В. Ф. Бабенко

О приближенном вычислении скалярных произведений

1. Будем изучать задачу оптимизации приближенного вычисления билинейных функционалов, в частности скалярных произведений, по линейной информации об аргументах в следующей постановке. Пусть H — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$; $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$— заданные подмножества H; $\Omega(\cdot, \cdot)$ — билинейный функционал в H. Отметим (см., например, [1, с. 76]), что $\Omega(\cdot, \cdot)$ однозначно представляется в виде $\Omega(f_1, f_2) = (Bf_1, f_2)$, где B — линейный ограниченный оператор в H. Пусть, далее, на линейных оболочках $\operatorname{lin}(\mathfrak{M}_i)$ множеств $\mathfrak{M}_i$ заданы наборы линейных непрерывных функционалов $T_i = (T_{i,1}, \ldots, T_{i,n_i})$, $i = 1, 2$, где $T_{i,j}: \operatorname{lin}(\mathfrak{M}_i) \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n_i$. Векторы $T_i(f_i) = (T_{i,1}(f_1), \ldots, T_{i,n_i}(f_i))$ будем называть линейной информацией об f_1 и f_2 типа (n_1, n_2) (или, короче, (n_1, n_2)-информацией). Произвольную вещественную функцию $\Phi = \Phi(x, y) = \Phi(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2})$ от $n_1 + n_2$ переменных будем называть методом восстановления функционала $\Omega(\cdot, \cdot)$ по (n_1, n_2)-информации. Положим

$$R(f_1, f_2; T_1, T_2; \Phi) = \Omega(f_1, f_2) - \Phi(T_1(f_1), T_2(f_2));$$

$$R(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2; T_1, T_2; \Phi) = \sup_{\substack{f_i \in \mathfrak{M}_i \\ i=1,2}} |R(f_1, f_2; T_1, T_2; \Phi)|; \tag{1}$$

$$R_{n_1,n_2}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = \inf_{T_1,T_2} \inf_{\Phi} R(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2; T_1, T_2; \Phi) \tag{2}$$

($\inf\limits_{\Phi}$ берется по всевозможным функциям от $n_1 + n_2$ переменных, а $\inf\limits_{T_1,T_2}$ по всевозможным наборам функционалов, представляющим (n_1, n_2)-информацию об f_1, f_2);

$$R_N(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = \inf_{n_1+n_2=N} R_{n_1,n_2}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2), \qquad N = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Величину (1) назовем погрешностью метода Φ восстановления функционала Ω на множествах $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ по информации T_1 и T_2, величину (2) — оптимальной погрешностью восстановления Ω на $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ по (n_1, n_2)-информации и, наконец, величину (3) — оптимальной погрешностью восстановления Ω на $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ по информации суммарного объема N. Если существуют T_1, T_2 и Φ, реализующие нижние грани в правой части (2), то будем их называть оптимальной (n_1, n_2)-информацией и оптимальным методом ее использования для восстановления Ω на $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Числа n_1^0 и n_2^0, реализующие inf в (3), будем называть оптимальными объемами информации об f_1 и f_2, а оптимальную (n_1^0, n_2^0)-информацию — оптимальной информацией объема N об f_1 и f_2. Требуется для заданных Ω, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и N (или n_1, n_2) найти величины (3) (или (2)), а также оптимальную информацию объема N (или (n_1, n_2)-информацию) и оптимальный метод ее использования. Некоторые результаты по решению этих задач см. в [2], где $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — эллипсоиды в H.

Оценка снизу для погрешности метода Φ восстановления функционала Ω по информации T_1, T_2 вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть множества $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2$, выпуклы и центрально симметричны, и $\mathfrak{M}_i(T_i) = \{f \in \mathfrak{M}_i : T_i(f) = 0\}$. Тогда для любых T_1, T_2 и Φ*

$$R(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2; T_1, T_2; \Phi) \geqslant \max\Big\{ \sup_{\substack{f_1 \in \mathfrak{M}_1 \\ f_2 \in \mathfrak{M}_2(T_2)}} |\Omega(f_1, f_2)|, \sup_{\substack{f_1 \in \mathfrak{M}_1(T_1) \\ f_2 \in \mathfrak{M}_2}} |\Omega(f_1, f_2)|\Big\}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$R(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2; T_1, T_2; \Phi) \geqslant \sup_{\substack{f_1 \in \mathfrak{M}_1 \\ f_2 \in \mathfrak{M}_2(T_2)}} |\Omega(f_1, f_2) - \Phi(T_1(f_1), 0)| \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\substack{f_1\in\mathfrak{M}_1\\ f_2\in\mathfrak{M}_2(T_2)}} \max\{|\Omega(f_1, f_2)-\Phi(T_1(f_1), 0)|, |-\Omega(f_1, f_2)-\Phi(T_1(f_1), 0)|\} \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\substack{f_1\in\mathfrak{M}_1\\ f_2\in\mathfrak{M}_2(T_2)}} |\Omega(f_1, f_2)|.$$

Аналогично

$$R(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2; T_1, T_2; \Phi) \geqslant \sup_{\substack{f_1\in\mathfrak{M}_1(T_1)\\ f_2\in\mathfrak{M}_2}} |\Omega(f_1, f_2)|.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. В конкретных ситуациях одно из множеств $\mathfrak{M}_i$ (или оба) могут обладать следующим свойством: если $f_i\in\mathfrak{M}_i$, то для любого $u\in H_i$ (H_i — заданное конечномерное подпространство H) $u+f_i\in\mathfrak{M}_i$. Если, например, таким свойством обладает $\mathfrak{M}_1$, то в силу леммы 1

$$R(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2; T_1, T_2; \Phi) \geqslant \sup_{u\in H_1} \sup_{f_2\in\mathfrak{M}_2(T_2)} |\Omega(u, f_2)| = +\infty,$$

если $\Omega(u, f_2)\neq 0$ для некоторых $u\in H_1$, $f_2\in\mathfrak{M}_2(T_2)$. Таким образом, для того чтобы величина $R(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2; T_1, T_2; \Phi)$ была в этом случае конечной, необходимо, чтобы функционалы

$$F_1(f_2)=\Omega(u_1, f_2), \ldots, F_m(f_2)=\Omega(u_m, f_2) \tag{4}$$

($m=\dim H_1$, $\{u_1, \ldots, u_m\}$ — фиксированный базис в H_1) обращались в нуль для любой $f_2\in\mathfrak{M}_2(T_2)$, т. е. чтобы эти функционалы на $\operatorname{lin}(\mathfrak{M}_2)$ являлись линейными комбинациями функционалов $T_{2,1}, \ldots, T_{2,n_2}$ (по существу это означает, что информация о втором аргументе $\Omega(f_1, f_2)$ содержит функционалы вида (4)). Аналогичное верно, если указанным свойством обладает $\mathfrak{M}_2$.

2. Теперь рассмотрим случай, когда H — функциональное пространство L_2 и $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2\subset L_2$ — некоторые классы функций, и проиллюстрируем возможность дальнейшего изучения сформулированных выше задач. Ограничимся периодическим случаем.

Пусть C и L_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, — пространства непрерывных и соответственно суммируемых в p-й степени на $[0, 2\pi]$ (при $p<\infty$) или существенно ограниченных (при $p=\infty$) 2π-периодических функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $\|\cdot\|_p$ — норма в L_p; F_p — единичный шар в L_p. Как обычно, через $K*\psi$ обозначим свертку функций $K\in L_1$ (ядра свертки) и $\psi\in L_1$. Для заданного ядра K положим $\mu=\mu(K)=1$, если $\int_0^{2\pi} K(t)\,dt=0$, и $\mu=\mu(K)=0$ — в противном случае. Если задано ядро K и множество $F\subset L_1$, то через $K*F$ обозначим класс функций вида $f=a\mu+K*\psi$, $a\in\mathbb{R}$, $\psi\in F$, $\psi\perp\mu$. Многие важные классы 2π-периодических функций можно рассматривать как классы типа $K*F$. В частности, если $B_r(x)=\pi^{-1}\sum_{m=1}^{\infty} m^{-r}\cos(mx-\pi r/2)$, $r=1, 2, \ldots,$ — функции Бернулли, то $B_r*F_p=W_p^r$ — класс 2π-периодических функций f, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$, $f^{(0)}=f$, такую, что $\|f^{(r)}\|_p\leqslant 1$.

В дальнейшем будем предполагать, что $\mathfrak{M}_i=K_i*F_{p_i}$, $i=1, 2$, где $K_i\in L_2$ и $p_i\in[1, \infty]$ (так что $K_i*F_{p_i}\subset L_2$); $\mu_1=\mu(K_1)=\mu(K_2)=\mu_2$. Будем также считать, что билинейный функционал $\Omega(f_1, f_2)$ имеет вид

$$\Omega(f_1, f_2)=\int_0^{2\pi}(K*f_1)f_2\,dx,\quad K\in L_2,\quad \int_0^{2\pi} K\,dx=1, \tag{5}$$

либо

$$\Omega(f_1, f_2)=\int_0^{2\pi} f_1f_2\,dx. \tag{6}$$

Ниже будем использовать обозначения $K_{1,2} = K_2(-\cdot)*K_1$, $\overline{K}_{1,2} = K_2(-\cdot)* *K*K_1$, так что $K_1(-\cdot)*K_2 = K_{1,2}(-\cdot)$ и $(K*K_1)(-\cdot)*K_2 = \overline{K}_{1,2}(-\cdot)$. Пусть $d_n(\mathfrak{M}, L_p)$ обозначает n-поперечник по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в пространстве L_p (см., например, [3, с. 109]). С помощью леммы 1 убедимся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *При сделанных выше предположениях относительно* K, K_1, K_2, p_1, p_2 *для* $n_1, n_2 = 1, 2, \ldots$ *имеем*

$$R_{n_1,n_2}(K_1*F_{p_1}, K_2*F_{p_2}) \geqslant \max\{d_{n_1}(\overline{K}_{1,2}(-\cdot)*F_{p_2}, L_{p_1'}),\ d_{n_2}(\overline{K}_{1,2}*F_{p_1}, L_{p_2'})\}, \tag{7}$$

если Ω *имеет вид* (5), *и*

$$R_{n_1,n_2}(K_1*F_{p_1}, K_2*F_{p_2}) \geqslant \max\{d_{n_1}(K_{1,2}(-\cdot)*F_{p_2}, L_{p_1'}),\ d_{n_2}(K_{1,2}*F_{p_1}, L_{p_2'})\}, \tag{8}$$

если Ω *имеет вид* (6). *Здесь* $1/p_i' + 1/p_i = 1$.

Доказательство. Докажем (7). Соотношение (8) доказывается аналогично. Пусть заданы наборы функционалов $T_1 = (T_{1,1}, \ldots, T_{1,n_1})$, $T_2 = (T_{2,1}, \ldots, T_{2,n_2})$. Поскольку мы оцениваем $R_{n_1,n_2}(K_1*F_{p_1}, K_2*F_{p_2})$, в случае $\mu_1 = \mu_2 = 0$ полагаем T_1 и T_2 произвольными, а в случае $\mu_1 = \mu_2 = 1$ такими, что функционалы $T_{i,0}(f_i) = \int\limits_0^{2\pi} f_i dt$, $i = 1, 2$, являются линейными комбинациями функционалов $T_{i,j}$, $j = 1, \ldots, n_i$, (см. замечание 1). Для f_1 и f_2 вида $f_i = a_i\mu_i + K_i*\psi_i \in K_i*F_{p_i}$ имеем

$$A_1 = \sup\{\Omega(f_1, f_2) : f_i \in K_i*F_{p_i},\ i = 1, 2;\quad T_2(f_2) = 0\} \geqslant$$

$$\geqslant \sup\left\{\int\limits_0^{2\pi} (K*K_1*\psi_1)(K_2*\psi_2)\,dx : \|\psi_i\|_{p_i} \leqslant 1,\ \psi_i \perp \mu_i,\ i = 1, 2;\ T_2(K_2*\psi_2) = 0\right\} =$$

$$= \sup_{\substack{\|\psi_1\|_{p_1} \leqslant 1 \\ \psi_1 \perp \mu_1}} \sup\left\{\int\limits_0^{2\pi} \psi_2(\overline{K}_{1,2}*\psi_1)\,dt : \|\psi_2\|_{p_2} \leqslant 1,\ \psi_2 \perp \mu_2;\ T_2(K_2*\psi_2) = 0\right\}.$$

Функционалы $T_{2,1}, \ldots, T_{2,n_2}$ допускают непрерывные продолжения $T'_{2,1}, \ldots, T'_{2,n_2}$ на все пространство L_2, причем в случае $\mu_1 = \mu_2 = 1$ эти продолжения можно выбрать такими, чтобы определенный на всем L_2 функционал $T_{2,0}$ был линейной комбинацией функционалов $T'_{2,1}, \ldots, T'_{2,n_2}$. Пусть функционалы $T'_{2,j}$ имеют вид

$$T'_{2,j}(f) = \int\limits_0^{2\pi} f g_{2,j} dt, \qquad j = 1, \ldots, n_2,$$

где $g_{2,j}$ — фиксированные функции из L_2. Ясно, что при $\mu_1 = \mu_2 = 1$ функция $g_{2,0} \equiv 1$ является линейной комбинацией функций $g_{2,1}, \ldots, g_{2,n_2}$, откуда легко следует, что функции $K_2(-\cdot)*g_{2,1}, \ldots, K_2(-\cdot)*g_{2,n_2}$ линейно зависимы. Очевидно, что условие $T_2(K_2*\psi_2) = 0$ эквивалентно ортогональности $K_2*\psi_2$ функциям $g_{2,1}, \ldots, g_{2,n_2}$, или, что то же, ортогональности ψ_2 функциям $K_2(-\cdot)*g_{2,1}, \ldots, K_2(-\cdot)*g_{2,n_2}$. Поэтому, учитывая теорему двойственности С. М. Никольского (см., например, [3, с. 120], предложение 3.4.4), оценку для A_1 можно продолжить так:

$$A_1 \geqslant \sup_{\substack{\|\psi_1\|_{p_1} \leqslant 1 \\ \psi_1 \perp \mu_1}} \sup\left\{\int\limits_0^{2\pi} \psi_2(\overline{K}_{1,2}*\psi_1)\,dt : \|\psi_2\|_{p_2} \leqslant 1,\ \psi_2 \perp \mu_2,\right.$$

$$\left.\psi_2 \perp K_2(-\cdot)*g_{2,j},\ j = 1, \ldots, n_2\right\} = \sup_{\substack{\|\psi_1\|_{p_1} \leqslant 1 \\ \psi_1 \perp \mu_1}} E(\overline{K}_{1,2}*\psi_1;\ H(T_2))_{p_2'}, \tag{9}$$

где $E(f; H)_p$ — наилучшее приближение f подпространством H в пространстве L_p; $H(T_2) = \operatorname{lin}\{\mu_2, K_2(-\cdot)*g_{2,1}, \ldots, K_2(-\cdot)*g_{2,n_2}\}$. Из определения функций $g_{2,1}, \ldots, g_{2,n_2}$ следует, что как в случае $\mu_1 = \mu_2 = 0$, так и в случае $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\dim H(T_2) \leqslant n_2$, и из (9), учитывая определение поперечников, получаем

$$A_1 \geqslant d_{n_2}(\overline{K}_{1,2}*F_{p_1}, L_{p_2'}).$$

Аналогично

$$A_2 = \sup\{\Omega(f_1, f_2): f_i \in K_i*F_{p_i},\ i = 1, 2;\ T_1(f_1) = 0\} \geqslant$$

$$\geqslant d_{n_1}(\overline{K}_{1,2}(-\cdot)*F_{p_2}, L_{p_1'}).$$

Поскольку по лемме 1 $R_{n_1,n_2}(K_1*F_{p_1}, K_2*F_{p_2}) \geqslant \max\{A_1, A_2\}$, теорема 1 доказана.

3. Весьма широкую и важную совокупность ядер K составляют ядра, не увеличивающие число перемен знака (CVD-ядра). Точнее, будем говорить, что K есть CVD-ядро (и писать $K \in CVD$), если для любых $a \in \mathbb{R}$, $\psi \in C$, $\psi \perp \mu = \mu(K)$, будет $\nu(a\mu + K*\psi) \leqslant \nu(\psi)$, где $\nu(g)$ — число перемен знака g на периоде. Отметим, что $B_r \in CVD$, $r = 1, 2, \ldots$. Ряд вопросов теории CVD-ядер изложен в [4]. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые сведения об интерполяции с помощью «обобщенных сплайнов». Пусть задано CVD-ядро $K \in C$. Обозначим через $S_n(K)$ множество функций вида (ниже $\mu = \mu(K)$) $S(x) = a\mu + \sum_{i=1}^{2n} a_i K(x - i\pi/n)$, $a, a_i \in \mathbb{R}$, $\mu \sum_{i=1}^{2n} a_i = 0$. Элементы множества $S_n(K)$ будем называть «обобщенными сплайнами» или просто сплайнами. Нетрудно проверить, что $\dim S_n(K) = 2n$.

Пусть $\varphi_n(x) = \operatorname{sign}\sin nx$ и $\beta + i\pi/n$, $\beta \in \mathbb{R}$, — нули функции $K*\varphi_n$. С помощью CVD-свойства ядра K легко проверить, что в классе сплайнов из $S_n(K)$ однозначно разрешима любая интерполяционная задача вида $S(\beta + i\pi/n) = y_i$, $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 2n$ (относительно случая $\mu = 0$ см., например, [5], лемма 3.2). Через $s(f, x)$ обозначим сплайн из $S_n(K)$, интерполирующий в точках $\beta + i\pi/n$ функцию $f \in C$, а через $s_{n,j}$ — сплайн из $S_n(K)$ такой, что $s_{n,j}(\beta + i\pi/n) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), т. е. $s_{n,j}$ — фундаментальные сплайны для интерполирования в точках $\beta + i\pi/n$. Представим $s_{n,j}$ в виде

$$s_{n,j}(x) = a^j\mu + \sum_{i=1}^{2n} a_i^j K(x - i\pi/n),\ a^j,\ a_i^j \in \mathbb{R},\ \mu\sum_{i=1}^{2n} a_i^j = 0. \tag{10}$$

Ясно, что $s_n(f, x) = \sum_{j=1}^{2n} f(\beta + j\pi/n)\, s_{n,j}(x)$.

Если $1 \leqslant p \leqslant \infty$; $1/p + 1/p' = 1$; $n = 1, 2, \ldots$, и K — произвольное непрерывное CVD-ядро, то

$$d_{2n}(K*F_\infty; L_p) = \sup_{f \in K*F_\infty} \|f - s_n(f)\|_p = \|K*\varphi_n\|_p, \tag{11}$$

$$d_{2n}(K*F_{p'}; L_1) = \sup_{f \in K*F_{p'}} \|f - s_n(f)\|_1 = \|K*\varphi_n\|_p. \tag{12}$$

Доказательства этих равенств в случае $K = B_r$ и соответствующие ссылки см. в [3, с. 339-340 (§5.1, 6.1)]. Относительно их распространения на случай CVD-ядра K с $\mu(K) = 0$ см. [5].

Пусть теперь K, K_1, K_2, p_1, p_2 таковы, как в теореме 1 и K, K_1, $K_2 \in CVD$. Пусть сначала $\mu_1 = \mu_2 = 0$ и $s_{n,j} \in S_n(\overline{K}_{1,2})$ — фундаментальные сплайны для интерполирования в точках $\overline{\beta} + j\pi/n$ (нулях функции $\overline{K}_{1,2}*\varphi_n$). Для $f_1 \in K_1*F_{p_1}$ и $f_2 \in K_2*F_{p_2}$ положим

$$\overline{T}_{1,j}(f_1) = (K_2(-\cdot)*K*f_1)(\overline{\beta} + j\pi/n), \quad j = 1, \ldots, 2n, \tag{13}$$

$$\overline{T}_{2,j}(f_2) = ((K*K_1)(-\cdot)*f_2)(j\pi/n), \quad j = 1, \ldots, 2n. \tag{14}$$

Пусть еще

$$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}(x_1, \ldots, x_{2n}, y_1, \ldots, y_{2n}) = \sum_{j=1}^{2n} x_j \sum_{i=1}^{2n} \overline{a}_i^j y_i, \tag{15}$$

где $\overline{a}_i^j$ — коэффициенты в представлении (10) для $s_{n,j} \in S_n(\overline{K}_{1,2})$. Нетрудно проверить, что разность $R = R(f_1, f_2; \overline{T}_1, \overline{T}_2; \overline{\Phi})$ можно представить в виде (ниже $f_i = K_i * \psi_i$)

$$R = \int_0^{2\pi} (K * f_1) f_2 dx - \sum_{j=1}^{2\pi} (K_2(-\cdot) * K * f_1)(\overline{\beta} + j\pi/n) \sum_{i=1}^{2n} \overline{a}_i^j ((K * K_1)(-\cdot) * f_2)(i\pi/n) =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\overline{K}_{1,2} * \psi_1) \psi_2 dx - \sum_{j=1}^{2n} (\overline{K}_{1,2} * \psi_1)(\overline{\beta} + i\pi/n) \sum_{i=1}^{2n} \overline{a}_i^j \int_0^{2\pi} \overline{K}_{1,2}(x - i\pi/n) \psi_2(x) dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \psi_2 \left[\overline{K}_{1,2} * \psi_1 - \sum_{j=1}^{2n} (\overline{K}_{1,2} * \psi_1)(\overline{\beta} + j\pi/n) s_{n,j} \right] dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \psi_2 [\overline{K}_{1,2} * \psi_1 - s_n(\overline{K}_{1,2} * \psi_1)] dx.$$

Следовательно, для $n = 1, 2, \ldots$

$$R_{4n}(K_1 * F_{p_1}, K_2 * F_{p_2}) \leqslant R_{2n,2n}(K_1 * F_{p_1}, K_2 * F_{p_2}) \leqslant \sup_{f \in \overline{K}_{1,2} * F_{p_1}} \| f - s_n(f) \|_{p_2'}. \tag{16}$$

Если $p_1 = \infty$ и $p_2 = p \in [1, \infty]$ произвольно, или если $p_1 = p \in [1, \infty]$ произвольно, а $p_2 = \infty$, то, учитывая (16), (11) и (12), получаем $R_{4n+1}(K_1 * F_{p_1}, K_2 * F_{p_2}) \leqslant R_{4n}(K_1 * F_{p_1}, K_2 * F_{p_2}) \leqslant \| \overline{K}_{1,2} * \varphi_n \|_{p'}$. Используя теорему 1 и соотношения (11), (12), убеждаемся, что $R_{4n+1}(K_1 * F_{p_1}, K_2 * F_{p_2}) \geqslant \| \overline{K}_{1,2} * \varphi_n \|_{p'}$, так что в рассматриваемых случаях $R_{4n}(K_1 * F_{p_1}, K_2 * F_{p_2}) = R_{4n+1}(K_1 * F_{p_1}, K_2 * F_{p_2}) = \| K_2(-\cdot) * K * K_1 * \varphi_n \|_{p'}$.

Теперь пусть $\mu_1 = \mu_2 - 1$ и $s_{n,j} \in S_n(\overline{K}_{1,2})$ — фундаментальные сплайны вида (10) для интерполяции в точках $\overline{\beta} + j\pi/n$, $j = 1, \ldots, 2n$ (нулях функции $\overline{K}_{1,2} * \psi_n$). В силу замечания 1, так как классы $K_i * F_{p_i}$, $i = 1, 2$, содержат в рассматриваемом случае константы, функционалы

$$T_{1,2n+1}(f_1) = a_1(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1 dx, \ \overline{T}_{2,2n}(f_2) = a_2(f_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2 dx \tag{17}$$

должны быть линейными комбинациями функционалов из наборов T_1, T_2, для которых $R(K_1 * F_{p_1}, K_2 * F_{p_2}; T_1, T_2; \Phi) < \infty$ (или входить в эти наборы). Для $f_1 \in \mathrm{lin}(K_1 * F_{p_1})$ положим

$$\overline{T}_{1,j}(f_1) = [K_2(-\cdot) * K * (f_1 - a_1(f_1))](\overline{\beta} + j\pi/n), \quad j = 1, \ldots, 2n \tag{18}$$

(и пусть $\overline{T}_1 = (\overline{T}_{1,1}, \ldots, \overline{T}_{1,2n}, \overline{T}_{1,2n+1})$. Для $f_2 \in \mathrm{lin}(K_2 * F_{p_2})$ положим $\tilde{T}_{2,j}(f_2) = \sum_{i=1}^{2n} \overline{a}_i^j [(K * K_1)(-\cdot) * (f_2 - a_2(f_2))](i\pi/n)$, $j = 1, \ldots, 2n$, где $\overline{a}_i^j$ — коэффициенты в представлении (10) для фундаментальных сплайнов из $S_n(\overline{K}_{1,2})$. Так как $\sum_{j=1}^{2n} s_{n,j}(x) \equiv 1$ и $\psi_2 \perp 1$, то после простых преобразований получаем

$$\sum_{j=1}^{2n} \tilde{T}_{2,j}(f_2) = \int_0^{2\pi} \psi_2 \sum_{j=1}^{2n} s_{n,j} dx = \int_0^{2\pi} \psi_2 dx = 0.$$

Следовательно, функционалы $\tilde{T}_{2,j}$, $j=1, \ldots, 2n$, линейно зависимы, так что среди них существуют функционалы $\overline{T}_{2,m}$, $m=1, \ldots, 2n-1$, такие, что

$$\tilde{T}_{2,j}(f_2)=\sum_{m=1}^{2n-1}\lambda_{m,j}\overline{T}_{2,m}(f_2). \tag{19}$$

Зафиксируем эти функционалы $\overline{T}_{2,m}$ (их будет $2n-1$) и коэффициенты $\lambda_{m,j}$ в (19). Обозначим $\overline{T}_2=(\overline{T}_{2,1}, \ldots, \overline{T}_{2,2n-1}, \overline{T}_{2,2n})$,

$$\overline{\Phi}(x_1, \ldots, x_{2n+1}, y_1, \ldots, y_{2n})=\sum_{j=1}^{2n}x_j\sum_{m=1}^{2n-1}\lambda_{m,j}y_m+2\pi x_{2n+1}y_{2n}, \tag{20}$$

так что

$$\overline{\Phi}(\overline{T}_1(f_1), \overline{T}_2(f_2))=\sum_{j=1}^{2n}\overline{T}_{1,j}(f_1)\tilde{T}_{2,j}(f_2)+(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}f_1dx\int_0^{2\pi}f_2dx.$$

Теперь для $f_1=a_1+K_1{*}\psi_1$, $f_2=a_2+K_2{*}\psi_2$ будем иметь

$$R=\Omega(f_1, f_2)-\overline{\Phi}(\overline{T}_1(f_1), \overline{T}_2(f_2))=\int_0^{2\pi}[K{*}(a_1+K_1{*}\psi_1)](a_2+K_2{*}\psi_2)\,dx-$$

$$-2\pi a_1a_2-\sum_{j=1}^{2n}[K_2(-\cdot){*}K{*}(f_1-a_1)](\overline{\beta}+j\pi/n)\sum_{m=1}^{2n}\overline{a}_m^j[(K{*}K_1)(-\cdot){*}(f_2-a_2)]\times$$

$$\times(m\pi/n)=\int_0^{2\pi}[K{*}(a_1+K_1{*}\psi_1)](a_2+K_2{*}\psi_2)\,dx-2\pi a_1a_2-$$

$$-\sum_{j=1}^{2n}(\overline{K}_{1,2}{*}\psi_2)(\overline{\beta}+j\pi/n)\int_0^{2\pi}\sum_{m=1}^{2n}\overline{a}_m^j\overline{K}_{1,2}\left(x-\frac{m\pi}{n}\right)\psi_2(x)\,dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}[\overline{K}_{1,2}{*}\psi_1-s_n(\overline{K}_{1,2}{*}\psi_1)]\,\psi_2dx.$$

Поэтому, как выше,

$$R_{4n+1}(K_1{*}F_{p_1}, K_2{*}F_{p_2})\leqslant\sup_{f\in\overline{K}_{1,2}{*}F_{p_1}}\|f-s_n(f)\|_{p_2'}. \tag{21}$$

Если $p_1=\infty$ и $p_2=p\in[1, \infty]$ произвольно, если $p_1=p\in[1, \infty]$ произвольно, а $p_2=\infty$, то, учитывая (11), (12) и (21), снова получаем $R_{4n+1}(K_1{*}F_{p_1}, K_2{*}F_{p_2})\leqslant\|\overline{K}_{1,2}{*}\varphi_n\|_{p'}$. Учитывая теорему 1 и соотношения (11), (12), получаем $R_{4n+1}(K_1{*}F_{p_1}, K_2{*}F_{p_2})\geqslant\|\overline{K}_{1,2}{*}\varphi_n\|_{p'}$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $n=1, 2, \ldots$; $K, K_1, K_2\in CVD\cap L_2$; $\int_0^{2\pi}Kdx=1$; $\mu=\mu(K_1)=\mu(K_2)$; $\Omega(f_1, f_2)=\int_0^{2\pi}(K{*}f_1)f_2dx$; $p_1=\infty$ *и* $p_2=p\in[1, \infty]$ *произвольно, либо* $p_1=p\in[1, \infty]$ *произвольно, а* $p_2=\infty$. *Тогда*

$$R_{4n+\mu}(K_1{*}F_{p_1}, K_2{*}F_{p_2})=R_{4n+1}(K_1{*}F_{p_1}, K_2{*}F_{p_2})=\|K_2(-\cdot){*}K{*}K_1{*}\varphi_n\|_{p'}.$$

При этом в случае $\mu=0$ *оптимальная линейная информация объема* $4n$ *является* $(2n, 2n)$*-информацией и задается равенствами* (13) *и* (14), *а наилучший метод ее использования задается равенством* (15). *Использование информации объема* $4n+1$ *не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. В случае* $\mu=1$ *оптимальной информацией объема* $4n+1$ *является* $(2n+1, 2n)$*-информация* $\overline{T}_1=(\overline{T}_{1,1}, \ldots, \overline{T}_{1,2n+1})$ *и*

$\overline{T}_2 = (\overline{T}_{2.1}, \ldots, \overline{T}_{2.2n})$, *где* $\overline{T}_{i,j}$, $i = 1, 2$,— *функционалы из равенств* (17), (18), (19), *а оптимальный метод ее использования задается равенством* (20).

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* n, K_1, K_2, p_1, p_2 *таковы, как в теореме* 2, $\Omega(f_1, f_2) = \int_0^{2\pi} f_1 f_2 dx$. *Тогда*

$$R_{4n+\mu}(K_1 * F_{p_1}, K_2 * F_{p_2}) = R_{4n+1}(K_1 * F_{p_1}, K_2 * F_{p_2}) = \| K_2(-\cdot) * K_1 * \varphi_n \|_{p'}.$$

Информацию о том, какова в случае $\Omega(f_1, f_2) = \int_0^{2\pi} f_1 f_2 dx$ оптимальная информация и наилучший метод ее использования, легко получить, проследив доказательство предыдущей теоремы.

Пусть теперь $\varphi_{n,r}$, $r = 1, 2, \ldots$, — r-й периодический интеграл от φ_n, имеющий нулевое среднее значение на периоде, т. е. $\varphi_{n,r} = B_r * \varphi_n$.

Следствие. *Пусть* n, p_1, p_2 *таковы, как в теореме* 2; $r_1, r_2 = 1, 2, \ldots$; $\Omega(f_1, f_2) = \int_0^{2\pi} f_1 f_2 dx$. *Тогда*

$$R_{4n+1}(W_{p_1}^{r_1}, W_{p_2}^{r_2}) = \| \varphi_{n, r_1 + r_2} \|_{p'}.$$

В заключение отметим, что известен еще ряд ситуаций (в периодическом и непериодическом случаях, см., например, [6, 7]), когда интерполяционные сплайны реализуют поперечники Колмогорова. Во всех этих случаях с помощью соображений, близких к использованным в данной работе, можно получить результаты, аналогичные теоремам 2 и 3.

1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М. : Наука, 1966.— 543 с.
2. *Бабенко В. Ф.* О наилучшем использовании линейных функционалов для аппроксимации билинейных // Исслед. по соврем. пробл. суммирования и приближения функций и их прил.— Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1979.—С 3—5.
3. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.— М. : Наука, 1984.— 352 с.
4. *Karlin S.* Total positivity.— Stanford : Univ. press, 1968.— Vol. 1.— 540 p.
5. *Pinkus A.* On n-width of periodic functions // J. Anal Math.— 1979.— **35**.— P. 209—235.
6. *Micchelli C. A., Pinkus A.* Some problems on the approximation of functions of two variables and n-width of integral operators // J. Approxim. Theory.— 1978.— **24**.— P. 51—77.
7. *Pinkus A.* n-Width of Sobolev spaces in L^p // Constr. Approxiw.— 1985.— **1**.— P. 15—62.

Днепропетр. ун-т

Получено 31.10.85