$

$$+ r^{-1}\nu(\varepsilon\tau)\nabla D\psi\cdot\nabla\varphi]\,drdzdt = \int_{\Pi_1^{t_1}} \{[F_1\varphi - \varepsilon^{-1}P(\varepsilon\tau)\varphi_r] +$$

$$+\varepsilon[(U(\psi, \tau) + V(\psi, u))\cdot\nabla\varphi - \varphi\partial(q, \tau)]\}\,drdzdt, \tag{17}$$

$$\int_{\Pi_2} \sigma\tau\theta rdrdz\Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Pi_2^{t_1}} \{-\sigma[\tau\theta_t + r^{-1}\theta\partial(\psi, \tau)] + \varkappa(\varepsilon\tau, \varepsilon\nabla\tau)\nabla\tau\cdot\nabla\theta\}\times$$

$$\times rdrdzdt = \int_{\Pi_2^{t_1}} \{F_2\theta + \varepsilon[\Phi_1(\psi) - \nabla u\cdot\nabla\tau]\theta\}\,rdrdzdt, \tag{18}$$

$$\int_{\Pi_1} \nabla q\cdot\nabla p rdrdz = \int_{\Pi_1} \{\tau p_z + [\Phi_2(\psi) + F_3]p\}\,rdrdz, \tag{19}$$

$$\varepsilon\int_{\Pi_1^{t_1}} [\Delta u\Delta\omega + (1 + \varepsilon^{2\gamma}|\nabla u|^{2\gamma})\nabla u\cdot\nabla\omega]\,rdrdzdt =$$

$$= \int_{\Pi_1^{t_1}} (P_1\nabla\tau\cdot\nabla\omega - F_2\omega)\,rdrdzdt \tag{20}$$

для всех

$$\varphi \in V_{2,0}^{1,1}(\Pi_1^T) \equiv \{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_1^T) \mid \varphi_t \in L_2(\Pi_1^T)\},$$

$$\theta \in V_{2+2\gamma,0}^{1,1}(\Pi_2^T) \equiv \{V_{2+2\gamma,0}^{1,0}(\Pi_2^T) \mid \theta_t \in L_2(\Pi_2^T)\},$$

$$p \in L_2(0, T;\ W_{2,0}^{(1)}(\Pi_1)), \quad \omega \in \overset{0}{V}{}_{2+2\gamma}^{2}(\Pi_1^T)$$

и всех t_1 из $[0, T]$ (последнее относится ко всем указанным тождествам, кроме (19), которое выполняется при почти всех t из $[0, T]$).

Корректность этого определения обеспечивается перечисленными ниже предположениями.

Функции $\nu(\xi)$, $\mathrm{P}(\xi)$ и $\varkappa(\xi, \eta)$ определены в R^1 и R^3, непрерывны и обладают следующими свойствами:

1° $0 < \nu_0 \leqslant \nu(\xi) \leqslant \nu_1$, $|\nu'(\xi)| \leqslant \nu_2$;

2° $\varkappa_0(1 + |\eta|^{2\gamma}) \leqslant \varkappa(\xi, \eta) \leqslant \varkappa_1(1 + |\eta|^{2\gamma})$, $\quad \gamma \geqslant 1$;

3° $[\varkappa(\xi, \varepsilon\eta_1)\eta_1 - \varkappa(\xi, \varepsilon\eta)\eta]\cdot(\eta_1 - \eta) \geqslant \varkappa_2|\eta_1 - \eta|^2$;

4° $|\varkappa(\xi_1, \varepsilon\eta) - \varkappa(\xi, \varepsilon\eta)| \leqslant \varkappa_3|\xi_1 - \xi|$;

5° $-\mathrm{P}_0 \leqslant \mathrm{P}(\xi)$, $\quad \mathrm{P}(0) = 0$;

6° $|\mathrm{P}(\xi_1) - \xi_1 - \mathrm{P}(\xi) + \xi| \leqslant \mathrm{P}_1(|\xi_1|^{\gamma_1} + |\xi|^{\gamma_1})|\xi_1 - \xi|$, $1 \leqslant \gamma_1 \leqslant 2\gamma + 1$,

для всех ξ_1, ξ из R^1 и η_1, η из R^2 (ν_i, $\varkappa_i$, P_i, P_i — положительные константы, не зависящие от ε). Для начальных условий (ψ_0, τ_0) и возмущений F_i, $i = 1, 2, 3$, справедливы включения

7° $\psi_0 \in \overset{\circ}{W}{}_{2,0}^{(2)}(\Pi_1)$, $\quad \tau_0 \in L_2(\Pi_2)$;

8° $F_i \in L_{p_i, \frac{2p_i}{3p_i - 2}}(\Pi_i^T)$, $1 < p_i \leqslant 2$, $i = 1, 2$; $F_i \in L_{p_i, 2}(\Pi_1^T)$, $\quad i = 2, 3$.

Существование всех интегралов в (17)—(20) легко вывести из условий 1°—8°, соответствующих включений для (ψ, τ, q, u) и $(\varphi, \theta, p, \omega)$, применяя известные [1] неравенства

$$\|\tau\|_{2(\gamma_1+1), \Pi_1^T} \leqslant c_1 [\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\tau\|_{\Pi_1}^{\frac{1}{2}} \|\nabla\tau\|_{\Pi_1^T}^{\frac{2\gamma-\gamma_1+1}{2\gamma(\gamma_1+1)}} \|\nabla\tau\|_{2+2\gamma, \Pi_1^T}^{\frac{(\gamma_1-1)(\gamma+1)}{2\gamma(\gamma_1+1)}} +$$

$$+ \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\tau\|_{\Pi_2}^{1-\frac{1}{\gamma_1+1}} \|\nabla\tau\|_{\Pi_2^T}^{\frac{1}{\gamma_1+1}}, \qquad \tau \in V_{2+2\gamma, 0}^{1,0}(\Pi_2^T), \tag{21}$$

$$\max_{0 \leqslant |\sigma| \leqslant 2} \|\psi_{r\sigma_1 z\sigma_2}\|_{4, \Pi^T} \leqslant c_2 \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\psi\|_{(2), \Pi^T}^{1/2} \|\psi\|_{(3), \Pi^T}^{1/2}, \qquad \psi \in \overset{\circ}{V}{}_{2,0}^{3,0}(\Pi^T), \tag{22}$$

$$\|u\|_{\frac{1}{\mu}, \Pi^T} \leqslant c_3 \|u\|_{\frac{1}{\lambda}, \Pi^T}^{\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda}} \|u\|_{\frac{1}{\nu}, \Pi^T}^{\frac{\mu-\lambda}{\nu-\lambda}}, \quad u \in L_{1/\lambda}(\Pi^T), \qquad 0 < \lambda \leqslant \mu \leqslant \nu < 1, \tag{23}$$

$$\|\Phi(\psi) - \Phi(\varphi)\|_{4/3, \Pi^T} \leqslant c_4 \|\psi - \varphi\|_{(2), \Pi^T} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} (\|\psi\|_{(2), \Pi}^{1/2} \times$$

$$\times \|\psi\|_{(3), \Pi^T}^{1/2} + \|\varphi\|_{(2), \Pi}^{1/2} \|\varphi\|_{(3), \Pi^T}^{1/2}), \tag{24}$$

$$\|\Phi(\psi) - \Phi(\varphi)\|_{4/3, 2, \Pi^T} \leqslant c_5 \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\psi - \varphi\|_{(2), \Pi}^{1/2} \|\psi - \varphi\|_{(2), \Pi_1^T}^{1/2} \times$$

$$\times (\|\psi\|_{(2), \Pi}^{1/2} \|\psi\|_{(3), \Pi^T}^{1/2} + \|\varphi\|_{(2), \Pi}^{1/2} \|\varphi\|_{(3), \Pi^T}^{1/2}), \tag{25}$$

где

$$\Phi(\psi) = \sum_{\substack{1 \leqslant |\sigma| \leqslant 2 \\ 1 \leqslant |\rho| \leqslant 2}} a_{\sigma\rho} \psi_{r\sigma_1 z\sigma_2} \psi_{r\rho_1 z\rho_2} \; (\max_{r, \sigma, \rho} |a_{\sigma\rho}(r)| \leqslant a = \mathrm{const}).$$

3. Для отыскания обобщенного решения задачи (10) — (16) построим итерационный процесс $(\psi^0, \tau^0, q^0, u^0)$, $(\psi^1, \tau^1, q^1, u^1), \ldots$, в котором $(\psi^{n+1}, \tau^{n+1}, q^{n+1}, u^{n+1})$ — обобщенное решение задачи

$$L_{\nu^{n+1}}(\psi, \tau) \equiv D\psi_t - r\partial(\psi, r^{-2}D\psi) - D_{\nu^{n+1}}D\psi + r\tau_r =$$

$$= r\{F_1 - (\varepsilon^{-1}\mathrm{P}^n - \tau^n)_r - \varepsilon[\nabla(U^n + V^n) + W^n], \tag{26}$$

$$L_{\varkappa^{n+1}}(\psi, \tau) \equiv \sigma[\tau_t - r^{-1}\partial(\psi, \tau)] - \mathrm{div}(\varkappa^{n+1}\nabla\tau) = F_2 + \varepsilon(\Phi_1^n + \Phi_3^n), \tag{27}$$

$$-\Delta q = -\tau_z + \Phi_2(\psi) + F_3, \tag{28}$$

$$\varepsilon\Delta^2 u - \mathrm{div}[(1 + \varepsilon^{2\gamma}|\nabla u|^{2\gamma})\nabla u] = -P_1\Delta\tau - F_2, \tag{29}$$

удовлетворяющее начально-краевым условиям (14)—(16), а (ψ^0, τ^0), q^0 и u^0 — обобщенные решения системы

$$L_{\nu^0}(\psi, \tau) = rF_1, \qquad L_{\varkappa^0}(\psi, \tau) = F_2, \tag{30}$$

уравнений (28) и (29) соответственно (также удовлетворяющие условиям (14)—(16)).

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\nu^{n+1} = \nu(\varepsilon\tau^n)\ (\nu^0 = \nu(0) = 1); \quad \varkappa^{n+1} = \varkappa(\varepsilon\tau^n, \varepsilon\nabla\tau^{n+1})\ (\varkappa^0 = \varkappa(0, \varepsilon\nabla\tau^0)),$$

$$\mathrm{P}^n = \mathrm{P}(\varepsilon\tau^n), \quad U^n = U(\psi^n, \tau^n), \quad V^n = V(\psi^n, u^n), \quad W^n = \partial(q^n, \tau^n),$$

$$\Phi_i^n = \Phi_i(\psi^n), \quad i = 1, 2, \quad \Phi_3^n = -\nabla u^n \cdot \nabla \tau^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поскольку ограниченность последовательности $(\psi^n, \tau^n, q^n, u^n)$ в $V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T) \times V_{2+2\gamma,0}^{1,0}(\Pi_2^T) \times L_2(0, T; W_{2,0}^{(1)}(\Pi_1)) \times \overset{0}{V}{}_{2+2\gamma}^{2}(\Pi_1^T)$ и ее сильная сходимость в $V_{2,0}^{2,0}(\Pi_1^T) \times V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T) \times L_{4/3}(0, T; W_{2,0}^{(1)}(\Pi_1)) \times L_2(0, T; W_{2,0}^{(1)}(\Pi_1))$ строго доказаны в [1], приведем здесь лишь схему доказательства.

Итерационный процесс (26)—(30) расщепляет и частично линеаризует систему (10)—(13), в результате чего можно воспользоваться теоремами работ [4—6], которые обеспечивают однозначную разрешимость задачи (26), (27) (а также и (30)), выполнение для (ψ^{n+1}, τ^{n+1}) соотношений вида (17)—(20) и априорных оценок

$$|\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)} + \varepsilon^{2\gamma}\|\nabla\tau\|^{2+2\gamma}_{2+2\gamma,\Pi_1^T} \leqslant M_1 + \varepsilon^2 c_6\|\Phi_1^n + \Phi_3^n\|^2_{4/3,\Pi_1^T}, \tag{31}$$

$$|\psi|^2_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T)} \leqslant M_2 + \varepsilon^2 c_7[\varepsilon^{-2}\|\varepsilon^{-1}\mathrm{P}^n - \tau^n\|^2_{\Pi_1^T} + \|U^n + V^n\|^2_{\Pi_1^T} + \|W^n\|^2_{4/3,\Pi_1^T}], \tag{32}$$

где

$$M_1 = c_8(\|\tau_0\|^2_{\Pi_2} + |||F_2|||^2_{p_2,\Pi_2^T}), \quad M_2 = c_9(\|\psi_0|^2_{l(2),\Pi_1} + |||F_1|||^2_{p_1,\Pi_1^T} + M_1).$$

С другой стороны, из общей теории эллиптических операторов следует, что задачи (28)—(29) однозначно разрешимы и для их обобщенных решений справедливы оценки

$$\|q\|^2_{(1),\Pi_1^T} \leqslant c_{10}(\|F_3\|^2_{p_3,2,\Pi_1^T} + M_2^2 + M_1) \equiv M_3, \tag{33}$$

$$\|u\|^2_{(1),\Pi_1^T} + \varepsilon\|\Delta u\|^2_{\Pi_1^T} + \varepsilon^{2\gamma}\|\nabla u\|^{2+2\gamma}_{2+2\gamma,\Pi_1^T} \leqslant c_{11}(M_1 + \|F_2\|^2_{p_2,2,\Pi_1^T}) \equiv M_4. \tag{34}$$

Оценивая малые слагаемые в правых частях (31), (32) с помощью неравенств (21)—(25), легко показать, что

$$|\tau^{n+1}|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)} + \varepsilon^{2\gamma}\|\nabla\tau^{n+1}\|^{2+2\gamma}_{2+2\gamma,\Pi_1^T} \leqslant 2M_1, \quad |\psi^{n+1}|^2_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T)} \leqslant 2M_2, \tag{35}$$

если $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0(\overline{M})$, где $\overline{M} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$.

Из тождеств вида (17)—(20) для $\psi^{n+1}, \psi^n, \tau^{n+1}, \tau^n, q^n, q^{n-1}, u^n, u^{n-1}$ легко вывести равенства для $\psi = \psi^{n+1} - \psi^n$, $\tau = \tau^{n+1} - \tau^n$, $q = q^n - q^{n-1}$, $u = u^n - u^{n-1}$:

$$\int_{\Pi_1}\left|\frac{\nabla\psi}{r}\right|^2 rdrdz\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{\Pi_{1t_1}^{t_2}} \nu^{n+1}\left|\frac{D\psi}{r}\right|^2 rdrdzdt =$$

$$= \int_{\Pi_{1t_1}^{t_2}}\Big[-\tau\psi_r + \partial(\psi^n, \psi)\frac{D\psi}{r^2} - \frac{D\psi}{r}\nabla\psi\cdot\nabla\nu^{n+1} +$$

$$+\frac{1}{r}(\nu^{n+1}-\nu^n)\nabla D\psi^n\cdot\nabla\psi-(\varepsilon^{-1}P^n-\tau^n-\varepsilon^{-1}P^{n-1}+\tau^{n-1})\psi_r-$$

$$\left.-\varepsilon(U^n-U^{n-1}+V^n-V^{n-1})\cdot\nabla\psi+(W^n-W^{n-1})\psi\right]drdzdt, \qquad (36)$$

$$\int_{\Pi_2}\sigma|\tau|^2 rdrdz\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}+\int_{\Pi_{2t_1}^{t_2}}[\varkappa(\varepsilon\tau^n,\ \varepsilon\nabla\tau^{n+1})\nabla\tau^{n+1}-\varkappa(\varepsilon\tau^n,\ \varepsilon\nabla\tau^n)\nabla\tau^n]\times$$

$$\times\nabla\tau rdrdzdt=\int_{\Pi_{1t_1}^{t_2}}\Big\{[\varkappa(\varepsilon\tau^{n-1},\ \varepsilon\nabla\tau^n)-\varkappa(\varepsilon\tau^n,\ \varepsilon\nabla\tau^n)]\nabla\tau^n\cdot\nabla\tau+$$

$$\left.+\frac{1}{r}\partial(\psi,\ \tau^{n+1})\tau+\varepsilon(\Phi_1^n-\Phi_1^{n-1}+\Phi_3^n-\Phi_3^{n-1})\tau\right\}rdrdzdt, \qquad (37)$$

$$\int_{\Pi_1}|\nabla q|^2 rdrdz=\int_{\Pi_1}[(\tau^n-\tau^{n-1})q_z+(\Phi_2^n-\Phi_2^{n-1})q]\,rdrdz, \qquad (38)$$

$$\int_{\Pi_{1t_1}^{t_2}}\{\varepsilon|\Delta u|^2+[(1+\varepsilon^{2\gamma}|\nabla u^n|^{2\gamma})\nabla u^n-(1+\varepsilon^{2\gamma}|\nabla u^{n-1}|^{2\gamma})\nabla u^{n-1}]\times$$

$$\times\nabla u\,rdrdzdt=\int_{\Pi_{1t_1}^{t_2}}P_1(\nabla\tau^n-\nabla\tau^{n-1})\cdot\nabla u rdrdzdt, \qquad (39)$$

где $n=0,1,2,\ldots,\ q^{-1}=u^{-1}=U^{-1}=V^{-1}=P^{-1}=W^{-1}=0$.

Оценивая слагаемые в правой части (36) с помощью (21) — (25) и неравенств

$$\|q^n-q^{n-1}\|_{(1),\Pi_1}\leqslant c_{12}[\|\tau^n-\tau^{n-1}\|_{\Pi_1}+\|\psi^n-\psi^{n-1}\|_{(2),\Pi_1}\times$$

$$\times(\|\psi^n\|_{(2),\Pi_1}^{1/2}\|\psi^n\|_{(3),\Pi_1}^{1/2}+\|\psi^{n-1}\|_{(2),\Pi_1}^{1/2}\|\psi^{n-1}\|_{(3),\Pi_1}^{1/2})], \qquad (40)$$

$$\|u^n-u^{n-1}\|_{(1),\Pi_1^T}\leqslant c_{13}\|\tau^n-\tau^{n-1}\|_{(1),\Pi_1^T}, \qquad (41)$$

которые выводятся из (38), (39), 3°, получаем

$$\frac{\bar\nu}{2}|\psi|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1t_1}^{t_2})}\leqslant\left\|\frac{\nabla\psi}{r}\right\|^2_{\Pi_1}\Big|_{t=t_1}+c_{14}|\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2t_1}^{t_2})}+$$

$$+c_{15}\mu_1(t_1,\ t_2)|\psi|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1t_1}^{t_2})}+\frac{5\varepsilon}{\alpha}|\tau^n-\tau^{n-1}|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2t_1}^{t_2})}+$$

$$+\frac{3\varepsilon}{\alpha}|\psi^n-\psi^{n-1}|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1t_1}^{t_2})}, \qquad (42)$$

где α — произвольная константа, которая определена ниже, $\bar\nu=\min\{\nu_0,\ 1/2\}$ (c_{15} зависит от α, а c_{14} не зависит),

$$\mu_1(t_1,\ t_2)=\left\|\frac{\nabla\psi^n}{r}\right\|_{4,\Pi_{1t_1}^{t_2}}+\varepsilon\|\nabla\tau^n\|_{4,\Pi_{1t_1}^{t_2}}+\varepsilon\|\psi^n\|^2_{(3),\Pi_{1t_1}^{t_2}}+$$

$$+\varepsilon^{2\gamma_1-1}(\|\tau^n\|^{2\gamma_1}_{2\gamma_1,\Pi_{1t_1}^{t_2}}+\|\tau^{n-1}\|^{2\gamma_1}_{2\gamma_1,\Pi_{1t_1}^{t_2}})+\varepsilon(\|\nabla\tau^n\|^2_{4,\Pi_{1t_1}^{t_2}}+$$

$$+\|\nabla u^n\|^2_{4,\Pi_{1t_1}^{t_2}}+\|q^{n-1}\|^2_{(1),\Pi_{1t_1}^{t_2}})+\varepsilon\|\nabla\tau^n\|^2_{4,\Pi_{1t_1}^{t_2}}\times$$

$$\times\max_{t_1\leqslant t\leqslant t_2}(\|\psi^n\|_{(2),\Pi_1}\|\psi^n\|_{(3),\Pi_{1t_1}^{t_2}}+\|\psi^{n-1}\|_{(2),\Pi_1}\|\psi^{n-1}\|_{(3),\Pi_{1t_1}^{t_2}}).$$

Аналогично, оценивая в (37), получаем

$$\frac{\bar{\varkappa}}{2}|\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2t_1}^{t_2})} \leqslant \|\tau\|^2_{\Pi_2}\big|_{t=t_1} + c_{16}\,[\mu_2(t_1, t_2)\,|\psi|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1t_1}^{t_2})} +$$

$$+ \mu_3(t_1, t_2)|\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2t_1}^{t_2})}] + \frac{2\varepsilon}{\alpha}|\tau^n - \tau^{n-1}|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2t_1}^{t_2})} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\alpha}|\psi^n - \psi^{n-1}|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1t_1}^{t_2})}, \tag{43}$$

где c_{16} зависит от α, $\bar{\varkappa} = \min\{1, \varkappa_2\}$,

$$\mu_2(t_1, t_2) = \|\nabla\tau^{n+1}\|^2_{\Pi_{1t_1}^{t_2}},$$

$$\mu_3(t_1, t_2) = \varepsilon\|\nabla\tau^n\|^2_{4,\Pi_{1t_1}^{t_2}} + \varepsilon\max_{t_1\leqslant t\leqslant t_2}(\|\psi^n\|_{(2),\Pi_1}\|\psi^n\|_{(3),\Pi_{1t_1}^{t_2}} +$$

$$+ \|\psi^{n-1}\|_{(2),\Pi_1}\|\psi^{n-1}\|_{(3),\Pi_{1t_1}^{t_2}}) + \varepsilon(\|\nabla u^n\|^2_{4,\Pi_{1t_1}^{t_2}} + \|\nabla\tau^{n-1}\|^2_{4,\Pi_{1t_1}^{t_2}}).$$

Если α выбрать равным $4(2\bar{\nu} + 5\bar{\varkappa} + 4c_{14})(\bar{\nu}\bar{\varkappa})^{-1}$, то из (42), (43) получим неравенство

$$|\psi|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1t_1}^{t_2})} + |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2t_1}^{t_2})} \leqslant \frac{c_{17}}{2}\left(\left\|\frac{\nabla\psi}{r}\right\|^2_{\Pi_1} + \|\tau\|^2_{\Pi_2}\right)\Bigg|_{t=t_1} +$$

$$+ c_{18}\mu(t_1, t_2)\,[|\psi|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1t_1}^{t_2})} + |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2t_1}^{t_2})}] +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}[|\psi^n - \psi^{n-1}|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1t_1}^{t_2})} + |\tau^n - \tau^{n-1}|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2t_1}^{t_2})}], \tag{44}$$

где $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$,

$$\mu(t_1, t_2) = \mu_1(t_1, t_2) + \mu_2(t_1, t_2) + \varepsilon\|\nabla\tau^{n-1}\|^2_{4,\Pi_{1t_1}^{t_2}}.$$

Произведя разбиение отрезка $[0, T]$ на конечное число отрезков $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, $t_0 = 0$, $t_k = T$, таких, что $c_{18}\mu(t_i, t_{i+1}) \leqslant 1/2$ (это можно сделать в силу неравенств (21) — (25), (33) — (35)), будем иметь

$$|\psi^{n+1} - \psi^n|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1t_i}^{t_{i+1}})} + |\tau^{n+1} - \tau^n|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2t_i}^{t_{i+1}})} \leqslant c_{17}(\|r^{-1}\nabla(\psi^{n+1} - \psi^n)\|^2_{\Pi_1} +$$

$$+ \|\tau^{n+1} - \tau^n\|^2_{\Pi_2})|_{t=t_i} + \varepsilon[|\psi^n - \psi^{n-1}|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1t_i}^{t_{i+1}})} + |\tau^n - \tau^{n-1}|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2t_i}^{t_{i+1}})}, \tag{45}$$

где $i = 0, 1, \ldots, k-1$; $k \leqslant c_{19}(M_1^4 + M_1^2M_2^4 + M_1) \equiv M$.

Из итерационных соотношений (45) с учетом (40), (41) получаем оценки

$$|\psi^{n+1} - \psi^n|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_1^T)} + |\tau^{n+1} - \tau^n|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)} + \|u^{n+1} - u^n\|^2_{(1),\Pi_1^T} +$$

$$+ \varepsilon\|\Delta(u^{n+1} - u^n)\|^2_{\Pi_1^T} \leqslant \varepsilon^{n+1}c_{20}M^3(n + M)^M, \tag{46}$$

$$\|\nabla(q^{n+1} - q^n)\|^2_{2,4/3,\Pi_1^T} \leqslant c_{21}(T^{1/4} + M_2)M^3(n + M)^M, \tag{47}$$

которое доказывают сильную сходимость $(\psi^n, \tau^n, q^n, u^n)$ к (ψ, τ, q, u) в $V_{2,0}^{2,0}(\Pi_1^T) \times V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T) \times L_{4/3}(0, T;\ W_{2,0}^{(1)}(\Pi_1)) \times L_2(0, T;\ W_{2,0}^{(1)}(\Pi_1))$ и позволяют обосновать предельный переход в интегральных тождествах типа (17) — (20) для $(\psi^{n+1}, \tau^{n+1}, q^{n+1}, u^{n+1})$. При этом используется также соответствующая слабая сходимость компонент вектора $(\psi^{n+1}, \tau^{n+1}, q^{n+1}, u^{n+1})$, которая обеспечивается оценками (33) — (35).

Единственность обобщенного решения (ψ, τ, q, u) доказывается от противного с помощью оценок типа (45).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполняются условия* $1°—8°$ *и* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0(\overline{M})$, *то существует единственное обобщенное решение* (ψ, τ, q, u) *задачи* (10)— (16), *удовлетворяющее оценкам* (33)—(35) *и обычным* [1, 4—6] *энергетическим равенствам.*

Замечание 1. Поскольку константы априорных оценок (33)—(35) не зависят от T, теорема верна и в случае $T = \infty$.

Замечание 2. Поскольку (ψ^n, τ^n) сходится к (ψ, τ) сильно в $C^0(0, T;\ W_{2,0}^{(1)}(\Pi_1)) \times C^0(0, T;\ L_2(\Pi_2))$ и

$$W_{2,0}^{(2)}(\Pi_1) - \lim_{t\to+0} \psi^n = \psi_0, \qquad L_2(\Pi_2) - \lim_{t\to+0} \tau^n = \tau_0$$

[5, 6], то

$$W_{2,0}^{(1)}(\Pi_1) - \lim_{t\to+0} \psi = \psi_0, \quad L_2(\Pi_2) - \lim_{t\to+0} \tau = \tau_0.$$

Сходимость ψ к ψ_0 при $t \to +0$ в $W_{2,0}^{(2)}(\Pi_1)$ в отличие от модели Буссинеска [4] является слабой.

Замечание 3. В тех случаях, когда численные решения уравнений Буссинеска оказываются неудовлетворительными (например, по сравнению с экспериментальными данными), можно использовать формулы (9) для уточнения скорости течения жидкости.

1. *Мосеенков В. Б.* Асимптотические методы исследования конвективного движения вязкой слабо сжимаемой жидкости.— Киев, 1990.— 53 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.2).
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1975.— **52**.— С. 52—109.
3. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.— Новосибирск : Наука, 1983.— 319 с.
4. *Галицын А. С., Мосеенков В. Б., Легейда Г. А.* Однозначная разрешимость в целом одной квазилинейной задачи нестационарной конвекции вязкой жидкости // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 12.— С. 7—10.
5. *Галицын А. С., Мосеенков В. Б.* Об однозначной разрешимости в целом осесимметричной задачи конвекции вязкой термически неоднородной жидкости // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 7.— С. 885—893.
6. *Мосеенков Б. И., Мосеенков В. Б.* О разрешимости и устойчивости осесимметричной задачи конвекции при наличии диссипации энергии // Укр. мат. журн.— 1989.— **39**, № 1.— С. 68—74.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 11.04.90