УДК 517.926

Ю. С. Колесов

Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией

В основополагающих монографиях [1—4] Ю. А. Митропольский развил представления о ведущей роли одночастотных колебаний в системах со многими степенями свободы и в системах с распределенными параметрами.

При этом Ю. А. Митропольский органично соединил теорию одночастотных автоколебаний с принципом усреднения и методом интегральных многообразий. Именно эти два обстоятельства позволили автору продвинуться в решении указанной в названии задачи.

1. В пространстве непрерывных вектор-функций со значениями в R^2 рассмотрим краевую задачу

$$\dot{u} = \varepsilon Du + A_0 u + \varepsilon A_1 u + F(u), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $D = \mathrm{diag}\{d_1, d_2\}$ $(d_1, d_2 > 0)$, Δ — оператор Лапласа, $A_0 a = i\omega_0 a$, $A_0^* b = -i\omega_0 b$ $(\omega_0 > 0,\ (a, b) = 1)$, F — гладкая нелинейная вектор-функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого, ν — направление внешней нормали к достаточно гладкой границе Γ ограниченной плоской области Ω. В дальнейшем считаем, что $\tau_0' > 0$, где $\lambda_0' = \tau_0' + i\omega_0' = (A_1 a, b)$, и $\mathrm{Re}\, d < 0$, где d — первая ляпуновская величина обыкновенного уравнения (1) при $\varepsilon = 0$. При этих двух допущениях дифференциальное уравнение в R^2

$$\dot{u} = A_0 u + \varepsilon A_1 u + F(u)$$

имеет орбитально экспоненциально устойчивый цикл с амплитудой порядка $\varepsilon^{1/2}$, являющийся одновременно однородным циклом краевой задачи (1). Возникают два естественных вопроса: будет ли он устойчивым режимом краевой задачи (1) и может ли последняя иметь пространственно неоднородные стационарные режимы. На эти вопросы удается ответить, используя упомянутые выше идеи Ю. А. Митропольского.

2. В соответствии с общей идеологией одночастотного метода ищем стационарные режимы краевой задачи (1) в виде

$$u = \varepsilon^{1/2}(\xi a \exp i\omega_0\tau + \bar{\xi}\bar{a}\exp(-i\omega_0\tau)) + \ldots, \tag{2}$$

$$\xi = \xi(\varepsilon\tau, x), \quad t = (1 + \varepsilon\alpha + \ldots)\tau. \tag{3}$$

Подставляя (2), (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, на третьем шаге, т. е. при сравнении коэффициентов при $\varepsilon^{3/2}$, приходим к уравнению

$$\partial\xi/\partial\tau = \varepsilon\,[(Da, b)\Delta\xi + (\lambda_0' + i\omega_0\alpha)\xi + d\xi|\xi|^2] \tag{4}$$

при граничном условии Неймана. Ясно, что при этом $\bar{\xi}$ удовлетворяет комплексно сопряженному уравнению. Отметим еще, что $2(Da, b) = d_1 + d_2 - i\varkappa(d_1 - d_2)$, где $\varkappa = \mathrm{Re}(a_1\cdot\bar{a}_2)/\mathrm{Im}(a_1\cdot\bar{a}_2)$, $a = (a_1, a_2)$.

Уравнение (4) назовем квазинормальной формой исходной краевой задачи (1). Это название оправданно, так как при конечно-разностной аппроксимации оператора Δ и после перехода к полярной системе координат для медленных движений приходим к уравнениям, характерным для резонанса 1 : 1 соответствующего порядка.

3. Предположим, что при некотором $\alpha = \alpha_0$ уравнение (4) имеет состояние равновесия $\xi = \xi_0(x)$. Линеаризуя относительно ξ и $\bar{\xi}$ соответственно уравнение (4) и комплексно сопряженное к нему, получаем

$$\partial v/\partial\tau = \varepsilon L v, \quad v = (\eta, \bar{\eta}), \quad L = \mathrm{diag}\{(Da, b)\Delta,\ (\overline{Da, b})\Delta\} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ \bar{p}_2 & \bar{p}_1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $p_1 = \lambda_0' + i\omega_0\alpha_0 + 2d|\xi_0(x)|^2$, $p_2 = d\xi_0^2(x)$. Очевидно, $(i\xi_0(x), -i\bar{\xi}_0(x))$ — собственный вектор эллиптического оператора L, соответствующий нулевому собственному значению.

Теорема 1. *Пусть в дополнение к предыдущему простой нуль — единственная точка спектра оператора L, лежащая на мнимой оси, и*

$$\varkappa(d_1 - d_2) > -2\sqrt{d_1 d_2}. \tag{6}$$

Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *краевая задача* (1) *имеет грубое периодическое решение, асимптотика которого по* α_0 *и* $\xi_0(x)$ *определяется в соответствии с* (2), (3), *причем оно орбитально экспоненциально устойчиво (неустойчиво), если ненулевые точки спектра оператора* L *лежат слева (есть справа) от мнимой оси.*

Доказательство теоремы 1 проводится по следующей схеме: сначала исходная краевая задача линеаризуется на приближенном периодическом решении; затем с помощью гладких периодических замен получившаяся линейная краевая задача с точностью до слагаемых высшего порядка малости по ε приводится к виду

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \varepsilon L v + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & (D\bar{a}, b)\exp(-2i\omega_0\tau) \\ (Da, \bar{b})\exp 2i\omega_0\tau & 0 \end{pmatrix} \Delta v;$$

после этого показывается, что при условии (6) к последнему уравнению применим принцип усреднения; завершающий этап доказательства вполне традиционен.

Неравенство (6) означает, что все элементарные решения уравнения

$$\dot{u} = \varepsilon D \Delta u + A_0 u \tag{7}$$

при граничном условии Неймана, за исключением $a \exp i\omega_0 t$ и $\bar{a}\exp(-i\omega_0 t)$, экспоненциально затухают. Легко проверить, что при выполнении противоположного к (6) неравенства решения уравнения (7) на высоких модах (с номерами порядка ε^{-1}) растут с показателем экспоненты порядка единицы, что приводит к потере локальности задачи.

Указанные факты проясняют причину, по которой при условии (6) справедлив принцип усреднения: фактически оно сводит проблему к конечномерной. Заметим, что для произвольных параболических по Петровскому систем принцип усреднения в подавляющем большинстве случаев не имеет места.

4. Положим $x_0 = \varkappa (d_1 - d_2)/(d_1 + d_2)$, $y_0 = \operatorname{Im} d/\operatorname{Re} d$.

Т е о р е м а 2. *При условии* (6) *однородный цикл краевой задачи* (1) *устойчив* ⟨*неустойчив*⟩, *если*

$$\lambda_1(d_1 + d_2)(1 + x_0^2) - 4\tau_0'(x_0 y_0 - 1) > 0 \ (< 0), \tag{8}$$

где $\lambda_1 > 0$ — *первое ненулевое собственное число оператора* $-\Delta$ *при граничном условии Неймана.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1.

Пусть теперь параметры краевой задачи (1) таковы, что при некоторых $d_1 = d_{10}$, $d_2 = d_{20}$ левая часть в неравенстве (8) равна нулю. Положим в (1) $D = D_0 - \delta D_1$, где $0 < \delta \ll 1$, $D_0 = \operatorname{diag}\{d_{10}, d_{20}\}$, а элементы матрицы $D_1 = \operatorname{diag}\{d_{11}, d_{21}\}$ произвольны. Предположим далее, что введенное в теореме 2 собственное число λ_1 оператора Лапласа простое, а отвечающая ему собственная функция $e_1(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_\Omega e_1^3(x)\,dx \neq 0. \tag{9}$$

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены указанные выше условия и дополнительно* $3\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$, *где* $\alpha_1 = 1 - x_0 y_0$, $\alpha_2 = x_0 + y_0$, *а в формуле для* x_0 *и неравенстве* (6) *элементы* D *заменены элементами* D_0.

Тогда найдутся такие достаточно малые положительные постоянные $\mu_1 < \mu_2$ *и* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu_1, \mu_2)$, *что при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *и* $\mu_1 \leqslant |\mu| \leqslant \mu_2$, *где* $\mu = 2\operatorname{Re}[(D_1 a, b)(1 + i\alpha_2/\alpha_1)/(1 - ix_0)]\,\delta$, *краевая задача* (1) *имеет пространственно неоднородный цикл, расположенный в окрестности однородного, который устойчив (неустойчив) при* $\mu > 0$ (< 0).

В условиях теоремы 3 квазинормальная форма (4) при $\alpha = \alpha(\mu)$, близком к $-(\xi_0^2 \operatorname{Im} d + \omega_0')/\omega_0$ где $\xi_0^2 = -\tau_0'/\operatorname{Re} d$, имеет пространственно неоднородное состояние равновесия $\xi(x, \mu)$, близкое к ξ_0. Асимптотику пространственно неоднородного цикла находим, подставив эти значения α и ξ в (2), (3). А его свойства устойчивости устанавливаются путем построения нормальной формы на двумерном интегральном многообразии уравнения (4). Здесь имеется в виду метод нормальных форм для систем с распределенными параметрами, предложенный автором в работах [5—6], в которых показано, что асимптотический метод Крылова—Боголюбова—Митропольского содержит в себе этот раздел теории дифференциальных уравнений. Тем самым упомянутые работы служат некоторой иллюстрацией к общим идеям, содержащимся в фундаментальной статье [7].

5. Из теоремы 3 следует, что в ее условиях в краевой задаче (1) жестко возникают автоколебания, расположенные вдалеке от окрестности однородного цикла, причем их появление возможно даже тогда, когда некоторые условия этой теоремы, относящиеся к общности положения (например, неравенство (9)), нарушаются. При этом не исключено, что эти автоволновые процессы имеют иную структуру. Поясним, что имеется в виду.

Предположим, что квазинормальная форма (4) при некотором $\alpha = \alpha_0$ имеет периодическое решение $\xi = \xi_0(\varepsilon\tau, x)$, причем линейно независимы векторы

$$(\partial\xi_0/\partial\tau,\ \partial\bar{\xi}_0/\partial\tau),\ (i\xi_0, -i\bar{\xi}_0). \tag{10}$$

Последнее условие означает, что периодическое решение $\xi_0(\varepsilon\tau, x)$ не является автомодельным, т. е. оно не представимо в виде $\xi_0(x)\exp(i\varepsilon\tau\gamma)$ ни при каком вещественном γ. Линеаризуя уравнение (4) и комплексно сопряженное к нему на периодическом решении $\xi_0(\varepsilon\tau, x)$, приходим к линейной краевой задаче

$$\frac{\partial v}{\partial\tau} = \varepsilon L(\varepsilon\tau)\,v,\ \left.\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{11}$$

где структура оператора $L(\varepsilon\tau)$ полностью аналогична структуре оператора L в (5). Очевидно, что вектор-функции (10) — линейно независимые периодические решения краевой задачи (11).

Теорема 4. *Пусть выполнено неравенство* (6) *и сформулированные выше условия. Пусть линейная краевая задача* (11) *не имеет за исключением отмеченных, равных единице по модулю мультипликаторов.*

Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *краевая задача* (1) *имеет грубый инвариантный тор, колебания на котором происходят с частотами порядка 1 и* ε *и который экспоненциально устойчив (дихотомичен), если все мультипликаторы краевой задачи* (11), *за исключением двух единичных, лежат внутри единичного круга (есть вне его).*

Асимптотика решений на инвариантном торе получается с помощью рядов (2), (3), в которые нужно подставить $\alpha = \alpha_0$, и $\xi = \xi_0(\varepsilon\tau, x)$, а поправки более высоких порядков малости определяются по методу неопределенных коэффициентов.

Обоснование теоремы 4 близко к доказательству теоремы 1 и основано на развитом в работах А. М. Самойленко методе доказательства существования инвариантных торов с помощью функции Грина [8—9].

6. Изложенные выше результаты при некоторых дополнительных ограничениях распространяются на экологические уравнения, обыкновенные части которых, как известно, содержат запаздывания [10, 11], и являются основой для выявления роли миграционных факторов в однородном ареале обитания. Проиллюстрируем это на простейшем примере уравнения Хатчинсона с диффузией

$$\dot{N} = D\Delta N + r(1 - N_{t-1})\,N,\ \left.\frac{\partial N}{\partial\nu}\right|_{\Gamma} = 0. \tag{12}$$

При $2r > \pi$ однородный цикл краевой задачи (12) устойчив (неустойчив), если $D - D_{\text{кр}} > 0$ (< 0), где функция $D_{\text{кр}} = D_{\text{кр}}(r)$ $(D_{\text{кр}}(\pi/2) = 0)$ сначала, грубо говоря, линейно растет, а затем экспоненциально убывает [12].

Численный анализ, выполненный в [13], показал, что ее пространственно неоднородные установившиеся режимы распадаются на два резко различающихся класса — режимы самоорганизации и режимы хатчинсоновского типа. Первый из режимов самоорганизации в полном соответствии с теоремой 4 рождается «из воздуха» еще при $D > D_{\text{кр}}$, является двухчастотным по t со сложной и одновременно хорошо упорядоченной пространственной структурой. Его биологический период существенно меньше хатчинсоновского, т. е. периода однородного цикла. Кроме того, функция

$$N_{\text{ср}}(t) = \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\int_{\Omega} N(t, x)\,dx$$

очень слабо осциллирует около динамической средней плотности

$$M(N_{\text{ср}}) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T N_{\text{ср}}(t)\,dt,$$

которая значительно больше единицы. При уменьшении коэффициента подвижности D нарушается пространственная структура этого режима самоорганизации, увеличивается его биологический период, становится заметнее вариация функции $N_{\text{ср}}(t)$, уменьшается $M(N_{\text{ср}})$. Вероятно, по этой причине при уменьшении D возникает «из воздуха» более сложно устроенный режим самоорганизации с лучшими биологическими характеристиками. Важно, что наглядно различные режимы самоорганизации хорошо различимы. Наиболее простой из них, возникающий первым, таков: большая популяционная волна вращается вокруг центральных участков ареала обитания, колебания плотности в которых небольшие. А возникающий вторым — это определенным образом согласованная система из четырех таких «вихрей». Каждый индивидуальный режим самоорганизации при уменьшении D трансформируется в «диффузионный хаос», когда колебания плотности в различных участках ареала обитания слабо синхронизированы. Возникновение пространственно неоднородных режимов хатчинсоновского типа объясняет теорема 3. Вначале они обладают плохими биологическими характеристиками: велик биологический период, сильно осциллирует функция $N_{\text{ср}}(t)$, величина $M(N_{\text{ср}})$ лишь чуть больше единицы. При уменьшении D их пространственная структура усложняется. При заметном уменьшении D каждый из них переходит в упомянутый выше диффузионный хаос.

В работе [14] к числу биологических отнесены параболические краевые задачи, в которых возможна потеря устойчивости однородного цикла за счет коэффициентов диффузии. Представляется, что на примере краевой задачи (12) сложная динамика, связанная с этим обстоятельством, хорошо пояснена. В большинстве работ по биофизике, однако, при моделировании явно биологических явлений до сих пор используются в основном физические параболические краевые задачи, однородный цикл в которых не теряет устойчивости за счет коэффициентов диффузии [15].

7. Приведем еще одно приложение одночастотного метода Ю. А. Митропольского, примыкающее к изложенному в предыдущем пункте и имеющее самостоятельный интерес.

Рассмотрим следующее обобщение уравнения Хатчинсона:

$$\dot{N} = rF(N_{t-1})\,N, \tag{13}$$

где аналитическая при $z > 0$ функция $F(z)$, называемая трофической, удовлетворяет условиям $F(z) > 0$ при $0 \leqslant z < 1$, $F(z) < 0$ при $z > 1$, $F'(1) = -1$. Пусть в (13) $r = \pi/2 + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, и действительная часть первой ляпуновской величины при $\varepsilon = 0$ в состоянии равновесия $N = 1$ отрицательна. В этом случае [16, 17] уравнение (13) имеет устойчивое периодическое решение, разлагающееся в ряд

$$N(t) = 1 + \xi\cos\frac{\pi}{2}\tau + \xi^2 x_2(\tau) + \ldots, \tag{14}$$

где $\tau = \omega(\xi)\,t$, а $\omega(\xi)$ $(\omega(0) = 1)$ аналитически зависит от квадрата обобщенной амплитуды ξ функции $N(t) - 1$, имеющей порядок $\varepsilon^{1/2}$ и определяемой из уравнения разветвления $\varepsilon = \psi(\xi)$ $(\psi(0) = 0)$, в котором $\psi(\xi)$ также аналитически зависит от ξ^2.

Т е о р е м а 5. *Среднее периодической функции* (14) *равно единице только при условии* $F(z) = 1 - z$, *т. е. когда* (13) — *уравнение Хатчинсона.*

Представим периодическое решение (14) в виде

$$N(t) = 1 + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t,$$

где T — период, и назовем функцию переменного ξ

$$\frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \qquad (15)$$

коэффициентом нелинейного искажения.

Т е о р е м а 6. *При* $F(z) = 1 - z$, *т. е. в случае уравнения Хатчинсона, функция* (15) — *миноранта для коэффициента нелинейного искажения периодического решения* (14) *каждого из уравнений вида* (13).

Хотя доказательства этих утверждений легко следуют из [16, 17], их значение для экологии велико, так как они подтверждают фундаментальность уравнения Хатчинсона.

8. Итак, развитые Ю. А. Митропольским и его учениками идеи и методы позволяют решать новые достаточно сложные задачи, естественным образом возникающие в экологии и биофизике. Конечно, строгие утверждения в этой тематике служат лишь опорой для интуиции. Но и это очень важно, так как они дают надежный ориентир при рассмотрении сильно нелинейных систем.

В заключение отметим работы [18, 21], в которых содержатся результаты, примыкающие к изложенным выше.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 504 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1971.— 440 с.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М.: Наука, 1973.— 512 с.
4. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных.— Киев : Вища шк., 1976.— 589 с.
5. *Колесов Ю. С.* Математические модели экологии // Исследования по устойчивости и теории колебаний.— Ярославль : Изд-во Яросл. ун-та, 1979.— С. 3—40.
6. *Колесов Ю. С.* Метод нормальных форм для систем с запаздыванием // Лит. мат. сб.— 1980.— **20**, № 4.— С. 73—78.
7. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* К вопросу об асимптотических разложениях нелинейной механики // Укр. мат. журн.— 1979.— **31**, № 1.— С. 11—17.
8. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— **34**, № 5.— С. 1219—1240.
9. *Самойленко А. М.* К теории возмущений инвариантных многообразий динамических систем // Тр. 5-й межд. конф. по нелинейн. колебаниям. Аналитические методы.— Киев : АН УССР, 1970.— Т. 1.— С. 495—499.
10. *Колесов Ю. С.* Задача паразит-хозяин // Динамика биологических популяций.— Горький : Изд-во Горьк. ун-та, 1984.— С. 16—29.
11. *Колесов Ю. С.* Об одной бифуркационной теореме в теории автоколебаний распределенных систем // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 10.— С. 1709—1713.
12. *Колесов А. Ю.* Об устойчивости пространственно однородного цикла уравнения Хатчинсона с диффузией // Математические модели в биологии и медицине.— 1985.— Вып. 1.— С. 93—102.
13. *Колесов Ю. С., Майоров В. В.* Пространственная и временная самоорганизация в одновидовом биоценозе // Динамика биологических популяций.— Горький : Изд-во Горьк. ун-та, 1986.— С. 3—13.
14. *Колесов Ю. С.* Инварианты экологических уравнений // Математические модели в биологии и медицине.— 1985.— Вып. 1.— С. 30—59.
15. *Автоволновые* процессы в системах с диффузией / Под ред. М. Т. Греховой.— Горький : Изд-во Ин-та прикл. физики АН СССР, 1981.— 276 с.
16. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием.— Киев : Вища шк., 1979.— 247 с.
17. *Колесов Ю. С., Швитра Д. И.* Автоколебания в системах с запаздыванием.— Вильнюс: Мокслас, 1979.— 146 с.
18. *Колесов А. Ю.* Миграционные эффекты в одновидовом биоценозе // Нелинейные колебания и экология.— Ярославль : Изд-во Яросл. ун-та, 1984.— 34—61.

19. *Колесов А. Ю.* О принципе области в задаче о колебаниях численнссти млекопитающих // Нелинейные колебания в задачах экологии.— Ярославль : Изд-во Яросл. ун-та, 1985.— С. 11—22.
20. *Колесов Ю. С.* Устойчивость и бифуркация бегущих волн // Там же.— С. 3—10.
21. *Кащенко С. А., Колесов Ю. С.* Диффузионная неустойчивость тора // Докл. АН СССР.— 1985.— 281, № 6.— С. 1307—1309.

Яросл. ун-т

Получено 03.06.86