УДК 519.21

Н. С. Братийчук

Некоторые свойства блуждания на эргодической цепи Маркова

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, σ, P) заданы:

1. Неприводимая непериодическая однородная цепь Маркова x_n, $n \geqslant 0$, принимающая значения во множестве $\{1, 2, \dots\}$ с матрицей переходных вероятностей $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$.

2. Семейство случайных величин $(\xi_{ij}^{(n)})_{i,j,n=1}^{\infty}$, независимых в совокупности, независящих от x_n и таких, что при фиксированных i, j случайные величины $(\xi_{ij}^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ одинаково распределены и $\mathcal{F}_{ij}(x) = P\{\xi_{ij}^{(n)} < x\}$ — их общая функция распределения.

Определение. *Случайным блужданием на цепи Маркова называется последовательность S_n, $n \geqslant 0$, задаваемая соотношениями $S_0 = 0$, $S_n = S_{n-1} + \xi_{x_{n-1}x_n}^{(n)}$, $n \geqslant 1$.*

Пусть $f_{ij}(s) = M \exp(s\xi_{ij}^{(n)})$ и

$$A(s) = (p_{ij} f_{ij}(s))_{i,j=1}^{\infty}. \tag{1}$$

Наша основная цель состоит в изучении граничных функционалов, связанных с достижением положительного уровня блужданием S_n. Таким задачам в случае, когда цепь x_n принимает конечное число значений (например, N), посвящено большое число работ (в работах [1—3] можно найти более подробную библиографию по этому вопросу). В этом случае с чисто аналитической точки зрения основная проблема состоит в изучении свойств матрицы $A(s)$ размера $N \times N$. Поэтому настоящая статья посвящена изучению свойств матрицы $A(s)$ вида (1), или, точнее говоря, свойств оператора A_s, порождаемого матрицей $A(s)$ в некотором банаховом пространстве. (Точные определения будут даны ниже.)

1. Предположения. Вспомогательные результаты. Излагаемые в дальнейшем результаты получены в следующих предположениях:

А. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{i} \sum\limits_{j=n}^{\infty} p_{ij} = 0$.

Б. Существуют числа $s_+ > 0$, $s_- < 0$ такие, что $\sup\limits_{ij} f_{ij}(s_\pm) < \infty$.

В. Блуждание S_n не вырождено, т. е. не существует таких чисел β, β_j, $j = 1, 2, \dots$, что $P\{\xi_{ij}^{(n)} = \beta + \beta_i - \beta_j\} = 1$ для всех i, j.

Прокоментируем условие В. Вырожденность блуждания S_n означает, что $A(s) = D(s) P D^{-1}(s)$, где $D(s) = (\exp(s\beta_i)\delta_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, а $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ii} = 1$. В этом случае $S_n = n\beta + \beta_{x_0} - \beta_{x_n}$ для всех $n \geqslant 0$.

Пусть V — банахово пространство бесконечномерных последовательностей (вообще говоря, комплекснозначных) $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ с нормой $\|x\| =$

$= \sup_i |x_i|$. Элементы пространства V условимся записать в виде вектор-столбца и зададим оператор A_s, действующий из V в V, равенством

$$A_s x = A(s)\, x, \quad x \in V,\ s_- \leqslant s \leqslant s_+. \tag{2}$$

Обозначим теперь через B банахово пространство абсолютно сходящихся последовательностей с нормой $\| y \| = \sum_{i=1}^{\infty} | y_i |$, где $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$. Элементы пространства B условимся записывать в виде вектор-строки. Сопряженный (A_s^*) к оператору A_s действует из B в B. Для сопряженного оператора сохраним обозначение A_s, определив его действие на элементы из B формулой $yA_s = y\, A(s)$, $y \in B$.

Векторы $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in V$, $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in B$ с $x_i \in R$, $y_i \in R$ будем называть положительными, если $x_i > 0$, $y_i > 0$ для всех $i \geqslant 1$.

Пусть $\chi(A)$ — характеристическая функция множества A. Для натурального $n \geqslant 1$ положим

$$A^{\infty,n}(s) = ((p_{ij} f_{ij}(s) + n^{-2})\, \chi(1 \leqslant j \leqslant n))_{i,j=1}^{\infty}, \quad A^{n,n}(s) = (p_{ij} f_{ij}(s) + n^{-2})_{i,j=1}^{n}.$$

Обозначим через $A_s^{\infty,n}$ и $A_s^{n,n}$ операторы, порождаемые матрицами $A_s^{\infty,n}(s)$ и $A^{n,n}(s)$ соответственно. Очевидно, оператор $A_s^{n,n}$ можно рассматривать как оператор, действующий в n-мерном подпространстве пространства V. Кроме того, матрица $A^{n,n}(s)$ положительна, и если $r_n(s)$ — ее перронов корень, то понятно, что $r_n(s)$ — наибольшее собственное значение оператора $A_s^{n,n}$. Из специфической структуры матриц $A^{\infty,n}(s)$, $A^{n,n}(s)$ и условий А, Б легко следует такая лемма.

Лемма 1. 1. *Спектр оператора* $A_s^{\infty,n}$ *лежит в круге* $|z| \leqslant r_n(s)$, *причем* $r_n(s)$ — *его собственное значение.*

2. *Оператор* A_s *компактный и* $\| A_s^{\infty,n} - A_s \| \to 0$ *при* $n \to \infty$, $s_- \leqslant s \leqslant s_+$.

Лемма 2. *В условиях* Б *найдутся* $\alpha \in]0, 1]$, $\beta \in [1, \infty[$ *такие, что для всех* i, j *выполняются соотношения* $\alpha \leqslant \inf_{s_- \leqslant s \leqslant s_+} f_{ij}(s) \leqslant \sup_{s_- \leqslant s \leqslant s_+} f_{ij}(s) \leqslant \beta$.

Доказательство. Для $T > 1$ из легко доказываемого неравенства

$$\mathcal{F}_{ij}(T) - \mathcal{F}_{ij}(-T) \geqslant (1 - T)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, d\mathcal{F}_{ij}(x) + (T - 1)^{-1} (T - 3)$$

и условия Б следует существование T_0 такого, что $\inf_{ij} \int_{-T_0}^{T_0} d\mathcal{F}_{ij}(x) \geqslant 1/2$. Поэтому для всех i, j

$$f_{ij}(s) > \int_{-T_0}^{T_0} \exp(sx)\, d\mathcal{F}_{ij}(x) > 2^{-1} \exp((s_- - s_+)\, T_0) = \alpha.$$

С другой стороны,

$$\sup_{s_- \leqslant s \leqslant s_+} f_{ij}(s) \leqslant f_{ij}(s_+) + f_{ij}(s_-) < \sup_{i,j} (f_{ij}(s_+) + f_{ij}(s_-)) = \beta < \infty.$$

Лемма доказана.

Для дальнейшего изложения нам удобно ввести еще некоторые обозначения. Так, символами M_i, P_i будем обозначать соответственно условное математическое ожидание и условную вероятность при условии $x_0 = i$. Пусть $A^0(s) = I = (\delta_{ij})$, где δ_{ij} — символ Кронекера и $A^n(s) = (a_{ij}^{(n)}(s)) = A^{n-1}(s) \times A(s)$. Очевидно, $a_{i,j}^{(n)}(s) = M_i \{\exp(sS_n),\ x_n = j\}$, и из леммы 2 следует

$$\alpha^n p_{ij}^{(n)} \leqslant a_{ij}^{(n)}(s) \leqslant \beta^n p_{ij}^{(n)}, \tag{3}$$

где $p_{ij}^{(n)} = P_i\{x_n = j\}$. Обозначим еще $\tau_j = \inf\{n \geqslant 1 : x_n = j\}$, $\tau_B = \inf\{n \geqslant 0 : x_n \in B\}$, где B — подмножество множества натуральных чисел.

В наших условиях матрица $A(s)$ неприводима для всех $s \in [s_-, s_+]$, т. е. для каждых i, j найдется n такое, что $a_{ij}^{(n)}(s) > 0$, $s \in [s_-, s_+]$. Это легко следует из неприводимости цепи x_n и леммы 2. Хорошо известно (см., например, [4]), что в этом случае для всех i, j существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{ij}^{(n)}(s)}$, независящий от i, j, и общее значение этого предела обозначим $r^{-1}(s)$. Из (3) следует

$$\beta^{-1} \leqslant r(s) \leqslant \alpha^{-1}. \tag{4}$$

Для $z \in [0, r(s)[$, $s_- \leqslant s \leqslant s_+$ положим $A_{ij}(s, z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n a_{ij}^{(n)}(s)$, где $a_{ij}^{(0)}(s) = \delta_{ij}$ и $A(s, z) = (A_{ij}(s, z))$. Очевидно, $A_{ij}(s, z) < \infty$, если $0 \leqslant z < r(s)$. Для $z = r(s)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n(s)\, a_{ij}^{(n)}(s)$ может оказаться как сходящимся, так и расходящимся. Если $A_{ij}(s, r(s)) = \infty$ для всех i, j, то матрицу $A(s)$, следуя [4], будем называть $r(s)$-возвратной. Если, кроме этого, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, r^n(s)\, a_{ij}^{(n)}(s) > 0$, то такую $r(s)$-возвратную матрицу будем называть $r(s)$-положительной.

Замечание. Из неприводимости матрицы $A(s)$ легко следует, что если для некоторых i_0, j_0, s, z, $A_{i_0 j_0}(s, z) < \infty$, то $A_{ij}(s, z) < \infty$ для всех i, j. Следовательно, ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n a_{ij}^{(n)}(s)$ сходятся или расходятся одновременно. Этим свойством, называемым «теоремой о солидарности», мы иногда будем пользоваться не только применительно к $A_{ij}(s, z)$.

Пусть $f_{ij}^{(n)}(s) = M_i\{\exp(sS_n), \tau_j = n\}$, $F_{ij}(s, z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n f_{ij}^{(n)}(s)$. Поскольку $f_{ij}^{(n)}(s) \leqslant a_{ij}^{(n)}(s)$, то $F_{ij}(s, z) < \infty$ для $0 \leqslant z < r(s)$. Следующие соотношения выводятся стандартными рассуждениями с использованием строго марковского свойства процесса (S_n, x_n) (см., например, [5]). Отметим также, что все они являются частным случаем соотношений, полученных в [4]:

$$A_{ii}(s, z) = (1 - F_{ii}(s, z))^{-1},\ A_{ij}(s, z) = F_{ij}(s, z)(1 - F_{jj}(s, z))^{-1}, \tag{5}$$

$$F_{ij}(s, z) = z \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(s) F_{kj}(s, z) + z a_{ij}(s)(1 - F_{jj}(s, z)). \tag{6}$$

Лемма 3. *Пусть для некоторого i и $0 < z < A < \infty$ выполняется соотношение $F_{ii}(s, z) = M_i\{\exp(sS_{\tau_i}) z^{\tau_i}\} < \infty$. Тогда $\sup\limits_{1 \leqslant j < \infty} F_{ji}(s, z) < \infty$.*

Доказательство. Будем считать, что $A > 1$. Так как $F_{ii}(s, z) < \infty$, то из «теоремы о солидарности» следует, что $F_{ji}(s, z) < \infty$ для всех $j \geqslant 1$. Пусть $N < \infty$ таково, что $i < N$ и $\sup\limits_j \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} p_{jk} \leqslant \varepsilon \leqslant (2A\beta)^{-1}$. Положим $\sup\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} F_{ji}(s, z) = C < \infty$ и $E(N) = \{1, \ldots, N\}$. Тогда для $j \overline{\in} E(N)$ из строго марковского свойства процесса (S_n, x_n) следует

$$F_{ji}(s, z) = M_j\{\exp(sS_{\tau_i}) z^{\tau_i}\} = M_j\{\exp(sS_{\tau_{E(N)}}) z^{\tau_{E(N)}} \times$$

$$\times (M_{x_{\tau_{E(N)}}}\{\exp(sS_{\tau_i}) \cdot z^{\tau_i}, x_{\tau_{E(N)}} \neq i\} + P_i\{x_{\tau_{E(N)}} = i\}).$$

Поскольку $x_{\tau_{E(N)}} \in E(N)$, то

$$F_{ji}(s, z) \leqslant (C + 1) M_j\{\exp(sS_{\tau E(N)}) z^{\tau_{E(N)}}\} =$$

$$= (C + 1) \sum_{n=1}^{\infty} z^n M_j\{\exp(sS_n),\ \tau_{E(N)} = n\} \leqslant (C + 1) \sum_{n=1}^{\infty} (A\beta)^n P_j\{\tau_{E(N)} = n\}.$$

Но для $n \geqslant 1$

$$\sup_{j \overline{\in} E(N)} P_j \{\tau_{E(N)} = n\} = \sup_{j \overline{\in} E(N)} \sum_{k \overline{\in} E(N)} p_{jk} P_k \{\tau_{E(N)} = n - 1\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{j \overline{\in} E(N)} P_j \{\tau_{E(N)} = n - 1\} \cdot \varepsilon \leqslant \ldots \leqslant \varepsilon^{n-1}.$$

Следовательно, для всех j

$$F_{ji}(s, z) \leqslant (C + 1) \sum_{n=1}^{\infty} (A\beta)^n \varepsilon^{n-1} \leqslant (C + 1) \sum_{n=1}^{\infty} (A\beta)^n (2A\beta)^{1-n} \leqslant$$

$$\leqslant 2(C + 1) A\beta < \infty.$$

2. Основные результаты.

Теорема 1. *В условиях* А, Б *матрица* $A(s)$ $r(s)$*-возвратна.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся i_0, j_0 такие, что $A_{i_0 j_0}(s, r(s)) < \infty$ и, следовательно, $A_{ij}(s, r(s)) < \infty$ для всех i, j. Так как $A_{11}(s, r(s)) < \infty$, то из первого равенства в (5) следует, что $F_{11}(s, r(s)) < 1$ и, значит, $\sup_i F_{i1}(s, r(s)) = C < \infty$. Обозначим $Y_i = F_{i1}(s, r(s))$. Из уравнения (6) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(s) Y_k \leqslant Y_i / r(s), \quad i \geqslant 1, \tag{7}$$

причем, не ограничивая общности, можно считать что в (7) строгое неравенство выполняется для $i = 1$. Предположим сначала, что $\inf_i p_{i1} > 0$. Тогда $a_{i1}(s) \geqslant \alpha p_{i1} \geqslant \alpha \inf_i p_{i1} = \gamma > 0$. Поскольку $0 < Y_1 < \infty$, то выберем $\varepsilon \in]0, Y_1[$ таким, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{gathered} a_{11}(s)(Y_1 - \varepsilon) + \sum_{k=2}^{\infty} a_{1k}(s) Y_k < (Y_1 - \varepsilon)/r(s) - a_{11}(s) \cdot \varepsilon, \\ a_{i1}(s)(Y_1 - \varepsilon) + \sum_{k-2}^{\infty} a_{ik}(s) Y_k \leqslant Y_i / r(s) - a_{i1}(s) \cdot \varepsilon, \end{gathered} \tag{8}$$

Очевидно, такое ε всегда найдется. Пусть $\delta = \gamma\varepsilon / C$. Поскольку $\delta Y_i < \gamma\varepsilon < a_{i1}(s) \cdot \varepsilon$, $i \geqslant 2$ и $\delta(Y_1 - \varepsilon) < \sigma Y_1 < a_{11}(s) \cdot \varepsilon$, то из (8) следует

$$a_{11}(s)(Y_1 - \varepsilon) + \sum_{k=2}^{\infty} a_{1k}(s) Y_k < (r^{-1}(s) - \delta)(Y_1 - \varepsilon),$$

$$a_{i1}(s)(Y_1 - \varepsilon) + \sum_{k=2}^{\infty} a_{1k}(s) Y_k \leqslant (r^{-1}(s) - \delta) Y_i,$$

или $A(s)\tilde{Y} \leqslant (r^{-1}(s) - \delta)\tilde{Y}$, где $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_i)$, $\tilde{Y}_1 = Y_1 - \varepsilon$, $\tilde{Y}_i = Y_i$, $i \geqslant 2$. Отсюда и из результатов работы [4] (теорема 4.1) заключаем, что $r^{-1}(s) \leqslant r^{-1}(s) - \delta$. Пришли к противоречию.

Покажем теперь, как освободиться от условия $\inf_i p_{i1} > 0$. Пусть m таково, что $\inf_i p_{i1}^{(m)} > 0$. Поскольку при выполнении условия A $\lim_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)} = \pi_1$, где π_i, $i \geqslant 1$, — стационарное распределение цепи x_n, то такое m существует. Теперь для матрицы $B(s) = (b_{ij}(s)) = A^m(s)$ имеем $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{b_{ij}^{(k)}(s)} = \lim_{k\to\infty} (\sqrt[k]{a_{ij}^{(k)}(s)})^m = r^{-m}(s)$ и

$$B(s) Y \leqslant r^{-m}(s) Y, \; Y = (Y_i) \tag{9}$$

причем опять можно считать, что в (9) строгое неравенство выполняется по первой координате. Из (9), точно так же, как и выше, можно получить $r^{-m}(s) \leqslant r^{-m}(s) - \delta$ с некоторым $\delta > 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *В условиях А—В для каждого $s \in [s_-, s_+]$ существуют положительные векторы $Y(s) \in V$, $\Pi(s) \in B$ и число $R(s) > 0$ такие, что*

$$\Pi(s) A_s = R(s) \Pi(s), \; A_s Y(s) = R(s) Y(s), \tag{10}$$

причем:

1) *спектр оператора A_s лежит в круге $|z| \leqslant R(s)$;*

2) *векторы $\Pi(s)$, $Y(s)$ как функции от s могут быть выбраны непрерывными и такими, что $\Pi(0) = (\pi_i)$, $Y(0) = (1, 1, \ldots)$ и $\Pi(s) Y(s) = 1$, $s_- \leqslant s \leqslant s_+$;*

3) *$R(s)$ как функция от s непрерывна и строго выпукла на отрезке $[s_-, s_+]$, причем $R(0) = 1$;*

4) *если $N_{R(s)}$ подпространство (в V), отвечающее собственному значению $R(s)$, то $\dim N_{R(s)} = 1$.*

Доказательство. Положим $R(s) = r^{-1}(s)$, где $r(s)$ определено выше. Поскольку матрица $A(s)$ $r(s)$-возвратна, то из результатов работы [4] следует существование единственных (с точностью до постояного множителя) положительных векторов $\Pi(s)$, $Y(s)$ таких, что справедливы равенства (10). При этом $Y(s) = C(F_{i1}(s, r(s))_{i=1}^{\infty}$, где $C > 0$ и, значит, $Y(s) \in V$. Пусть опять n таково, что $\inf\limits_i a_{i1}^{(n)}(s) = \gamma > 0$. Тогда $\Pi(s) A^n(s) = R^n(s) \Pi(s)$. Поэтому $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \pi_j(s) < \gamma^{-1} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \pi_j(s)\, a_{j1}^{(n)}(s) = \gamma^{-1} R^n(s)\, \pi_1(s) < \infty$. Итак, $\Pi(s) \in B$. Пусть $\tilde{r}(s)$ — спектральный радиус оператора A_s $(\tilde{r}(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A_s^n\|})$. В работе [6] показано (теорема 2.1), что если $R(s) < \tilde{r}(s)$, то каждая точка из интервала $[R(s), \tilde{r}(s)]$ является точкой спектра оператора A_s. Однако спектр оператора A_s (как спектр всякого компактного оператора) состоит из не более чем счетного числа точек и если z — какая-либо из них, то z — собственное значение оператора A_s, имеющее конечную (как геометрическую так и алгебраическую) кратность. Поэтому $R(s) = \tilde{r}(s)$ и, следовательно, пп. 1, 4 доказаны.

Из условия Б легко следует, что $\| A_s - A_{s0} \| \to 0$ при $s \to s_0 \in [s_-, s_+]$, $s \in [s_-, s_+]$. Из теоремы 2.6 гл. VIII монографии [7] следует возможность выбора $\Pi(s)$, $Y(s)$ непрерывными по s, а также непрерывность (даже дифференцируемость) по s функции $R(s)$. Осталось доказать строгую выпуклость последней.

Поскольку функция $R(s)$ непрерывна, то ее выпуклость эквивалентна неравенству

$$R(2^{-1}(s_1 + s_2)) \leqslant 2^{-1}(R(s_1) + R(s_2)) \tag{11}$$

для всех $s_1 \in [s_-, s_+]$, $s_2 \in [s_-, s_+]$. Обратимся к операторам $A_s^{n,n}$, $A_s^{\infty,n}$ определенным выше. Если $R_n(s)$ — перронов корень матрицы $A^{n,n}(s)$, то из результатов работы [3] следует, что $R(s)$ как функция от s выпукла на $[s_-, s_+]$, поэтому

$$R_n(2^{-1}(s_1 + s_2)) \leqslant 2^{-1}(R_n(s_1) + R_n(s_2)). \tag{12}$$

Из леммы 1 и результатов теории возмущения линейных операторов [7] следует, что $R_n(s) \underset{n\to\infty}{\to} R(s)$. Теперь (11) вытекает из (12) при $n \to \infty$. То, что функция $R(s)$ не может быть линейной, доказывается точно так же, как и аналогичный факт в [3]. Доказательство завершено.

3. Дальнейшие свойства оператора A_s. Оператор A_s из (2) определен для всех s из полосы $s_- \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant s_+$, и для его спектрального радиуса справедлива оценка $R(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| A_s^n \|} \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| A_{\operatorname{Re} s}^n \|} = R(\operatorname{Re} s)$. Однако для s с $\operatorname{Im} s \neq 0$ возможно равенство $R(s) = R(\operatorname{Re} s)$. В дальней-

шем будем предполагать, что $R(s) < R(\mathrm{Re}\, s)$ для $s_- \leqslant \mathrm{Re}\, s \leqslant s_+$. Достаточным условием для выполнения этого предположения является условие нерешеточности блуждания (S_n, x_n) (см., например, [1]). Доказательство этого может быть проведено по такой же схеме, как и в случае конечной цепи [1, 3].

Кроме этого предположим дополнительно, что $R(s_\pm) > 1$. Из выпуклости и непрерывности функции $R(s)$ следует, что уравнение $R(s) - 1 = \lambda$ с $0 < \lambda < \min(R(s_+), R(s_-))$ имеет ровно два решения; обозначим их $s_-(\lambda) \in]\, s_-, 0\, [$, $s_+(\lambda) \in]\, 0, s_+\, [$. Пусть I—единичный оператор.

Теорема 3. *Операторы $A_{s_\pm(\lambda)} - (1+\lambda) I$—приводимо-обратимые* [8].

Доказательство проведем только для оператора $B_+ = A_{s_+(\lambda)} - (1+\lambda) I$. Приводимая обратимость оператора B_+ означает, что

$$V = R(B_+) \oplus N(B_+), \tag{13}$$

где $R(B_+)$ — подпространство значений, а $N(B_+)$ — подпространство нулей оператора B_+. Поскольку точка $z = 0$ — изолированное собственное значение оператора B_+, то можно указать $\rho > 0$ такое, что в круге $|z| \leqslant \rho$ нет точек спектра оператора B_+, отличных от $z = 0$. Положим

$$\hat{P} = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|z|=\rho} R(\lambda, z)\, dz, \tag{14}$$

где $R(\lambda, z) = (B_+ - zI)^{-1}$ — резольвента оператора B_+. Разложение (13) эквивалентно тому, что $z = 0$ — собственное значение алгебраической кратности 1. Другими словами, достаточно показать, что

$$\dim \hat{P} V = 1. \tag{15}$$

Положим $B_+^{\infty,n} = A^{\infty,n}_{s_+^{(n)}(\lambda)} - (1+\lambda) I$, $B_+^{n,n} = A^{n,n}_{s_+^{(n)}(\lambda)} - (1+\lambda) I^{(n)}$, где $I^{(n)}$ — единичная матрица размерности $n \times n$, $s_+^{(n)}(\lambda)$ — корень уравнения $R_n(s) - 1 = \lambda$, а $R_n(s)$ — перронов корень матрицы $A^{n,n}_{(s_+^{(n)}(\lambda))}$. Поскольку $R_n(s) \to R(s)$ при $n \to \infty$, то можно считать, что функция $s_+^{(n)}(\lambda)$ определена для всех n, причем $s_+^{(n)}(\lambda) \underset{n\to\infty}{\to} s_+(\lambda)$. Отсюда следует, что с самого начала можно выбрать n_0 и ρ такими, чтобы в круге $|z| \leqslant \rho$ не было точек спектра оператора $B_+^{\infty,n}$, отличных от $z = 0$, для всех $n \geqslant n_0$. Определим теперь проектор $\hat{P}_n$ формулой (14) с заменой $R(\lambda, z)$ на $R_n(\lambda, z) = (B_+^{\infty,n} - zI)^{-1}$. Из очевидного равенства $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A) B^{-1}$ и ограниченности операторов $R(\lambda, z)$, $R_n(\lambda, z)$ на $|z| = \rho$ следует

$$\| \hat{P}_n - P \| \leqslant (2\pi)^{-1} \| A^{\infty,n}_{s_+^{(n)}(\lambda)} - A_{s_+(\lambda)} \| \int\limits_{|z|=\rho} \| R(\lambda, z) \| \, \| R_n(\lambda, z) \| \, dz \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Поэтому (15) будет доказано, если мы покажем, что $\dim \hat{P}_n V = 1$, $n \geqslant n_0$, или, что то же самое,

$$V = R(B_+^{\infty,n}) \oplus N(B_+^{\infty,n}). \tag{16}$$

Пусть V_n — n-мерное подпространство пространства V, в котором действует оператор $B_+^{n,n}$. Тогда

$$V_n = R(B_+^{n,n}) \oplus N(B_+^{n,n}). \tag{17}$$

Отправляясь от разложения (17) с учетом специфической структуры матрицы $A^{\infty,n}_{s_+^{(n)}(\lambda)}$ несложно получить (16). Теорема доказана.

Положим $P_\pm(\lambda) = (\pi_i(s_\pm(\lambda)) Y_i(s_+(\lambda)))_{i,j=1}^{\infty}$, $\beta_\pm(\lambda) = R'(s_\pm(\lambda))$.

Теорема 4. *Существует $\varepsilon > 0$ такое, что операторозначная функция $(A_s - (1+\lambda) I)^{-1}$ аналитична в полосе $s_-(\lambda) - \varepsilon \leqslant \mathrm{Re}\, s \leqslant s_+(\lambda) + \varepsilon$,* *за исключением точек* $s = s_{\pm}(\lambda)$, *причем*

$$(A_s - (1+\lambda) I)^{-1} = ((s - s_+(\lambda))\beta_+(\lambda))^{-1} P_+(\lambda) + ((s - s_-(\lambda))\beta_-(\lambda))^{-1} P_-(\lambda) + W_s(\lambda), \quad s_-(\lambda) - \varepsilon \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant s_+(\lambda) + \varepsilon, \qquad (18)$$

где операторозначная функция $W_s(\lambda)$ *аналитична в полосе* $s_-(\lambda) - \varepsilon \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant s_+(\lambda) + \varepsilon$.

Доказательство. Для всякого s_0 с $s_-(\lambda) < \operatorname{Re} s_0 < s_+(\lambda)$ имеем

$$A(s) - (1+\lambda) I = A(s_0) - (1+\lambda) I + \sum_{n=1}^{\infty} (s - s_0)^n A^{(n)}(s_0), \qquad (19)$$

где $A^{(n)}(s_0) = (n!)^{-1} \left(p_{ij} \dfrac{d^n}{ds^n} f_{ij}(s_0) \right)_{ij=1}^{\infty}$. Поскольку существует $(A_{s_0} - (1+\lambda) I)^{-1}$, то из (19) следует, что для некоторого $\rho > 0$ операторозначная функция $(A_s - (1+\lambda) I)^{-1}$ разлагается в ряд по неотрицательным степеням $s - s_0$ с $|s - s_0| < \rho$. Представление (18) следует из теоремы 3 и результатов монографии [8].

1. *Пресман Э. И.* Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1969.— **33**, № 4.— С. 861—900.
2. *Волков И. С.* О распределении сумм случайных величин, заданных на однородной цепи Маркова с конечным числом состояний // Теория вероятностей и ее применения.— 1958. — **3**, № 4.— С. 413—429.
3. *Miller H.* A convexity property in the theory of random variables on a finite Markov chain // Ann. Math. Statist.— 1961.— **32**, N 4.— P. 1260—1270.
4. *Vere-Jones D.* Ergodic properties of nonnegative matrices-I // Pacif. J. Math.— 1967.— **22**, N 2.— P. 361—385.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов : В 3-х т.— М. : Наука, 1971.— Т. 1.— 664 с.
6. *Vere-Jones D.* Ergodic properties of nonnegative matrices-II // Pacif. J. Math.— 1968.— **26**, N 3.— P. 601—620.
7. *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
8. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения.— Киев: Наук. думка, 1976.— 184 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 12.03.86