УДК 517.5

В. И. Горгула, Н. И. Нагнибида

Об одном специальном полиномиальном базисе пространства аналитических функций

Для различных приложений (особенно к вопросам интерполяции, эквивалентности операторов в аналитических пространствах и т. п.) очень важным является знание условий, при которых система (специальных) полиномов $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, где $P_n^{(n)}(z) \equiv \text{const} \neq 0$, $n = 0, 1, \ldots$, будет полной или же базисом* в том или ином пространстве аналитических функций (см., например, [2, 3]).

Пусть p — фиксированное натуральное число, $\varphi(z) = a + bz$, $b \neq \neq 0$,— линейная функция и $\omega = \exp\frac{2\pi i}{p}$. Требуется найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых система

$$\{[\varphi(\omega^i z)]^{kp+i}\}_{k=0,i=0}^{\infty,p-1} \tag{1}$$

является квазистепенным в смысле М. Г. Хапланова базисом пространства A_∞ всех целых функций, снабженного, как обычно, топологией компактной сходимости. Заметим при этом, что по своей постановке рассматриваемый здесь вопрос напоминает, по нашему мнению, задачу о нахождении условий полноты в пространстве $A(\mathscr{D})$ (здесь $\mathscr{D}$ — односвязная область, симметричная относительно начала координат) системы $\{[W(\pm z)]^{2n}\}_{n=0}^{\infty}$, где функция $W(z)$ принадлежит $A(\mathscr{D})$ и однолистна в $\mathscr{D}$ (а единственной однолистной функцией среди целых является линейная!). Эта задача изучалась ранее и была полностью решена в [4].

Для удобства в дальнейшем введем в рассмотрение для любого $i = 0, 1, \ldots, p-1$ линейные непрерывные в A_∞ операторы P_i «проектирования» и S_i «подстановки» соответственно соотношениями

$$(P_i f)(z) = \frac{1}{p}\sum_{q=0}^{p-1} \omega^{-iq} f(\omega^q z), \quad (S_i f)(z) = f(\varphi(\omega^i z)) \quad \forall f \in A_\infty.$$

Определим, далее, на элементах степенного базиса пространства A_∞ оператор T, полагая $Tz^{kp+i} = [\varphi(\omega^i z)]^{kp+i}$, $k \geqslant 0$, $0 \leqslant i \leqslant p-1$, или $Tf = = \sum_{i=0}^{p-1} S_i P_i f$ $\forall f \in A_\infty$. Следовательно, рассматриваемая задача сводится к нахождению условий, при которых оператор T осуществляет взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение пространства A_∞ на себя, т. е. является изоморфизмом в нем. В свою очередь, учитывая теорему Банаха об обратном операторе, это будет тогда и только тогда, когда уравнение $Tf = g$ имеет единственное решение f в A_∞ при любой правой части $g \in A_\infty$.

---

* Довольно эффективные достаточные условия квазистепенной в смысле М. Г. Хапланова базисности таких общих систем даны в [1].

Итак, рассмотрим уравнение (относительно f)

$$\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{q=0}^{p-1}\omega^{-iq}f(\omega^q(a+\omega^i bz))=g(z). \tag{2}$$

Продифференцировав его в точке $z=0$ $sp+l$ раз ($s\geqslant 0,\ 0\leqslant l\leqslant p-1$), получим следующие (равносильные (2)) равенства:

$$\omega^{l^2}b^{sp+l}f^{(sp+l)}(a\omega^l)=g^{(sp+l)}(0),\quad s\geqslant 0;\quad 0\leqslant l\leqslant p-1. \tag{3}$$

Легко видеть, что при $a=0$ система (3) всегда однозначно разрешима в A_∞. Если же $a\neq 0$, то, как известно из теории интерполяции, она не может быть таковой, так как не равная тождественно нулю функция f, где $f(z)=$ $=\Phi_0\left(\frac{\alpha}{a}z\right)$, $\Phi_0(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\omega^{\frac{-n(n+1)}{2}}\frac{z^n}{n!}$ и $\Phi_0(\alpha)=0$, удовлетворяет однородной системе $f^{(sp+l)}(a\omega^l)=0$, $s\geqslant 0$; $0\leqslant l\leqslant p-1$ $\left(\text{при } p=2, \text{ например, } f(z)=\cos\left(\pi\frac{z+a}{4a}\right)\right)$.

Следовательно, верно следующее утверждение.

Предложение 1. *Система полиномов (1) является квазистепенным в смысле М. Г. Хапланова базисом пространства A_∞ тогда и только тогда, когда $a=0$ и $b\neq 0$.*

Аналогичное утверждение верно и для пространств A_R всех однозначных и аналитических в круге $|z|<R$ функций с той же топологией компактной сходимости при $R<\infty$, но с заменой условия $b\neq 0$ на условие $|b|=1$.

Изучим теперь вопрос об условиях базисности в A_∞ более общей системы, чем (1). А именно: пусть $\varphi_i(z)=a_i+b_iz$, $0\leqslant i\leqslant p-1$, — фиксированные функции. Рассмотрим систему

$$\{[\varphi_i(z)]^{kp+i}\}_{k=0,i=0}^{\infty,p-1}. \tag{4}$$

Поскольку с необходимостью $b_i\neq 0$ ($\forall i$), то представим оператор T: $: Tz^{kp+i}=[\varphi_i(z)]^{kp+i}$, $k\geqslant 0$; $0\leqslant i\leqslant p-1$, в виде $T=T_2T_1$, где $T_1z^{kp+i}=$ $=(b_iz)^{kp+i}$, а $T_2z^{kp+i}=\left(z+\frac{a_i}{b_i}\right)^{kp+i}$. Отсюда следует (так как T_1 — изоморфизм!), что T будет изоморфизмом пространства A_∞ на себя лишь в случае, когда таковым является оператор T_2 «групповых» сдвигов на $\alpha_i=$ $=a_i/b_i$. Повторяя теперь предыдущие рассуждения, заключаем, что система

$$\{(z+\alpha_i)^{kp+i}\}_{k=0,i=0}^{\infty,\ p-1} \tag{5}$$

образует квазистепенной базис в пространстве A_∞ лишь при условии однозначной разрешимости в A_∞ интерполяционной задачи

$$\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{q=0}^{p-1}\omega^{-iq}\omega^{kq}f^{(k)}(\alpha_i\omega^q)=g^{(k)}(0),\quad k=0,1,\dots, \tag{6}$$

при любой $g\in A_\infty$.

Покажем вначале, как в некоторых случаях можно найти простые достаточные условия того, что это не так. С этой целью будем искать решение однородной системы (6) в виде $f(z)=\sum\limits_{m=0}^{p-1}B_me^{t_0z\omega^m}$, где t_0 — пока что не определенное комплексное число. Тогда для нахождения неизвестных B_m получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{m=0}^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{q=0}^{p-1}\omega^{-iq}\omega^{ql}\omega^{ml}e^{t_0\alpha_i\omega^{q+m}}\right)B_m=0,\quad l=0,1,\dots,p-1. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь квазиполином $\Phi(t)$, положив

$$\Phi(t) = \det \| a_{l,m}(t) \|_{l,m=0}^{p-1},$$

где

$$a_{l,m}(t) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{q=0}^{p-1} \omega^{-iq} \omega^{ql} \omega^{ml} e^{t\alpha_i \omega^{q+m}}, \quad l, m = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Основываясь далее на том, что $a_{l,m}(\omega t) = \omega^{-l} a_{l,m+1}(t)$, $l, m = 0, 1, \ldots, p-1$, где $a_{l,p}(t) = a_{l,0}(t)$ при всех $l = 0, 1, \ldots, p-1$ и всех $t \in \mathbb{C}$, можно проверить тождества $\Phi(\omega^j t) \equiv \Phi(t)$, $j = 0, 1, \ldots, p-1$. Из них следует $\Phi^{(\nu)}(0) = 0$ $\forall \nu$, $\nu \neq sp$. Но так как, в чем нетрудно убедиться, $\Phi(0) \neq 0$, то, если хотя бы при одном натуральном s $\Phi^{(sp)}(0) \neq 0$, функция $\Phi(t)$ имеет по крайней мере один нуль в $\mathbb{C}$. Обозначая его через t_0, заключаем, что соответствующая функция f, где в качестве B_m, $\sum_{m=0}^{p-1} |B_m|^2 \neq 0$, взяты те, которые удовлетворяют системе (7), не является тождественным нулем и в то же время будет решением однородной системы (6).

Итак, доказано следующее утверждение.

Предположение 2. *Если комплексные числа α_i таковы, что хотя бы при одном натуральном s*

$$\Phi^{(sp)}(0) \neq 0,$$

где $\Phi(t) = \det \left\| \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{q=0}^{p-1} \omega^{-iq} \omega^{ql} \omega^{ml} e^{t\alpha_i \omega^{q+m}} \right\|_{m,l=0}^{p-1}$, *то соответствующая система* (5) *не является квазистепенным базисом пространства A_∞.*

Пример. Пусть $p = 3$. Тогда можно проверить (учитывая равенства $a'_{l,m}(0) = p\alpha_{m+1}\omega^{l(m+1)} = \alpha_{m+1} a_{l,m+1}(0)$), что $\Phi'''(0) = \alpha_0^3 + \alpha_1^3 + \alpha_2^3 - 3\alpha_0\alpha_1^2 - 3\alpha_0^2\alpha_2 - 3\alpha_1\alpha_2^2 + 6\alpha_0\alpha_1\alpha_2$. Следовательно, если, например, $\alpha_0 = \alpha_1$, то соответствующая система (5) является квазистепенным базисом в A_∞ тогда и только тогда, когда $\alpha_2 = \alpha_0$.

Рассмотрение этого примера наводит на мысль, что вообще необходимым и достаточным условием базисности системы (5) в A_∞ является совпадение всех α_i, $i = 0, 1, \ldots, p-1$, между собой.

Замечание 1. Если вопрос о базисности системы (4) изучать в пространстве A_R, $R < \infty$, то из естественных неравенств $|a_i + b_i z| < R$ $\forall i$ и рассмотрения диагонального оператора T_1 следует, что эта система образует квазистепенной базис в A_R в том и только том случае, когда $a_i = 0$ и $|b_i| = 1$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$.

Замечание 2. Систему (5) можно исследовать на квазистепенную базисность в пространствах A_R, $0 < R \leqslant \infty$, и по-другому. Действительно, заметим сперва, что функции $Q_n(z)$, $n = 0, 1, \ldots$, этой системы связаны между собой соотношениями

$$Q_n^{(p)}(z) = \frac{n!}{(n-p)!} Q_{n-p}(z), \quad n \geqslant p,$$

т. е. что система $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ является системой нормированных полиномов Аппеля класса $A^{(p)}$ [6]. Кроме того, для соответствующего системе (5) оператора T имеем

$$Te^{\lambda z} = \sum_{i=0}^{p-1} S_i P_i e^{\lambda z} = \sum_{i=0}^{p-1} S_i \left\{ \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \omega^{-ij} e^{\lambda\omega^j z} \right\} =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} \omega^{-ij} e^{\lambda\omega^j z} e^{\lambda\alpha_i\omega^j} = \sum_{i=0}^{p-1} M_j(\lambda) e^{\lambda\omega^j z}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $M_j(\lambda) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \omega^{-ij} e^{\lambda\alpha_i\omega^j}$, $j = 0, 1, \ldots, p-1$. Поскольку, очевидно, функции $M_j(\lambda)$ являются целыми класса $[1, \infty)$, на основании известных утверждений из [6, 7] заключаем, что система (6) является квазистепенным базисом в A_∞ тогда и только тогда, когда

$$\det \left\| \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \omega^{-i(n-k)} e^{\lambda \alpha_i \omega^n} \right\|_{k,n=0}^{p-1} \equiv \text{const} \neq 0$$

или же (что, очевидно, равносильно), когда

$$\Delta(\lambda) = \det \| \omega^{-ni} e^{\lambda \alpha_i \omega^n} \|_{i,n=0}^{p-1} \equiv \text{const} \neq 0. \tag{8}$$

Заметим, что с помощью исвестного из алгебры правила умножения определителей нетрудно показать, что $\Phi(i) = \alpha\Delta(t)$, где $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$. Поэтому условие $\Phi^{(sp)}(0) = 0$, $s = 1, 2, \ldots$ (см. предложение 2) необходимо и достаточно (с учетом соотношений $\Phi^{(\nu)}(0) = 0$ при $\nu \neq sp$, $s \in \mathbb{N}$) для квазистепенной базисности системы (5) в пространстве A_∞.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях (с учетом результатов о нулях квазиполиномов из [8], гл. 1, § 8) квазистепенными базисами указанного вида в пространствах A_R^λ, $0 < R \leqslant \infty$, является только системы $\{(z+\alpha)^n\}_{n=0}^\infty$, где α — фиксированное комплексное число (равное, конечно, нулю при $R < \infty$). Отметим, что аналогичное утверждение справедливо и по отношению к системе вида

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} C_n^i f_i z^{n-i} \right\}_{n=0}^{\infty}. \tag{9}$$

Действительно, если система (9) является квазистепенным базисом в A_∞, то оператор $T_0 : T_0 z^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i f_i z^{n-i}$ расширяется до изоморфизма пространства A_∞ на себя. Но $T_0 = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f!}{i!} D^i$, $D = d/dz$, и поэтому [5] $f_i = f_0 b^i$ ($b =$ $=$ const; $f_0 \neq 0$), т. е.

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} C_n^i f_i z^{n-i} \right\}_{n=0}^{\infty} \equiv \{f_0 (z+b)^n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Если же систему (9) рассматривать в пространстве A_R с $R < \infty$, то она образует там квазистепенной базис тогда и только тогда, когда $f_0 \neq 0$ и $f_{i+1} = 0$, $i = 0, 1, \ldots$.

Отметим, наконец, что некоторые приведенные здесь утверждения можно получить и иным путем, исходя из соответствующих результатов Ю. А. Казьмина, касающихся базисов указанного вида в пространствах целых функций экспоненциального типа (см., например, [9]).

1. *Линчук С. С., Нагнибида Н. И.* О квазистепенных полиномиальных базисах в аналитических пространствах // Сиб. мат. журн.— 1974.— **15**, № 3.— С. 555—561.
2. *Маркушевич А. И.* О базисе в пространстве аналитических функций // Мат. сб.— 1945.— **17**, № 2.— С. 211—252.
3. *Березовский Н. И.* Об эквивалентности операторов умножения в пространствах $A(G)$ и $A(F)$ // Укр. мат. журн.— 1976.— **28**, № 4.— С. 443—452.
4. *Казьмин Ю. А.* Об одном геометрическом признаке полноты // Мат. сб.— 1976.— **100**, № 2.— С. 181—190.
5. *Нагнибида Н. И.* Об изоморфизмах аналитических пространств, перестановочных с оператором дифференцирования // Там же.— 1967.— **72**, № 2.— С. 250—260.
6. *Казьмин Ю. А.* О разложениях в ряды по полиномам Аппеля // Мат. заметки.— 1969.— **5**, № 5.— С. 509—520.
7. *Нагнибіда М. І.* Ще раз про поліноми Аппеля // Матеріали ювіл. конф. молодих науковців Буковини з проблеми природничих наук.— Чернівці : Вид-во Чернівец. ун-ту, 1970.— С. 53—55.
8. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М. : Наука, 1977.— 536 с.
9. *Казьмин Ю. А.* О разложениях в ряды по степеням $(z - cq^n)^n$ // Мат. заметки.— 1967.— **1**, № 6.— С. 683—688.

Ивано-Франк. ин-т нефти и газа

Получено 09.10.85