УДК 517.94

Ю. А. Митропольский, Л. Б. Урманчева

О двухточечной задаче для систем гиперболических уравнений

Развивая численно-аналитический метод, определяются условия существования решения двухточечных задач для систем гиперболических уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} = P(t, x) u(t, x) + f(t, x, u(t, x), u_t'(t, x)).$$

Розвиваючи чисельно-аналітичний метод, з'ясовуються умови існування розв'язку двоточкових задач для систем гіперболічних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} = P(t, x) u(t, x) + f(t, x, u(t, x), u_t'(t, x)).$$

Задачи с многоточечными краевыми условиями для систем уравнений с частными производными гиперболического типа изучались в работах [1—4] и др.

В данной статье рассмотрена задача отыскания решения двухточечных краевых задач для некоторых систем уравнений с частными производными гиперболического типа. Обобщая численно-аналитический метод, предложенный в [3], находятся условия существования и единственности решения двухточечной задачи.

Рассмотрим систему уравнений с частными производными вида

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} = P(t,x), u(t,x) + f(t,x,u(t,x,), u'_t(t,x)), \tag{1}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — векторы n-мерного евклидова пространства E_n, $P(t,x)$ — $n \times n$-матрица.

Будем искать решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(t,0) &= u_0(t) + v(0), \\ u(0,x) &= u_0(0) + v(x) \end{aligned} \tag{2}$$

и двухточечному условию

$$Au(0,x) + Cu(T,x) = w(x), \tag{3}$$

причем вектор-функция $u_0(t)$ задана, непрерывна и обладает непрерывной ограниченной производной

$$|u_0(t)| \leqslant \vec{N}, |u'_{0_t}(t)| \leqslant \vec{N}_1, \quad t \in [0,T],$$

вектор-функция $v(x)$ строится в процессе нахождения искомого решения, а вектор-функция $\omega(x)$ ограничена и непрерывна, $|\omega(x)| \leqslant \vec{L}$.

Пусть, кроме того, выполняются следующие пять условий.

I. Вектор-функция $f(t,x,u(t,x),u'_t(t,x))$ определена и непрерывна в области Ω: $(t,x) \in [0,T] \times [-a,a]$, $(u(t,x),u'_t(t,x)) \in D \times D_1$, где D, D_1 — ограниченные области E_n: $D = \{\vec{u} : \vec{b} \leqslant \vec{u} \leqslant \vec{c}\}$, $D_1 = \{u'_t : |u'_t| \leqslant a\vec{M}_0 + \vec{N}_1\}$, и удовлетворяет неравенствам

$$|f(t,x,u(t,x),u'_t(t,x))| \leqslant \vec{M},$$

$$|P(t,x)u(t,x) + f(t,x,u(t,x),u'_t(t,x))| \leqslant \vec{M}_0, \tag{4}$$

$$|f(t,x,\bar{u}_1,\bar{u}_2) - f(t,x,u_1,u_2)| \leqslant K_1|\bar{u}_1 - u_1| + K_2|\bar{u}_2 - u_2|. \tag{5}$$

Элементы матриц K_1, K_2 неотрицательны.

II. Матрица $P(t,x)$ непрерывна при $(t,x) \in [0,T] \times [-a,a]$, элементы матрицы P определены соотношениями

$$|\{P(t,x)\}_{ij}| = P_{ij}. \tag{6}$$

III. Для постоянных матриц A и C существует обратная матрица $(A+C)^{-1}$. Элементы матриц A_0, C_0 и $(A+C)_0^{-1}$ неотрицательны,

$$\{A_0\}_{ij} = |\{A\}_{ij}|, \quad \{(A+C)_0^{-1}\}_{ij} = |\{(A+C)^{-1}\}_{ij}|,$$

$$\{C_0\}_{ij} = |\{C\}_{ij}|, \quad \{(C^{-1}A+E)_0^{-1}\}_{ij} = |\{(C^{-1}A+E)^{-1}\}_{ij}|.$$

Существует матрица Q, определяемая соотношениями

$$Q_{ij} = |\{(E-Q^*)^{-1}\}_{ij}|,$$

Здесь Q^* — матрица, для которой

$$Q^*_{ij} = \sup_{-a \leqslant x \leqslant a} \left| \left\{ (A+C)^{-1} C \int_0^x \int_0^T P(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \right\}_{ij} \right|.$$

IV. Собственные числа матрицы

$$R_0 = \left\{\left(Pa\frac{T}{2} + K_1 a\frac{T}{2} + 2aK_2\right)(E + PaGT) + [P(C^{-1}A + E)_0 T + \right.$$

$$\left. + K_1 T(E + (C^{-1}A + E)_0) + K_2 (C^{-1}A + E)_0]\, aG\right\}$$

лежат в круге единичного радиуса. Матрица G определена равенством

$$G = Q(A + C)_0^{-1} C_0. \tag{7}$$

V. Постоянные векторы $\vec{M}_0$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{c} - \vec{b} \geqslant \geqslant GaT(E - R_0)^{-1}\vec{S} + aT\vec{M}_0$, где

$$\vec{S} = P\left(a\frac{T}{2}\vec{M}_0 + \vec{R}\right) + K_1\left(a\frac{T}{2}\vec{M}_0 + \vec{R} + \vec{L}_1\right) + K_2 a\vec{M}_0,$$

$$\vec{R} = C^{-1}\vec{L} + C^{-1}A|(\vec{u}_0(0)| + C^{-1}A|\vec{u}_0(T)| + (C^{-1}A + E)_0\cdot\vec{L}_1, \tag{8}$$

$$\vec{L}_1 = Q[(A + C)_0^{-1}(\vec{L} + (A + C)_0\vec{N} + C_0 aT\vec{M}].$$

Выберем последовательные приближения в виде [5]

$$u_0(t, x) = u_0(t) + v_0(x),$$

$$u_{n+1}(t, x) = u_0(t) + \sum_{i=0}^{n+1} v_i(x) + \int_0^x\int_0^t \{[P(\xi, \eta)u_n(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, \tilde{u}_n(\xi, \eta),$$

$$\tilde{u}'_{n_\xi}(\xi, \eta))] - [P(\xi, \eta)u_n(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, \tilde{u}_n(\xi, \eta), \tilde{u}_{n_\xi}(\xi, \eta))]\}\, d\xi d\eta + \tag{9}$$

$$+ \frac{t}{T}\left\{C^{-1}\left(w(x) - A\left[u_0(0) + v_0(x) + \sum_{j=1}^{n} v_j(x)\right]\right) - u_0(T) - \sum_{j=1}^{n} v_j(x)\right\},$$

где

$$\tilde{u}_n(\xi, \eta) = u_n(\xi, \eta) - v_n(\eta).$$

Вектор-функции $v_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots$, будем выбирать так, чтобы последовательные приближения $\tilde{u}_i(\xi, \eta)$, $i = 0, 1, \ldots$, удовлетворяли двухточечному условию

$$A\tilde{u}_i(0, x) + C\tilde{u}_i(T, x) = w(x). \tag{10}$$

Справедлива теорема.

Т е о р е м а. *Пусть правая часть системы* (1)—(3) *удовлетворяет условиям* I—V. *Тогда существует единственное решение* $u(t, x)$ *системы* (1)—(3), *которое является равномерным пределом при* $(t, x) \in [0, T] \times \times [-a, a]$ *последовательности функций* (9), *удовлетворяющим системе интегро-дифференциальных уравнений с частными производными*

$$u(t, x) = u_0(t) + v(x) + \int_0^x\int_0^t [P(\xi, \eta)u(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u'_\xi(\xi, \eta))]\, d\xi d\eta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства равномерной сходимости последовательных приближений (9) оценим разности $u_1(t, x) - u_0(t, x)$, $u_2(t, x) - u_1(t, x), \ldots, u_{n+1}(t, x) - u_n(t, x), \ldots$.

Для оценки $v_0(x)$ получаем соотношение

$$A[u_0(0)+v_0(x)]+C[u_0(T)+v_0(x)+\int_0^x\int_0^T[P(\xi,\eta)u_0(\xi,\eta)+$$

$$+f(\xi,\eta,u_0(\xi),u'_{0_\varepsilon}(\xi))]\,d\xi d\eta]=w(x)$$

или

$$(A+C)v_0(x)+C\int_0^x\int_0^T P(\xi,\eta)v_0(\eta)\,d\xi d\eta=\Psi_0(x), \tag{11}$$

где

$$\Psi_0(x)=w(x)-Au_0(0)-Cu_0(T)-C\int_0^x\int_0^T[P(\xi,\eta)u_0(\xi)+$$

$$+f(\xi,\eta,u_0(\xi)\,u'_{0_\varepsilon}(\xi))]\,d\xi b\eta.$$

Систему интегральных уравнений (11) для нахождения $v_0(x)$ запишем в виде

$$(A+C)v_0(x)+C\int_0^x P_0(\eta)v_0(\eta)\,d\eta=\Psi_0(x),$$

причем

$$P_0(\eta)=\int_0^T P(\xi,\eta)\,d\xi.$$

Положим $|v_0(x)|_0=\sup\limits_{-a\leqslant x\leqslant a}|v_0(x)|$. Тогда

$$|v_0(x)|_0\leqslant|(A+C)^{-1}\Psi_0(x)|_0+\left|(A+C)^{-1}C\int_0^x P_0(\eta)\,d\eta\right|_0|v_0(x)|_0.$$

Отсюда следует

$$|v_0(x)|_0\leqslant\left\{\left(E-\left|(A+C)^{-1}C\int_0^x P_0(\eta)\,d\eta\right|_0\right)\right\}^{-1}|(A+C)_0^{-1}\Psi_0(x)|_0.$$

Поскольку $|\Psi_0(x)|\leqslant\vec{L}+(A+C)_0\vec{N}+C_0aT\vec{M}_0$, то

$$|v_0(x)|_0\leqslant Q[(A+C)_0^{-1}(\vec{L}+(A+C)_0\vec{N}+C_0aT\vec{M}_0)].$$

Учитывая (8), имеем

$$|v_0(x)|_0\leqslant\vec{L}_1. \tag{12}$$

Используя (9) при $n=0$, соотношения (4) — (6), (8) и (12), находим

$$\begin{gathered}|\tilde{u}_1(t,x)-u_0(t,x)|\leqslant a\alpha(t)\vec{M}_0+\vec{R},\\ |\tilde{u}_1(t,x)-\tilde{u}_0(t,x)|\leqslant a\alpha(t)\vec{M}_0+\vec{R}+\vec{L}_1,\\ |\tilde{u}'_{1_t}(t,x)-\tilde{u}'_{0_t}(t,x)|\leqslant a\vec{M}_0.\end{gathered} \tag{13}$$

Теперь подставим в двухточечное условие (10) вектор-функцию $\tilde{u}_2(t,x)$. Тогда система интегральных уравнений для нахождения $v_1(x)$ будет иметь вид

$$(A+C)v_1(x)+C\int_0^x\int_0^T P(\xi,\eta)v_1(\eta)\,d\xi d\eta=\Psi_1(x),$$

причем

$$\Psi_1(x) = -C\int_0^x\int_0^T \{P(\xi,\eta)[\widetilde{u}_1(\xi,\eta) - u_0(\xi,\eta)] + [f(\xi,\eta,\widetilde{u}_1(\xi,\eta),\widetilde{u}'_{1\xi}(\xi,\eta)) -$$

$$- f(\xi,\eta,\widetilde{u}_0(\xi),\widetilde{u}'_{0\xi}(\xi))]\}\,d\xi d\eta.$$

Отсюда, учитывая (4) — (6), (8), (13), получаем

$$|v_1(x)|_0 \leqslant Q(A+C)_0^{-1}C_0 aT\left\{P\left(a\frac{T}{2}\vec{M}_0 + \vec{R}\right) + \right.$$

$$\left. + K_1\left(a\frac{T}{2}\vec{M}_0 + \vec{R} + \vec{L}_1\right) + K_2 a\vec{M}_0\right\}.$$

С учетом (7) и (8) находим

$$|v_1(x)|_0 \leqslant aGT\vec{S}. \tag{14}$$

Используя соотношения (4) — (6), (8) и (14), получаем оценки

$$|\widetilde{u}_2(t,x) - u_1(t,x)| \leqslant a\alpha(t)(E + PaGT)\vec{S} + (C^{-1}A + E)_0 aGT\vec{S},$$

$$|\widetilde{u}_2(t,x) - \widetilde{u}_1(t,x)| \leqslant a\alpha(t)(E + PaGT)\vec{S} + ((C^{-1}A + E)_0 + E)\,aGT\vec{S}, \tag{15}$$

$$|\widetilde{u}'_{2t}(t,x) - \widetilde{u}'_{1t}(t,x)| \leqslant 2a[E + PaGT]\vec{S} + (C^{-1}A + E)_0 aG\vec{S}.$$

Подставляя $\widetilde{u}_3(t,x)$ в друхточечное условие (10), приходим к системе интегральных уравнений для нахождения $v_2(x)$:

$$(A+C)v_2(x) + C\int_0^x\int_0^T P(\xi,\eta)v_2(x)\,d\xi d\eta = \Psi_2(x),$$

причем

$$\Psi_2(x) = -C\int_0^x\int_0^T \{P(\xi,\eta)[\widetilde{u}_2(\xi,\eta) - u_1(\xi,\eta)] + [f(\xi,\eta,\widetilde{u}_2(\xi,\eta),\widetilde{u}'_{2\xi}(\xi,\eta)) -$$

$$- f(\xi,\eta,\widetilde{u}_1(\xi,\eta),\widetilde{u}'_{1\xi}(\xi,\eta))]\}\,d\xi d\eta.$$

Отсюда, учитывая оценки (15), имеем

$$|\Psi_2(x)|_0 \leqslant C_0 aTR_0\vec{S}, \quad |v_2(x)|_0 \leqslant GaTR_0\vec{S}.$$

Тогда

$$|u_2(t,x) - u_1(t,x)| \leqslant a\alpha(t)(E + PGaT)\vec{S} + ((C^{-1}A + E)_0 + E)\,GaTR_0\vec{S}.$$

Продолжая этот процесс, получаем оценки

$$|\widetilde{u}_n(t,x) - \widetilde{u}_{n-1}(t,x)| \leqslant a\alpha(t)(E + PGaT)R_0^{n-2}\vec{S} + ((C^{-1}A + E)_0 + E) \times$$

$$\times\, GaTR_0^{n-2}\vec{S};$$

$$|\widetilde{u}_n(t,x) - u_{n-1}(t,x)| \leqslant a\alpha(t)(E + PGaT)R_0^{n-2}\vec{S} +$$

$$+ (C^{-1}A + E)_0\cdot GaTR_0^{n-2}\vec{S};$$

$$|\widetilde{u}'_{n_t}(t,x) - \widetilde{u}'_{(n-1)_t}(t,x)| \leqslant 2a(E + PGaT)R_0^{n-2}\vec{S} + (C^{-1}A + E)_0 GaR_0^{n-2}\vec{S}.$$

Подставляя $\widetilde{u}_{n+1}(t, x)$ в двухточечное условие (10), получаем для $v_n(x)$ систему интегральных уравнений

$$(A + C) v_n(x) + C \int_0^x \int_0^T P(\xi, \eta) v_n(\eta) d\xi d\eta = \Psi_n(x),$$

где

$$\Psi_n(x) = -C \int_0^x \int_0^T \{P(\xi, \eta) [\widetilde{u}_n(\xi, \eta) - u_{n-1}(\xi, \eta)] + [f(\xi, \eta, \widetilde{u}_n(\xi, \eta), \widetilde{u}'_{n\xi}(\xi, \eta)) -$$

$$- f(\xi, \eta, \widetilde{u}_{n-1}(\xi, \eta), \widetilde{u}'_{n-1_\xi}(\xi, \eta))]\} d\xi d\eta.$$

Затем имеем

$$|\Psi_n(x)|_0 \leqslant C_0 a T R_0^{n-1} \vec{S},$$

$$|v_n(x)|_0 \leqslant G a T R_0^{n-1} \vec{S}. \tag{16}$$

Далее следует

$$|\widetilde{u}_{n+1}(t, x) - \widetilde{u}_n(t, x)| \leqslant a\alpha(t)(E + PGaT) R_0^{n-1}\vec{S} + ((C^{-1}A + E)_0 +$$

$$+ E) GaT R_0^{n-1}\vec{S},$$

$$|\widetilde{u}_{n+1}(t, x) - u_n(t, x)| \leqslant a\alpha(t)(E + PGaT) R_0^{n-1}\vec{S} + (C^{-1}A + E)_0 GaT R_0^{n-1}\vec{S},$$

$$|\widetilde{u}'_{(n+1)_t}(t, x) - \widetilde{u}'_{n_t}(t, x)| \leqslant 2a(E + PGaT) R_0^{n-1}\vec{S} + (C^{-1}A + E)_0 Ga R_0^{n-1}\vec{S}.$$

Используя неравенство (16), имеем

$$|u_{n+1}(t, x) - u_n(t, x)| \leqslant a\alpha(t)(E + PGaT) R_0^{n-1}\vec{S} + ((C^{-1}A + E)_0 + E) \times$$

$$\times GaT R_0^{n-1}\vec{S} + GaT R_0^n \vec{S}. \tag{17}$$

Легко видеть из (16) и (17), что справедливы неравенства

$$|u_{n+k}(t, x) - u_n(t, x)| \leqslant a\alpha(t)(E + PGaT) R_0^{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} R_0^i \vec{S} + ((C^{-1}A + E)_0 +$$

$$+ E) GaT R_0^{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} R_0^i \vec{S} + GaT R_0^n \sum_{i=0}^{k-1} R_0^i \vec{S}, \tag{18}$$

$$|u'_{(n+k)_t}(t, x) - u'_{n_t}(t, x)| \leqslant 2a(E + PGaT) R_0^{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} R_0^i \vec{S} +$$

$$+ (C^{-1}A + E)_0 Ga R_0^{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} R_0^i \vec{S}, \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| v_i(x) \right|_0 \leqslant GaT \sum_{l=0}^{n-1} R_0^l \vec{S}.$$

Из оценок (18), (19) и условия IV вытекает равномерная сходимость последовательных приближений (9) к предельной функции $u_\infty(t, x)$ в области $(t, x) \in [0, T] \times [-a, a]$, причем предельная функция удовлетворяет двухточечному условию (3), системе уравнений (1) и для нее справедливы неравенства

$$|u_\infty(t, x) - u_n(t, x)| \leqslant a\alpha(t)(E + PGaT) R_0^{n-1}(E - R_0)^{-1}\vec{S} +$$

$$+ ((C^{-1}A + E)_0 + E)\, GaTR_0^{n-1}(E - R_0)^{-1}\vec{S} + GaTR_0^n (E - R_0)^{-1}\vec{S},$$

$$|u'_{\infty_t}(t, x) - u'_{n_t}(t, x)| \leqslant 2a(E + PGaT)\, R_0^{n-1}(E - R_0)^{-1}\vec{S} +$$

$$+ (C^{-1}A + E)_0 GaR_0^{n-1}(E - R_0)^{-1}\vec{S},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| v_i(x) \right| \leqslant GaT(E - R_0)^{-1}\vec{S}.$$

Из полученных оценок следует

$$|u_n(t, x) - u_0(t, x)| \leqslant GaT(E - R_0)^{-1}\vec{S} + aT\vec{M}_0.$$

Для доказательства единственности полученного решения системы (1)—(3) предположим, что существуют два решения $u(t, x)$ и $z(t, x)$ системы (1)—(3), удовлетворяющие системе интегральных уравнений (9). Тогда имеем

$$u(t, x) = u_0(t) + v(x) + \int_0^x \int_0^t \{[P(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u'_\xi(\xi, \eta))] -$$

$$- \overline{[P(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u'_\xi(\xi, \eta))]}\}\, d\xi d\eta + \frac{t}{T}\{C^{-1}(w(x) -$$

$$- A[u_0(0) + v(x)]) - u_0(T) - v(x)\};$$

$$z(t, x) = u_0(t) + v(x) + \int_0^x \int_0^t \{[P(\xi, \eta)\, z(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z'_\xi(\xi, \eta))] -$$

$$- \overline{[P(\xi, \eta)\, z(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z'_\xi(\xi, \eta))]}\}\, d\xi d\eta + \frac{t}{T}\{C^{-1}(w(x) -$$

$$- A[u_0(0) + v(x)]) - u_0(T) - v(x)\}.$$

Полагая

$$\vec{S}_1 = P\,|u(\xi, \eta) - z(\xi, \eta)|_0 + K_1\,|u(\xi, \eta) - z(\xi, \eta)|_0 + K_2\,|u'_\xi(\xi, \eta) - z'_\xi(\xi, \eta)|_0\},$$

получаем оценки

$$|u(t, x) - z(t, x)| \leqslant a\,\frac{T}{2}\,\vec{S}_1, \quad |u'_t(t, x) - z'_t(t, x)| \leqslant 2a\vec{S}_1.$$

После n итераций будем иметь

$$|u(t, x) - z(t, x)| \leqslant a\alpha(t)\, R_1^n\vec{S}_1 \leqslant a\,\frac{T}{2}\, R_0^n\vec{S}_1,$$

$$|u'_t(t, x) - z'_t(t, x)| \leqslant 2aR_1^n\vec{S}_1 \leqslant 2aR_0^n\vec{S}_1,$$

причем $R_1 = Pa\dfrac{T}{2} + K_1 a\dfrac{T}{2} + K_2 2a$. При $n \to \infty$ получаем, используя условие IV, $u(t, x) \equiv z(t, x)$, $u'_t(t, x) \equiv z'_t(t, x)$, т. е. решение рассматриваемой задачи единственно.

1. *Митропольский Ю. А., Ткач Б. П.* Периодические решения нелинейных систем уравнений в частных производных нейтрального типа // Укр. мат. журн.— 1969.— **21**, № 4.— С. 479—486.
2. *Скоробогатько В. Я.* Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.— К. : Наук. думка, 1980.— 243 с.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования краевых задач.— К. : Наук. думка, 1986.— 224 с.
4. *Пташник Б. И.* Некорректные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.— К. : Наук. думка, 1984.— 264 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 14.06.90