УДК 517.96

В. В. Городецкий

Некоторые теоремы о стабилизации решений задачи Коши для параболических по Шилову систем в классах обобщенных функций

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\partial u_i(t, x)/\partial t = \sum_{j=1}^{N} \sum_{|k| \leqslant p} a_k^{ij}(t) D_x^k u_j(t, x), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

с непрерывными и ограниченными при $t \geqslant 0$ коэффициентами, параболическую в смысле Шилова [1] в каждой полосе $\Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n$ (здесь $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, $D_x^k = D_{x_1}^{k_1} \ldots D_{x_n}^{k_n}$).

Вопрос о стабилизации решений задачи Коши для систем вида (1) (т. е. существование у решения $u(t, x)$ при $t \to +\infty$ определенного предела, понимаемого в том или ином смысле) в классе обычных начальных функций рассматривали М. Кжижанский, С. Д. Эйдельман, Ф. О. Порпер, С. Д. Ивасишен, Ю. Н. Дрожжинов, В. Д. Репников, А. К. Гущин, В. П. Михайлов, В. Н. Денисов и др. В классах обобщенных функций конечного порядка он изучался Ю. Н. Дрожжиновым, С. Д. Эйдельманом, Ю. Н. Валицким, Б. И. Завьяловым в случае уравнения теплопроводности. (Обзор работ, относящихся к этому вопросу, см. в [2].) В данной работе исследуется стабилизация решений задачи Коши для систем вида (1) в классах обобщенных функций бесконечного порядка (ультрараспределений Жевре) типа $(S^\beta)'$.

1. Будем говорить, следуя [3], что фундаментальная матрица решений (ф. м. р.) $G(t, x)$ системы (1) удовлетворяет условию Λ_β^+, если при каждом $t > 0$

$$\| D_x^m G(t, x) \| \leqslant c B_1^{m_1} \ldots B_n^{m_n} m_1^{m_1\beta} \ldots m_n^{m_n\beta} a(t)^{-n-|m|} \psi(|x|/a(t)), \quad 0 \leqslant |m| < \infty, \tag{2}$$

где $c, B_1, \ldots, B_n, \beta$ — некоторые положительные постоянные, $a(t)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция аргумента t, $a(0) = 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|x|)(1 + |x|^2)^s \, dx < +\infty. \quad s = 0, 1, 2, \ldots .$$

Условию Λ_β^+ с $\beta = 1/p$ и функцией $\psi(|x|a(t)) = \exp\{-a(|x|/a(t))^{p/(p-1)}\}$, $a > 0$, удовлетворяет, например, ф. м. р. параболической по Петровскому [4] системы вида (1) ($p = 2b$) с постоянными коэффициентами, содержащей только группу старших членов. Примеры других систем вида (1), ф. м. р. которых удовлетворяют указанному условию с определенным $0 < \beta < 1$ и экспоненциально убывающей функцией ψ, см. в [5]. Для определенных систем вида (1), параболических в смысле Шилова, условие Λ_β^+ выполняется с $\beta = 1/h$ ($0 < h \leqslant p$, h — показатель параболичности системы (1)) и функцией ψ, убывающей при $|x| \to +\infty$ быстрее любой степени $1/|x|$ [3].

Если матрица $G(t, x)$ удовлетворяет условию Λ_β^+, то при каждом $t \in (0, \infty)$ элементы $G(t, x)$, рассматриваемые как функции x, принадлежат пространству $S^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$, которое [6] состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x^k D_x^m \varphi(x)| \leqslant c_k A_1^{m_1} \ldots A_n^{m_n} m_1^{m_1\beta} \ldots m_n^{m_n\beta}, \quad 0 \leqslant |k|, \ |m| < \infty.$$

Векторное пространство $\mathbf{S}^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$ определяется как прямая сумма аналогичных скалярных пространств. Символом $S'^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathbf{S}'^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$) обозначается пространство всех линейных непрерывных функционалов над соответствующим основным пространством, а его элементы называются обобщенными функциями (вектор-функциями).

Если для системы (1) задано начальное условие

$$u(0, x) = f, \tag{3}$$

где $f \in \mathbf{S}'^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$, то под решением задачи Коши (1), (3) в полупространстве $t > 0$ будем понимать вектор-функцию $u(t, x)$, $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, дифференцируемую по t и p раз дифференцируемую по x, удовлетворяющую системе (1) и равенству (3) в том смысле, что $u(t, x) \to f$ при $t \to 0$ в топологии пространства $\mathbf{S}'^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$.

На основании результатов, полученных в [7], заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Задача Коши* (1), (3) *в полупространстве* $t > 0$ *однозначно разрешима в пространстве начальных данных* $\mathbf{S}'^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$. *Ее решение дифференцируемо по* t, *бесконечно дифференцируемо по* x *и задается формулой* $u(t, x) = G(t, x) * f$, $f \in \mathbf{S}'^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$, *где* $G(t, x) * f = (f, T_{-x}\check{G}(t, \cdot))$, T_{-x} — *оператор сдвига в пространстве* $S^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$, $\check{G}(t, \xi) = G(t, -\xi)$.

В данной работе нас будет интересовать вопрос о стабилизации решения задачи (1), (3) к нулю в пространстве $\mathbf{S}'^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$, т. е. ограничения на начальную обобщенную вектор-функцию f, при выполнении которых $(u(t, x), \varphi) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ для произвольной основной вектор-функции $\varphi \in \mathbf{S}^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$.

2. Рассмотрим однопараметрическое семейство гиперповерхностей $\Phi_t(x) = c$, $c \geqslant 0$ (при фиксированном t, $t \geqslant t_0 \geqslant 0$), обладающее следующими свойствами [8] : 1) оно состоит из замкнутых односвязных гиперповерхностей; 2) если $r(c, \alpha, t)$ — длина вектора, соединяющего начало координат с точкой гиперповерхности $\Phi_t(x) = c$ и составляющего углы $\pi/2 - \alpha_i$ с осями x_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, декартовой системы координат, то $r(c, \alpha, t)$ имеет непрерывную положительную производную по параметру c; 3) тела $V^c_{\Phi_t}$, ограниченные гиперповерхностями $\Phi_t(x) = c$, содержат начало координат. Предполагается также, что при $t \to +\infty$ семейства гиперповерхностей $\Phi_t(x) = c$ стремятся к семейству замкнутых гиперповерхностей $F(x) = c$, т. е. [8] для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что при $t > T$ и произвольном c

$$\operatorname{mes}(V^c_F \cup V^c_{\Phi_t})/\operatorname{mes}(V^c_F \cap V^c_{\Phi_t}) < 1 + \varepsilon. \tag{4}$$

При этом предельное семейство гиперповерхностей $F(x) = c$ обладает свойствами 1 — 3 и, кроме того, для произвольных $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ и c выполняется неравенство

$$c_1 r(c, \alpha^{(1)}, t) \leqslant r(c, \alpha^{(2)}, t) \leqslant c_2 r(c, \alpha^{(1)}, t) \tag{5}$$

(c_1, c_2 — некоторые положительные постоянные). Из (4) и (5) следует также, что для произвольных c, α, t выполняются неравенства

$$c_3 r^n(c, \alpha, t) \leqslant \operatorname{mes} V^c_{\Phi_t} \leqslant c_4 r^n(c, \alpha, t) \tag{6}$$

(c_3, c_4 — положительные постоянные).

Будем говорить, что обобщенная вектор-функция $f \in \mathbf{S}'^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$ имеет обобщенное предельное среднее по телам V^c_F, равное l, и писать $M^\infty_F = l$, если

$$\lim_{c \to \infty} \frac{1}{\operatorname{mes} V^c_F} \int\limits_{V^c_F} (f * \varphi)(x)\, dx = l \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in \mathbf{S}^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n). \tag{7}$$

Здесь $(f * \varphi)(x) = (f, T_{-x}\check{\varphi}(\cdot))$, $\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$.

Если $V^c_F = \Omega_c(x)$ — шар радиуса c с центром в точке x, то (7) означает, что $f \in \mathbf{S}'^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$ имеет обобщенное шаровое предельное среднее

$M_\Omega^\infty(f)$, равное l (понятие обобщенного шарового предельного среднего в случае задачи Коши для уравнения теплопроводности впервые ввел Ю. Н. Дрожжинов [9]).

Отметим, что поскольку операция сдвига ограничена в пространстве $\mathbf{S}^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$ и переводит это пространство в себя [6, с. 228], то $M_F^\infty(f) = M_{F_1}^\infty(f)$, где $F_1(x) = F(x + x_0) = c$ — семейство, полученное из семейства $F(x) = c$ смещением на вектор x_0, ибо

$$\int\limits_{V_{F_1}^c} (f*\varphi)(x)\,dx = \int\limits_{V_F^c} (f*\varphi_1)(x)\,dx,$$

где $\varphi_1(x)$ — сдвиг на x_0 основной вектор-функции $\varphi(x)$.

Если f — непрерывная вектор-функция и f имеет обычное предельное среднее $S_F^\infty(f) = 0$ по телам V_F^c, т. е. [8]

$$S_F^\infty(f) = \lim_{c\to\infty} \Psi_F^c(x) \equiv \lim_{c\to\infty} \frac{1}{\operatorname{mes} V_F^c} \int\limits_{V_{F(x)}^c} f(\xi)\,d\xi = 0,$$

то она имеет и обобщенное предельное среднее $M_F^\infty(f) = 0$ по телам V_F^c, поскольку, как нетрудно видеть,

$$\frac{1}{\operatorname{mes} V_F^c} \int\limits_{V_F^c} (f*\varphi)(\xi)\,d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Psi_{F_1}^c(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Здесь $(f*\varphi)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi - y)\,\varphi(y)\,dy$. Осуществляя предельный переход при $c \to \infty$ под знаком интеграла (который обеспечивается тем, что $\varphi(x) \in \mathbf{S}^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$), получаем $M_F^\infty(f) = 0$, ибо [8] из существования $S_F^\infty(f) = 0$ следует существование $S_{F_1}^\infty(f) = 0$.

Обратное утверждение неверно (см. пример в [9]), т. е. класс вектор-функций, имеющих обобщенное нулевое предельное среднее по телам V_F^c, шире, чем класс вектор-функций, имеющих обычное нулевое предельное среднее по этим же телам.

Теорема 2. *Пусть ф. м. р. $G(t, x)$ системы* (1) *удовлетворяет условию Λ_β^+ и постоянна по x на семействах $\Phi_t(x) = c$ (со свойствами 1 — 3), стремящихся при $t \to +\infty$ к семейству $F(x) = c$. Если $f \in \mathbf{S}'^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$ и $M_F^\infty(f) = 0$, то решение $u(t, x)$ задачи Коши* (1), (3) *стабилизируется к нулю в пространстве $\mathbf{S}'^{\beta',\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть по определению

$$\Phi_t(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x - \xi)\,\varphi(x)\,dx \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x)\,\varphi(x + \xi)\,dx,$$

$$\Phi_{t,R}(\xi) = \int\limits_{|x|\leqslant R} G(t, x)\,\varphi(x + \xi)\,dx, \quad R > 0,$$

где $\varphi \in \mathbf{S}^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$ — произвольная основная вектор-функция. Используя неравенство (2), а также то, что операция сдвига в пространстве $\mathbf{S}^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^u)$ равномерно ограничена [6, с. 228], устанавливаем, что; а) при каждом $t > 0$ и $R > 0$ вектор-функция $\Phi_{t,R}(\xi)$ принадлежит пространству $\mathbf{S}^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$, $\Phi_{t,R}(\xi) \to \Phi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ в топологии пространства $\mathbf{S}^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$; б) при каждом $t > 0$ $\Phi_t(\xi) \in \mathbf{S}^{\beta,\ldots,\beta}(\mathbb{R}^n)$. На основании этих свойств заключаем, что

$$(u(t, x), \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f, G(t, x - \xi))\,\varphi(x)\,dx = \Big(f, \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x)\,\varphi(x + \xi)\,dx\Big) =$$

$$= (-1)^n \Big(f, \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, -y)\,\varphi(-(y - \xi))\,dy\Big) = (-1)^n \Big(f, \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, -y)\,\check{\varphi}(y - \xi)\,dy\Big).$$

Еще раз используя свойства а), б), получаем равенство

$$(u(t, x), \varphi) = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} G(t, -y)(f * \check{\varphi})(y)\, dy. \tag{8}$$

Будем рассматривать этот интеграл как предел интегралов по телам $V^c_{\Phi_t}$ при $c \to \infty$. В связи с этим введем новые переменные $c, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ [8]:

$$x_1 = r(c, \alpha, t)\cos\alpha_1 \ldots \cos\alpha_{n-1}, \quad x_i = r(c, \alpha, t)\cos\alpha_1 \ldots \cos\alpha_{n-i}\sin\alpha_{n-i+1},$$
$$x_n = r(c, \alpha, t)\sin\alpha_1, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1. \tag{9}$$

Тогда в силу сделанных ранее предположений для производных ф. м. р. $G_1(t, r) = G(t, x(c, \alpha, t))$ справедливы оценки

$$\left\| \frac{\partial^m G_1(t, c)}{\partial c} \right\| \leqslant c_0 B^m m^{m\beta} a(t)^{-n-m} (r'_c(c, t))^m \psi\left(\frac{r(c, t)}{a(t)}\right). \tag{10}$$

Здесь $m = 0, 1, 2, \ldots,$ $r(c, t) = r(c, 0, t),$ c_0, B — положительные постоянные. В новых переменных

$$(u(t, x), \varphi) = (-1)^n \int_0^\infty \int_{\Omega^c_t} G_1(t, -c)(f * \check{\varphi})(c, \alpha, t)\, d\Omega dc =$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty G_1(t, -c) \frac{\partial}{\partial c} \left\{ \int_0^c \int_{\Omega^\sigma_t} (f * \check{\varphi})(\sigma, \alpha, t)\, d\sigma d\Omega \right\} dc,$$

где Ω^c_t — поверхность $\Phi_t(x) = c$, $d\Omega = J_n d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1}$ элемент площади поверхности Ω^c_t, J_n — функциональный определитель преобразования (9). Интегрируя по частям и принимая во внимаеие условие $M^\infty_F(f) = 0$, находим

$$(u(t, x), \varphi) = (-1)^{n+1} \int_0^\infty \frac{\partial G_1(t, -c)}{\partial c} \left\{ \int_0^c \int_{\Omega^\sigma_t} (f * \check{\varphi})(\sigma, \alpha, t)\, d\sigma d\Omega \right\} dc.$$

Далее, используя неравенства (6), (10), получаем

$$|(u(t, x), \varphi)| \leqslant c_1 a(t)^{-n-1} \int_0^\infty r'_c(c, t)\, \psi\left(\frac{r(c, t)}{a(t)}\right) \times$$

$$\times \left| \int_0^c \int_{\Omega^\sigma_t} (f * \check{\varphi})(\sigma, \alpha, t)\, d\sigma d\Omega \right| dc \leqslant c_2 a(t)^{-n-1} \times$$

$$\times \int_0^\infty \psi\left(\frac{r(c, t)}{a(t)}\right) r^n(c, t) \left| \frac{1}{\operatorname{mes} V^r_{\Omega_t}} \int_{V^r_{\Omega_t}} (f * \check{\varphi})(\omega)\, d\omega \right| dr.$$

Здесь $V^r_{\Omega_t}$ — тело, ограниченное поверхностью Ω^r_t. Произведя замену $r = a(t) r_1$, найдем

$$|(u(t, x), \varphi)| \leqslant c_2 \int_0^\infty r_1^n \psi(r_1) \left| \frac{1}{\operatorname{mes} V^{a(t)r_1}_{\Omega_t}} \int_{V^{a(t)r_1}_{\Omega_t}} (f * \check{\varphi})(\omega)\, d\omega \right| dr_1.$$

Переходя теперь к пределу при $t \to +\infty$ под знаком интеграла, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание. Если на начальную обобщенную функцию (вектор-функцию) f наложить дополнительное условие положительности ($(f, \varphi) \geqslant \geqslant 0$ для произвольной положительной основной функции (вектор-функции)), то характер тел, по которым предполагается существование обобщенного предельного среднего, безразличен. В частности, в качестве таких тел можно брать шары с центром в начале координат.

3. Если известны линии уровня фундаментального решения уравнения (т. е. поверхности в пространстве R^n, на которых ф. р. постоянно по x) и их свойства, то теорему 2 можно уточнить. В частности, для таких уравнений можно установить не только достаточное, но и необходимое условие стабилизации решения задачи Коши к нулю в обобщенном смысле. Примером такого уравнения является следующее:

$$\partial u/\partial t = (-1)^{b-1} \Delta^b u, \quad \Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n^2. \tag{11}$$

Как показано в [10], при $t < 0$ его фундаментальное решение $G(t, x) = t^{-n/2b} G_1(|x|/t^{1/2b})$, где

$$G_1\left(\frac{|x|}{t^{1/2b}}\right) = k_n \int\limits_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\rho^{2b}} J_{n/2-1}\left(\rho \frac{|x|}{t^{1/2b}}\right)\left(\rho \frac{|x|}{t^{1/2b}}\right)^{1-n/2} d\rho. \tag{12}$$

Здесь $J_{n/2-1}(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода порядка $n/2 - 1$. Линиями уровня $G(t, x)$ являются сферы $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = c^2$. Поскольку $G(t, x)$ удовлетворяет условию Λ_β^+ с $\beta = 1/2b$, то задача Коши в полупространстве $t > 0$ для уравнения (11) в силу теоремы 1 однозначно разрешима в пространстве начальных данных $S'^{1/2b,\ldots,1/2b}(\mathbb{R}^n)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *В классе обобщенных функций* $f \in S'^{1/2b,\ldots,1/2b}(\mathbb{R}^n)$, *удовлетворяющих условию*

$$\forall\, \varphi \in S^{1/2b,\ldots,1/2b}(\mathbb{R}^n)\, \exists\, c_\varphi > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R}^n\, |(f * \varphi)(x)| \leqslant c_\varphi, \tag{13}$$

существование нулевого обобщенного шарового предельного среднего является необходимым и достаточным условием стабилизации решения задачи Коши для (12) *к нулю в пространстве* $S'^{1/2b,\ldots,1/2b}(\mathbb{R}^n)$.

Отметим только, что достаточность следует из теоремы 2; доказательство же необходимости использует теоремы тауберового типа.

При более сильных ограничениях на начальную обобщенную вектор-функцию можно говорить о стабилизации решения задачи Коши (1), (3) к нулю в обычном смысле.

Теорема 4. *Если обобщенная вектор-функция* $f \in \mathbf{S}'^{\beta_1,\ldots,\beta_n}(\mathbb{R}^n)$, $\beta_i > \max\{1, \beta\}$, $i = 1, \ldots, n$, *и* f *имеет компактный носитель, то* $u(t, x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ *равномерно на каждом компакте* $K \subset \mathbb{R}^n$.

Наметим схему доказательства в случае одного уравнения. Пусть $\operatorname{supp} f \subset K_1 \subset K_2$, где K_1, K_2 — некоторые компактные множества в $\mathbb{R}^n$. Построим функцию $\gamma(x) \in S^{\beta_1,\ldots,\beta_n}(\mathbb{R}^n)$, $\beta_i > \max\{1, \beta\}$, $i = 1, \ldots, n$, с носителем в K_2 такую, что $\gamma(x) = 1$ для $x \in K_1$ (такая функция существует, ибо при $\beta_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, в пространстве $S^{\beta_1,\ldots,\beta_n}(\mathbb{R}^n)$ имеются финитные функции [6]), Поскольку для каждого $t \in (0, \infty)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ $\gamma(\xi) G(t, x - \xi)$, $(1 - \gamma(\xi)) G(t, x - \xi)$ как функции ξ принадлежат пространству $S^{\beta_1,\ldots,\beta_n}(\mathbb{R}^n)$, то $u(t, x) = (f, \gamma(\xi) G(t, x - \xi)) + (f, (1 - \gamma(\xi)) G(t, x - \xi))$. Учитывая, что $\operatorname{supp}((1 - \gamma(\xi)) G(t, x - \xi)) \cap \operatorname{supp} f = \varnothing$, из определения носителя обобщенной функции и линейности f как функционала следует $u(t, x) = a(t)^{-\delta} \times (f, a(t)^\delta \gamma(\xi) G(t, x - \xi))$, где δ выберем так, чтобы $0 < \delta < n$.

Для доказательства теоремы достаточно показать что семейство функций $\Psi_{t,x}(\xi) = a(t)^\delta \gamma(\xi) G(t, x - \xi)$ ограничено в пространстве $S^{\beta_1,\ldots,\beta_n}(\mathbb{R}^n)$

равномерно по t для достаточно больших значений t и $x \in K$, т. е. $|\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,x}(\xi)| \leqslant \leqslant c_k A_1^{m_1} \ldots A_n^{m_n} m_1^{m_1\beta_1} \ldots m_n^{m_n\beta_n}$, где постоянные $c_k, A_1, \ldots, A_n$ не зависяг от t, x, ξ, изменяющихся указанным образом. Используя формулу дифференцирования произведения двух функций и неравенство (2), получаем требуемую оценку.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \exp(a\,|x|^\sigma), \ |x| \leqslant 1, \ a > 0, \ \sigma > 0, \\ 0, \ |x| > 1. \end{cases}$$

Известно, что $f(x)$ нельзя регуляризовать в пространстве распределений Соболева—Шварца $S'(\mathbb{R}^1)$, однако эта функция допускает регуляризацию в пространстве ультрараспределений Жевре S'^β (R), где $1 < \beta < 1 + 1/\sigma$. Следовательно, для этой функции существует единственное решение задачи Коши для (1) ($N = 1$, $n = 1$) в полупространстве $t > 0$, которое стремится к нулю при $t \to +\infty$ равномерно на каждом замкнутом участке числовой прямой.

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М. : Физматгиз, 1958.— 275 с.
2. *Денисов В. Н., Репников В. Д.* О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Дифференц. уравнения.— 1984.— **20**, № 1.— С. 20—41.
3. *Эйдельман С. Д., Ивасишен С. Д., Порпер Ф. О.* Теоремы Лиувилля для параболических в смысле Шилова систем // Изв. вузов. Математика.— 1961.— № 6.— С. 169—179.
4. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы.— М. : Наука, 1964.— 444 с.
5. *Эйдельман С. Д.* Лиувиллевы теоремы и теоремы об устойчивости для решений параболических систем // Мат. сб.— 1958.— **44**, № 4.— С. 481—509.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М. : Физматгиз, 1958.— 307 с.
7. *Городецкий В. В.* Принцип локализации для решений задачи Коши для параболических систем в классе обобщенных функций бесконечного порядка // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 6.— С. 1077—1079.
8. *Репников В. Д.* Некоторые теоремы о стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Докл. АН СССР.— 1963.— **148**, № 3.— С. 527—530.
9. *Дрожжинов Ю. Н.* Стабилизация решений обобщенной задачи Коши для ультрапараболического уравнения // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1969.— **33**, № 2.— С. 368—379.
10. *Репников В. Д., Эйдельман С. Д.* Необходимые и достаточные условия установления решения задачи Коши // Докл. АН СССР.— 1966.— **167**, № 2.— С. 298—301.

Черновиц. ун-т

Получено 13.12.85