УДК 517.983+517.95

В. А. Маловичко

Краевые задачи для систем дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами

Доказана однозначная сильная разрешимость нескольких краевых задач для систем $Au_{xx} - Bu_y = f$, $A_1 u_{xx} - Bu_{yy} = f$, где A, A_1, B — операторы параболического и гиперболического типов.

Доведена однозначна сильна розв'язність кількох крайових задач для систем $Au_{xx} - Bu_y = f$, $A_1 u_{xx} - Bu_{yy} = f$, де A, A_1, B — оператори параболічного і гіперболічного типів.

В настоящей статье доказана однозначная сильная разрешимость нескольких краевых задач для систем дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами, правые части которых принадлежат пространству L_2 или пространствам с негативной нормой. Отметим, что краевые задачи для дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами изучались в работах [1—6] и др.

1. Пусть G — ограниченная область в R^n с кусочно-гладкой границей ∂G. В области $Q = \{(x, y, z) : 0 < x < X,\ 0 < y < Y,\ z = (z_1, \ldots, z_n) \in G\}$ рассмотрим систему

$$Lu(x, y, z) \equiv Au_{xx} - Bu_y = f(x, y, z), \tag{1}$$

где u, f — m-мерные вектор-функции (дальше будем называть их функциями), A и B — операторы вида

$$A = a(z)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z_j} a^{ij}(y, z)\frac{\partial}{\partial z_i} + p(y, z),$$

$$B = b(z)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z_j} b^{ij}(z)\frac{\partial}{\partial z_i} + q(z),$$

коэффициентами которых являются симметричные матрицы порядка m, причем $a^{ij}=a^{ji}$, $b^{ij}=b^{ji}$, $a, b, q\in C(\overline{G})$, $b^{ij}\in C^1(\overline{G})$, $a^{ij}\in C^1([0, Y]\times\overline{G})$, $p, p_y\in C([0, Y]\times\overline{G})$, и для любых векторов ξ, $\xi_i\in R^m$, $i=\overline{1, n}$, в области Q выполняются неравенства

$$[a(z)-b(z)]\,\xi\xi\geqslant\alpha_1\xi\xi,\quad a^{ij}(y, z)\,\xi_i\xi_j\geqslant 0,\quad b^{ij}(z)\,\xi_i\xi_j\geqslant\alpha_2\xi_i\xi_i,$$
$$p(y, z)\,\xi\xi\geqslant 0,\quad q(z)\,\xi\xi\geqslant 0,\quad \alpha_{1,2}>0 \tag{2}$$

(по повторяющимся индексам происходит суммирование от 1 до n).

Пусть Γ — граница области Q, $\Gamma_1=\{(x, y, z)\in\Gamma : z\in\partial G\}$.

Задача 1. *В области Q найти решение систем* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0, y, z)=u(X, y, z)=u(x, 0, z)=u|_{\Gamma_1}=0. \tag{3}$$

Задача 2. *В области Q найти решение системы*

$$L^*v(x, y, z)=f(x, y, z), \tag{4}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$v(0, y, z)=v(X, y, z)=v(x, Y, z)=v|_{\Gamma_1}=0, \tag{5}$$

где L^*— оператор, формально сопряженный с оператором L.

Легко проверить, что задачи 1, 2 взаимно сопряжены.

Введем обозначения: W_1, W_2 — пространства гладких в $\overline{Q}$ функций, удовлетворяющих соответственно условиям (3) и (5); H_1^+ (H_2^+) — гильбертово пространство, полученное замыканием пространства W_1 (W_2) по норме

$$\|u\|^2=\int(u_{xxy}u_{xxy}+a^{ij}u_{xxz_i}u_{xxz_j}+u_{xyz_i}u_{xyz_i})\,dQ; \tag{6}$$

H_1^- (H_2^-) — пространство с негативной нормой [7, с. 46], построенное по $L_2(Q)$ и H_1^+ (H_2^+).

Лемма 1. *Для всех функций $u\in H_1^+$, $v\in H_2^+$ справедливы энергетические неравенства*

$$\|Lu\|_{H_2^-}\leqslant\gamma_1\|u\|_{H_1^+},\quad \gamma_1>0, \tag{7}$$

$$\|L^*v\|_{H_1^-}\leqslant\gamma_2\|v\|_{H_2^+},\quad \gamma_2>0. \tag{8}$$

Доказательство. В силу плотности W_1 в H_1^+ неравенство (7) достаточно доказать для $u\in W_1$. Пусть $u\in W_1$. Интегрируя по частям, получаем

$$\|Lu\|_{H_2^-}=\sup_{v\in H_2^+}\|v\|_{H_2^+}^{-1}(Lu, v)_{L_2(Q)}=\sup_{v\in W_2}\|v\|_{H_2^+}^{-1}\int_Q(-au_{xy}v_x-a^{ij}u_{xz_i}v_{xz_j}-$$
$$-pu_xv_x+bu_{xy}v_x-b^{ij}u_{yz_i}v_{z_j}-qu_yv)\,dQ\leqslant\sup_{v\in W_2}\|v\|_{H_2^+}^{-1}\cdot\gamma_1\|u\|_{H_1^+}\|v\|_{H_2^+}=$$
$$=\gamma_1\|u\|_{H_1^+}.$$

Неравенство (8) доказывается аналогично.

Лемма 2. *Если для некоторых чисел $\mu>0$, $\nu>0$ и любых векторов ξ, $\xi_i\in R^m$, $i=\overline{1, n}$, в области Q выполняются неравенства*

$$[\mu a^{ij}(y, z)\pm a_y^{ij}(y, z)]\,\xi_i\xi_j\geqslant\nu a^{ij}(y, z)\,\xi_i\xi_j,\quad [\mu p(y, z)\pm p_y(y, z)]\,\xi\xi\geqslant 0, \tag{9}$$

то для всех функций $u\in H_1^+$, $v\in H_2^+$ справедливы энергетические неравенства

$$\|Lu\|_{H_2^-}\geqslant\gamma_3\|u\|_{L_2(Q)},\quad \gamma_3>0, \tag{10}$$

$$\|L^*v\|_{H_1^-}\geqslant\gamma_4\|v\|_{L_2(Q)},\quad \gamma_4>0. \tag{11}$$

Доказательство. Для функций $u \in W_1$ введем интегральное преобразование

$$v(x, y, z) = \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_y^Y \exp(-\mu\gamma)\, u(\beta, \gamma, z)\, d\gamma -$$

$$-\frac{x}{X} \int_0^X d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_y^Y \exp(-\mu\gamma)\, u(\beta, \gamma, z)\, d\gamma.$$

Легко проверить, что $v \in W_2$ и $v_{xxy}(x, y, z) = -\exp(-\mu y)\, u(x, y, z)$. Применяя обобщенное неравенство Шварца и интегрируя по частям, получаем

$$\| Lu \|_{H_2^-} \| v \|_{H_2^+} \geqslant \int_Q Lu \cdot v dQ = \int_Q [-(a-b)\, uv_{xxy} + a^{ij} u_{z_i} v_{xxz_j} + b^{ij} u_{z_i} v_{yz_j} +$$

$$+ puv_{xx} + quv_y]\, dQ = \int_Q \exp(\mu y)\, [(a-b)\, v_{xxy} v_{xxy} - a^{ij} v_{xxyz_i} v_{xxz_j} -$$

$$- b^{ij} v_{xxyz_i} v_{yz_j} - pv_{xxy} v_{xx} - qv_{xxy} v_y]\, dQ \geqslant \frac{1}{2} \int_\Omega \exp(\mu y)\, [2(a-b)\, v_{xxy} v_{xxy} +$$

$$+ (\mu a^{ij} + a^{ij}_y)\, v_{xxz_i} v_{xxz_j} + 2b^{ij} v_{xyz_i} v_{xyz_j} + (\mu p + p_y)\, v_{xx} v_{xx} +$$

$$+ 2qv_{xy} v_{xy}]\, dQ \geqslant \delta \Big(\int_Q v_{xxy} v_{xxy} dQ \Big)^{1/2} \| v \|_{H_2^+} = \gamma_3 \| u \|_{L_2(Q)} \| v \|_{H_2^+}, \quad \delta > 0. \quad (12)$$

Теперь для доказательства неравенства (10) надо сократить (12) на $\| v \|_{H_2^+}$ и осуществить предельный переход.

Неравенство (11) доказывается аналогично при помощи интегрального преобразования

$$u(x, y, z) = \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^y \exp(\mu\gamma)\, v(\beta, \gamma, z)\, d\gamma - \frac{x}{X} \int_0^X d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^y \exp(\mu\gamma) \times$$

$$\times v(\beta, \gamma, z)\, d\gamma, \quad v \in W_2.$$

При этом $u \in W_1$, $u_{xxy}(x, y, z) = \exp(\mu y)\, v(x, y, z)$.

Определение 1. *Пусть $f \in L_2(Q)$. Функцию $u \in H_1^+$ назовем обобщенным решением задачи 1, если существует последовательность $u_k \in W_1$ такая, что*

$$\lim_{k \to \infty} \| u_k - u \|_{H_1^+} = \lim_{k \to \infty} \| Lu_k - f \|_{H_2^-} = 0.$$

Определение 2. *Пусть $f \in H_2^-$. Функцию $u \in L_2(Q)$ назовем обобщенным решением задачи 1, если существует последовательность $u_k \in W_1$ такая, что*

$$\lim_{k \to \infty} \| u_k - u \|_{L_2(Q)} = \lim_{k \to \infty} \| Lu_k - f \|_{H_2^-} = 0.$$

Согласно [7, с. 98; 8, с. 183] в качестве следствия лемм 1, 2 сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. *Если выполняются условия* (9), *то для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение $u \in H_1^+$ задачи* 1 *в смысле определения* 1, *а для любой функции $f \in H_2^-$ существует единственное обобщенное решение $u \in L_2(Q)$ задачи* 1 *в смысле определения* 2.

Аналогичные результаты справедливы относительно разрешимости задачи 2.

2. Рассмотрим вопрос о разрешимости нелокальных краевых задач для систем (1), (4). Дополнительно будем считать, что в области Q выполняются

равенства

$$a^{ij}_y(y, z) \equiv 0, \quad p_y(y, z) \equiv 0, \tag{13}$$

т. е. будем считать, что a^{ij} и p не зависят от y.

З а д а ч а 3. *В области Q найти решение системы* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0, y, z) = u(X, y, z) = u|_{\Gamma_1} = 0, \quad u(x, 0, z) = -\lambda u(x, Y, z), \tag{14}$$

где $0 < \lambda \leqslant 1$.

З а д а ч а 4. *В области Q найти решение системы* (4), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$v(0, y, z) = v(X, y, z) = v|_{\Gamma_1} = 0, \quad \lambda v(x, 0, z) = -v(x, Y, z). \tag{15}$$

Можно проверить непосредственной проверкой, что задачи 3, 4 взаимно сопряжены.

Пусть W_3, W_4 — пространства гладких в $\overline{Q}$ функций, удовлетворяющих соответственно условиям (14) и (15); H_3^+ (H_4^+) — гильбертово пространство, полученное замыканием пространства W_3 (W_4) по норме

$$\|u\|^2 = \int_Q (u_{xxy}u_{xxy} + u_{xyz_i}u_{xyz_j})\, dQ;$$

H_3^- (H_4^-) — пространство с негативной нормой, построенное по $L_2(Q)$ и H_3^+ (H_4^+); $\Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \Gamma : y = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \Gamma : y = Y\}$; $l(x, y, z)$ — вектор единичной внешней нормали к границе Γ в точке $(x, y, z) \in \Gamma$.

Л е м м а 3. *Для всех функций $u \in H_3^+$, $v \in H_4^+$ справедливы энергетические неравенства*

$$\|Lu\|_{H_4^-} \leqslant \gamma_5 \|u\|_{H_3^+}, \quad \gamma_5 > 0,$$

$$\|L^*v\|_{H_3^-} \leqslant \gamma_6 \|v\|_{H_4^+}, \quad \gamma_6 > 0.$$

Доказательство леммы 3 подобно доказательству леммы 1.

Л е м м а 4. *Для всех функций $u \in H_3^+$, $v \in H_4^+$ справедливы энергетические неравенства*

$$\|Lu\|_{H_4^-} \geqslant \gamma_7 \|u\|_{L_2(Q)}, \quad \gamma_7 > 0, \tag{16}$$

$$\|L^*v\|_{H_3^-} \geqslant \gamma_8 \|v\|_{L_2(Q)}, \quad \gamma_8 > 0. \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для функций $u \in W_3$ введем интегральное преобразование

$$v(x, y, z) = \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha \tilde{u}(\beta, y, z)\, d\beta - \frac{x}{X} \int_0^X d\alpha \int_0^\alpha \tilde{u}(\beta, y, z)\, d\beta,$$

где

$$\tilde{u}(x, y, z) = -\int_0^y u(x, \alpha, z)\, d\alpha + \frac{1}{1+\lambda} \int_0^Y u(x, \alpha, z)\, d\alpha.$$

Несложно проверить, что $v \in W_4$, $v_{xxy}(x, y, z) = -u(x, y, z)$. Применяя обобщенное неравенство Шварца и интегрируя по частям, имеем

$$\|Lu\|_{H_4^-} \|v\|_{H_4^+} \geqslant \int_Q Lu \cdot v\, dQ = \int_Q [(a-b)\, v_{xxy}v_{xxy} - a^{ij}v_{xxyz_i}v_{xxz_j} -$$

$$- b^{ij} v_{xxyz_i} v_{yz_j} - p v_{xxy} v_{xx} - q v_{xxy} v_y] \, dQ = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma_2} (a^{ij} v_{xxz_i} v_{xxz_j} + p v_{xx} v_{xx}) \times$$

$$\times \, l d\Gamma + \int\limits_Q [(a-b) v_{xxy} v_{xxy} + b^{ij} v_{xyz_i} v_{xyz_j} + q v_{xy} v_{xy}] \, dQ \geqslant \gamma_7 \| u \|_{L_2(Q)} \| v \|_{H_4^+}. \tag{18}$$

Мы учли, что интеграл по Γ_2 в (18) в силу условия $\lambda v(x, 0, z) = -v(x, Y, z)$ неотрицателен. Теперь для доказательства неравенства (16) надо сократить неравенство (18) на $\| v \|_{H_1^+}$ и осуществить предельный переход.

Неравенство (17) доказывается аналогично при помощи интегрального преобразования

$$u(x, y, z) = \int\limits_0^x d\alpha \int\limits_0^\alpha \tilde{v}(\beta, y, z) \, d\beta - \frac{x}{X} \int\limits_0^X d\alpha \int\limits_0^\alpha \tilde{v}(\beta, y, z) \, d\beta,$$

где

$$\tilde{v}(x, y, z) = \int\limits_0^y v(x, \alpha, z) \, d\alpha - \frac{\lambda}{1+\lambda} \int\limits_0^Y v(x, \alpha, z) \, d\alpha, \quad v \in W_4.$$

Определение 3. *Пусть* $f \in L_2(Q)$. *Функцию* $u \in H_3^+$ *назовем обобщенным решением задачи* 3, *если существует последовательность* $u_k \in W_3$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \| u_k - u \|_{H_3^+} = \lim_{k\to\infty} \| Lu_k - f \|_{H_4^-} = 0.$$

Определение 4. *Пусть* $f \in H_4^-$. *Функцию* $u \in L_2(Q)$ *назовем обобщенным решением задачи* 3, *если существует последовательность* $u_k \in W_3$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \| u_k - u \|_{L_2(Q)} = \lim_{k\to\infty} \| Lu_k - f \|_{H_4^-} = 0.$$

Следствием лемм 3, 4 является такая теорема.

Теорема 2. *Для любой функции* $f \in L_2(Q)$ *существует единственное обобщенное решение* $u \in H_3^+$ *задачи* 3 *в смысле определения* 3, *а для любой функции* $f \in H_4^-$ *существует единственное обобщенное решение* $u \in L_2(Q)$ *задачи* 3 *в смысле определения* 2.

Аналогичные утверждения справедливы и для задачи 4.

3. Рассмотрим теперь в области Q систему

$$L_1 u(x, y, z) \equiv A_1 u_{xx} - B u_{yy} = f(x, y, z), \tag{19}$$

где A_1 — оператор вида

$$A_1 = a(z) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z_j} a^{ij}(y, z) \frac{\partial}{\partial z_i} + p(y, z),$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям (2) (выполнение равенств (13) не требуется).

Задача 5. *В области* Q *найти решение системы* (19), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0, y, z) = u(X, y, z) = u(x, 0, z) = u_y(x, 0, z) = u|_{\Gamma_1} = 0. \tag{20}$$

Задача 6. *В области* Q *найти решение системы* $L_1 v(x, y, z) = f(x, y, z)$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$v(0, y, z) = v(X, y, z) = v(x, Y, z) = v_y(x, Y, z) = v|_{\Gamma_1} = 0. \tag{21}$$

Задачи 5, 6, как нетрудно проверить, взаимно сопряжены.

Введем обозначения: W_5, W_6 — пространства гладких в $\overline{Q}$ функций, удовлетворяющих соответственно условиям (20) и (21); $H_5^+ (H_6^+)$ — гильбертово пространство, полученное замыканием пространства W_5, (W_6) по норме (6); H_5^- (H_6^-) — пространство с негативной нормой, построенное по $L_2(Q)$ и H_5^+ (H_6^+).

Лемма 5. *Для всех функций $u \in H_5^+$, $v \in H_6^+$ справедливы энергетические неравенства*

$$\| L_1 u \|_{H_6^-} \leqslant \gamma_9 \| u \|_{H_5^+}, \quad \gamma_9 > 0,$$

$$\| L_1 v \|_{H_5^-} \leqslant \gamma_{10} \| v \|_{H_6^+}, \quad \gamma_{10} > 0.$$

Лемма 5 доказывается так же, как лемма 1.

Лемма 6. *Если для любых векторов $\xi, \xi_i \in R^m$, $i = \overline{1, n}$, в области Q выполняются неравенства*

$$[a^{ij}(y, z) + (Y - y) a_y^{ij}(y, z)] \xi_i \xi_j \geqslant \alpha_3 a^{ij}(y, z) \xi_i \xi_j, \quad \alpha_3 > 0.$$

$$[a^{ij}(y, z) - y a_y^{ij}(y, z)] \xi_i \xi_j \geqslant \alpha_4 a^{ij}(y, z) \xi_i \xi_j, \quad \alpha_4 > 0, \tag{22}$$

$$[p(y, z) + (Y - y) p_y(y, z)] \xi\xi \geqslant 0, \quad [p(y, z) - y p_y(y, z)] \xi\xi \geqslant 0,$$

то для всех функций $u \in H_5^+$, $v \in H_6^+$ справедливы энергетические неравенства

$$\| L_1 u \|_{H_6^-} \geqslant \gamma_{11} \| u \|_{L_2(Q)}, \quad \gamma_{11} > 0, \tag{23}$$

$$\| L_1 v \|_{H_5^-} \geqslant \gamma_{12} \| u \|_{L_2(Q)}, \quad \gamma_{12} > 0. \tag{24}$$

Доказательство. Для функций $u \in W_5$ введем интегральное преобразование

$$v(x, y, z) = \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_y^Y (Y - \gamma) u(\beta, \gamma, z) d\gamma - \frac{x}{\lambda} \int_0^X d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_y^Y (Y - \gamma) \times$$
$$\times u(\beta, \gamma, z) d\gamma.$$

При этом $v \in W_6$, $v_{xxy}(x, y, z) = -(Y - y) u(x, y, z)$. Применяя, как и при доказательстве лемм 2, 4, обобщенное неравенство Шварца и интегрируя по частям, получаем неравенство

$$\| L_1 u \|_{H_6^-} \| v \|_{H_6^+} \geqslant \int_Q L_1 u \cdot v dQ = \int_Q [(a - b) u v_{xxyy} + a^{ij} u_{z_i} v_{xxz_j} -$$
$$- b^{ij} u_{z_i} v_{yyz_j} + p u v_{xx} - q u v_{yy}] dQ = - \int_Q (Y - y)^{-1} [(a - b) v_{xxy} v_{xxyy} +$$
$$+ a^{ij} v_{xxyz_i} v_{xxz_j} - b^{ij} v_{xxyz_i} v_{yyz_j} + p v_{xxy} v_{xx} - q v_{xxy} v_{yy}] dQ \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \int_Q (Y - y)^{-2} \{(a - b) v_{xxy} v_{xxy} + [a^{ij} + (Y - y) a_y^{ij}] v_{xxz_i} v_{xxz_j} +$$
$$+ b^{ij} v_{xyz_i} v_{xyz_j} + [p + (Y - y) p_y] v_{xx} v_{xx} + q v_{xy} v_{xy}\} dQ \geqslant$$
$$\geqslant \gamma_{11} \left(\int_Q (Y - y)^{-2} v_{xxy} v_{xxy} dQ \right)^{1/2} \| v \|_{H_6^+} = \gamma_{11} \| u \|_{L_2(Q)} \| v \|_{H_6^+},$$

из которого следует неравенство (23).

Неравенство (24) доказывается аналогично при помощи интегрального преобразования

$$u(x, y, z) = \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^y \gamma v(\beta, \gamma, z) d\gamma - \frac{x}{X} \int_0^X d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^y \gamma v(\beta, \gamma, z) d\gamma, \quad v \in W_6.$$

Определение 5. *Пусть $f \in L_2(Q)$. Функцию $u \in H_5^+$ назовем обобщенным решением задачи 5, если существует последовательность $u_R \in$*

$\in W_5$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \| u_k - u \|_{H_5^+} = \lim_{k\to\infty} \| L_1 u_k - f \|_{H_6^-} = 0.$$

Определение 6. *Пусть* $f \in H_6^-$. *Функцию* $u \in L_2(Q)$ *назовем обобщенным решением задачи* 5, *если существует последовательность* $u_k \in \in W_5$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \| u_k - u \|_{L_2(Q)} = \lim_{k\to\infty} \| L_1 u_k - f \|_{H_6^-} = 0.$$

Следствием лемм 5, 6 является такая теорема.

Теорема 3. *Если выполняются условия* (22), *то для любой функции* $f \in L_2(Q)$ *существует единственное обобщенное решение* $u \in H_5^+$ *задачи* 5 *в смысле определения* 5, *а для любой функции* $f \in H_6^-$ *существует единственное обобщенное решение* $u \in L_2(Q)$ *задачи* 5 *в смысле определения 6*.

Аналогичные результаты справедливы для задачи 6.

Замечание. Из полученных выше результатов, в частности, следует однозначная сильная разрешимость в области $\{(x, y): 0 < x < X, 0 < y < Y\}$ соответствующих краевых задач для систем

$$u_{xxy} + p(y) u_{xx} - q u_y = f(x, y),$$
$$u_{xxyy} + p(y) u_{xx} - q u_{yy} = f(x, y).$$

1. *Витюк Н. Я.* О существовании и единственности решения одной задачи С. Л. Соболева // Вычисл. и приклад. математика.— 1985.— № 56.— С. 49—56.
2. *Витюк Н. Я.* О разрешимости одной задачи с операторными коэффициентами // Вестн. Киев. ун-та: Моделирование и оптимизация слож. систем.— 1986.— № 5.— С. 62—65.
3. *Ляшко С. И.* Некоторые вопросы импульсно-точечного управления псевдопараболическими системами // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 3.— С. 368—371.
4. *Ляшко С. И.* О разрешимости смешанных краевых задач с операторными коэффициентами // Успехи мат. наук.— 1987.— **42**, № 3.— С. 191—192.
5. *Маловичко В. А.* Краевые задачи для систем дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами параболического и гиперболического типов // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1988.— № 11.— С. 18—21.
6. *Слепцова И. П., Шишков А. Е.* Смешанная задача для уравнения распространения возмущений в вязких средах в неограниченных областях // Там же.— С. 28—31.
7. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
8. *Ляшко И. И., Диденко В. П., Цитрицкий О. Е.* Фильтрация шумов.— Киев : Наук. думка, 1979.— 230 с.

Киев. технол. ин-т пищ. пром-сти

Получено 23.09.89