УДК 517.988,517.947

Ю. В. Богданский

Принцип максимума для нерегулярного эллиптического дифференциального уравнения в счетномерном гильбертовом пространстве

Пусть H — бесконечномерное сепарабельное вещественное гильбертово пространство, $\mathcal{D}$ — область в H; $B_c(H)$ — банахово (в смысле операторной нормы) пространство самосопряженных ограниченных операторов на H. Если j — линейный непрерывный функционал на $B_c(H)$, то можно говорить о дифференциальном операторе второго порядка (с постоянными коэффициентами), заданном на функциях, дважды непрерывно дифференцируемых в $\mathcal{D}$, формулой

$$(\mathcal{L}u)(x) = j(u''(x)). \tag{1}$$

Следуя терминологии работы [1] будем называть такой дифференциальный оператор регулярным, если соответствующий функционал j представим в виде $j(C) = \mathrm{Sp}AC$ для некоторого ядерного линейного оператора A. В противном случае дифференциальный оператор будет называться нерегулярным. Дифференциальный оператор, определенный формулой (1), назовем эллиптическим, если соответствующий функционал j является неотрицательным: $j(C) \geqslant 0$ для любого $C \geqslant 0$.

В работах [2, 3] рассмотрен частный случай нерегулярных эллиптических операторов — существенно бесконечномерные эллиптические операторы. Для таких операторов положительный функционал j должен обращаться в 0 на всех компактных операторах из $B_c(H)$.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение. *Пусть* $j: B_c(H) \to \mathbb{R}$ — *неотрицательный функционал. Тогда его можно* (*и притом единственным образом*) *представить в виде* $j(\cdot) = \mathrm{Sp}A(\cdot) + \omega(\cdot)$, *где* $A \geqslant 0$ — *ядерный оператор, а* ω — *существенно бесконечномерный неотрицательный функционал.*

В силу этого утверждения нерегулярный эллиптический оператор единственным образом разлагается в сумму регулярного и существенно бесконечномерного эллиптических операторов.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{R}$ — *компактное подмножество в* $B_c(H)$ *и* ω — *неотрицательный существенно бесконечномерный функционал на* $B_c(H)$, $\|\omega\| = 1$. *Тогда существует последовательность ядерных положительных операторов* A_m *таких, что выполнены следующие условия:* $\|A_m\| \to 0$, $\mathrm{Sp}\,A_m = 1$ *и* $\omega(C) = \lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{Sp}\,A_m C$ *для всех* $C \in \mathfrak{R}$. *При этом сходимость* $\mathrm{Sp}\,A_m(\cdot)$ *к* $\omega(\cdot)$ *равномерна на* $\mathfrak{R}$.

Доказательство. Прежде всего рассмотрим частный случай: $\mathfrak{R}$ состоит из одного оператора C. Пусть C_ε имеет полную систему собственных векторов и $C - C_\varepsilon$ компактен, а потому $\omega(C) = \omega(C_\varepsilon)$. Если $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ — набор собственных чисел оператора C_ε, то поскольку добавление к C_ε конечномерного оператора не меняет значение $\omega(C_\varepsilon)$, можно сделать вывод, что $\underline{\lim}\,\lambda_j \leqslant \omega(C_\varepsilon) \leqslant \overline{\lim}\,\lambda_j$. Однако любое число $\alpha \in [\underline{\lim}\,\lambda_j, \overline{\lim}\,\lambda_j]$ может быть получено как предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_n}}{n}$ для некоторой подпоследовательности $\{\lambda_{j_n}\}$ из $\{\lambda_j\}$. Поэтому $\omega(C_\varepsilon) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \mathrm{Sp}\,P_n C_\varepsilon$, где P_n — ортопроектор на подпространство, натянутое на собственные векторы $f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_n}$ оператора C_ε. A_n можно положить равным $\dfrac{1}{n} P_n$.

Пусть теперь $\mathfrak{R}$ — произвольное компактное подмножество в $B_c(H)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $\mathfrak{R}_\varepsilon = \{B_1, \ldots, B_n\}$ — конечная ε-сеть множества $\mathfrak{R}$.

Для каждого $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ обозначим $g_\omega(\vec{\alpha}) = \omega\Big(\sum\limits_{k=1}^n \alpha^k B_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^n \alpha^k \omega(B_k)$, $g_\omega(\cdot)$ — линейная функция на $\mathbb{R}^n$. Пусть $\sigma_+(B) = \sup\limits_{\omega\in\Omega} \omega(B)$, где Ω — множество существенно бесконечномерных нормированных неотрицательных функционалов на $B_c(H)$. Тогда $\sigma_+(B) = \overline{\lim}\,\{\lambda_j\}$, где λ_j — собственные числа оператора B_ε (в прежних обозначениях). Аналогично $\sigma_-(B) = \inf\limits_{\omega\in\Omega} \omega(B) = \underline{\lim}\,\lambda_j$. Тогда $\sigma_-(B) \leqslant \omega(B) \leqslant \sigma_+(B)$.

Рассмотрим функции $h_+(\vec{\alpha}) = \sigma_+\Big(\sum\limits_{k=1}^n \alpha^k B_k\Big)$ и $h_-(\vec{\alpha}) = \sigma_-\Big(\sum\limits_{k=1}^n \alpha^k B_k\Big)$. Так как $\sup\limits_{\omega\in\Omega} \omega(\alpha B_1 + (1-\alpha) B_2) \leqslant \alpha \sup\limits_{\omega\in\Omega} \omega(B_1) + (1-\alpha) \sup\limits_{\omega\in\Omega} \omega(B_2)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то $h_+(\cdot)$ — выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$. Аналогично $h_-(\cdot)$ — вогнутая функция на $\mathbb{R}^n$. Легко видеть, что непрерывные функции $h_+(\cdot)$ и $h_-(\cdot)$ удовлетворяют неравенствам $h_-(\vec{\alpha}) \leqslant g_\omega(\vec{\alpha}) \leqslant h_+(\vec{\alpha})$ для всех $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$.

Можно считать, что график функции $g_\omega(\vec{\alpha})$ — опорная плоскость к множеству $\operatorname{epi} h_+$ или $\operatorname{epi} h_-$ [4]. Действительно, любая функция g_ω может быть представлена в виде $\mu g_1 + (1-\mu) g_2$, где $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, а графики функций g_1 и g_2 — опорные плоскости соответственно к $\operatorname{epi} h_+$ и $\operatorname{epi} h_-$; если при этом будет доказано, что функциям g_1 и g_2 соответствуют функционалы $\lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{Sp} A_m^{(1)}(\cdot)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{Sp} A_m^{(2)}(\cdot)$, т. е. $g_i(\vec{\alpha}) = \lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{Sp} A_m^{(i)}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha^k B_k\right)$, $i = 1, 2$, то $\omega(C) = \lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{Sp}(\mu A_m^{(1)} + (1-\mu) A_m^{(2)}) C$ для всех $C = \Sigma \alpha^k B_k$, и при этом последовательность операторов $\mu A_m^{(1)} + (1-\mu) A_m^{(2)}$ также удовлетворяет требованиям теоремы.

Если $g(\vec{\alpha}_0) = h_+(\vec{\alpha}_0)$ и $\vec{\alpha}_0$ — точка дифференцируемости функции h_+, то существует существенно бесконечномерный нормированный неотрицательный функционал $\omega(\cdot) = \lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{Sp} A_m(\cdot)$ такой, что $g_\omega(\vec{\alpha}_0) = h_+(\vec{\alpha}_0)$. Существование такого функционала следует из первого шага доказательства теоремы, примененного к $B = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_0^k B_k$. При этом $g_\omega(\vec{\alpha})$ совпадает с $g(\vec{\alpha})$ при всех $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ в силу единственности опорной плоскости к множеству $\operatorname{epi} h_+$ в точке $(\vec{\alpha}_0, h_+(\vec{\alpha}_0))$.

Пусть $\vec{\alpha}_0$ — произвольная точка $\mathbb{R}^n$ и $g(\vec{\alpha}_0) = h_+(\vec{\alpha}_0)$, причем $\vec{\alpha}_0$ не является точкой дифференцируемости функции h_+ (случай с функцией h_- аналогичен). Тогда $g(\vec{\alpha}) = (\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0, \vec{\gamma}^*)$, где $\vec{\gamma}^*$ — субградиент выпуклой функции h_+ в точке $\vec{\alpha}_0$. Поскольку дифференциал $\partial h_+(\vec{\alpha}_0)$ — выпуклое замкнутое множество, совпадающее в данном случае с замкнутой выпуклой оболочкой множества предельных точек последовательностей вида $\{\nabla h_+(\vec{\alpha}_k)\}$, где $\vec{\alpha}_k \to \vec{\alpha}_0$ и h_+ дифференцируема в $\vec{\alpha}_k$ [4, с. 263], то со сколь угодно высокой точностью можно заменить $\vec{\gamma}^*$ линейной комбинацией $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \vec{\gamma}_k^*$, где $\beta_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k = 1$ и $\vec{\gamma}_k^*$ — градиенты функции h_+ в точках дифференцируемости $\vec{\alpha}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом нам удается построить нормированные положительные существенно бесконечномерные функционалы ω_k вида $\lim \operatorname{Sp} A_i(\cdot)$ такие, что $\left| g(\vec{e}_j) - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \omega_k(B_j) \right| < \varepsilon$ для $j = 1, 2, \ldots, n$ и $\{\vec{e}_j\}$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$. Если $\omega = \Sigma \beta_k \omega_k$, то $|g(\vec{e}_j) - \omega(B_j)| < \varepsilon$ и при этом функционал ω снова имеет вид $\lim \operatorname{Sp} A_i(\cdot)$.

Этой процедурой для каждого $\varepsilon > 0$ удается построить ядерный положительный оператор A_m с нормой $\|A_m\| < \varepsilon$ и $\operatorname{Sp} A_m = 1$, причем такой, что $|g(\vec{e}_j) - \operatorname{Sp} A_m B_j| < 2\varepsilon$, а потому удается сопоставить самому g функционал указанного вида: $g(\vec{e}_j) = \lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{Sp} A_m B_j$ для $j = 1, 2, \ldots, n$.

Итак, для любого существенно бесконечномерного неотрицательного нормированного функционала ω и конечного набора операторов $B_1, B_2, \ldots, B_n$ найдется последовательность ядерных положительных операторов $\{A_m\}$ таких, что $\operatorname{Sp} A_m = 1$, $\|A_m\| \to 0$ и $\omega(B_j) = \lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{Sp} A_m B_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, существует A_m такой, что $|\omega(B_j) - \operatorname{Sp} A_m B_j| < \varepsilon$ для $j = 1, 2, \ldots, n$, а потому для любого $B \in \mathfrak{N}: |\omega(B) - \operatorname{Sp} A_m B| \leqslant |\omega(B - B_i)| + |\omega(B_i) - \operatorname{Sp} A_m B_i| + |\operatorname{Sp} A_m(B_i - B)| < 3\varepsilon$, где $B_i \in \mathfrak{N}_\varepsilon$ таков, что $\|B - B_i\| < \varepsilon$.

Уменьшая ε, строим последовательность ядерных положительных операторов A_m такую, что $\operatorname{Sp} A_m = 1$, $\| A_m \| \to 0$ и $\sup\limits_{B \in \mathfrak{N}} | \omega(B) - \operatorname{Sp} A_m B | \to 0$, что и доказывает теорему.

Замечание 1. Ядерные операторы A_m, полученные в теореме, конечномерны.

Замечание 2. Если Γ_d — множество самосопряженных операторов Гильберта — Шмидта, ограниченных по гильберто-шмидтовской норме константой d, т. е. $\Gamma_d = \{B \in B_c(H) \mid \sigma_2(B) \leqslant d\}$, то последовательность $\operatorname{Sp} A_m(\cdot)$ сходится на Γ_d равномерно к нулю.

Действительно, для любого $B \in \Gamma_d : | \operatorname{Sp} A_m B | \leqslant \sigma_2(A_m) \sigma_2(B) \leqslant d\sigma_2(A_m)$, и осталось заметить, что $\sigma_2(A_m) \to 0$ при $m \to \infty$.

Таким образом, теорема 1 справедлива, если вместо $\mathfrak{N}$ взять $\mathfrak{N} + \Gamma_d = \{B_1 + B_2 \mid B_1 \in \mathfrak{N},\ B_2 \in \Gamma_d\}$.

Пусть $\mathcal{D}$ — ограниченное открытое множество в гильбертовом пространстве H. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество функций u на $\mathcal{D}$ класса $C^2(\mathcal{D})$ таких, что для каждой $u \in \mathfrak{A}$ существуют компакт $\mathfrak{N}_u$ и $d_u > 0$, что $u''(x) \in \mathfrak{N}_u + \Gamma_{d_u}$ для всех $x \in \mathcal{D}$.

Теорема 2. *$\mathfrak{A}$ — алгебра.*

Доказательство. Прежде всего для каждой функции $u \in \mathfrak{A}$ $u'' : \mathcal{D} \to B_c(H)$, $u' : \mathcal{D} \to H$ и $u : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ — ограниченные непрерывные функции. Проверим, что $uv \in \mathfrak{A}$, если $u, v \in \mathfrak{A}$. Исходим из формулы $(uv)''(x) = u(x) v''(x) + v(x) u''(x) + u'(x)(\cdot, v'(x)) + v'(x)(\cdot, u'(x))$, в которой осталось лишь заметить, что оператор $B_x = u'(x)(\cdot, v'(x)) + v'(x)(\cdot, u'(x))$ конечномерен, причем $\sigma_2(B_x) \leqslant 2 \| u'(x) \| \| v'(x) \|$ ограничено на $\mathcal{D}$.

Замечание 3. В силу теоремы 1 и предшествовавшего ей предложения для любого нерегулярного эллиптического дифференциального оператора, представимого в виде (1), и любой функции u из алгебры $\mathfrak{A}$ существует последовательность ядерных положительных операторов A_n (которые можно считать конечномерными) такая, что $A_n \to A$ по норме, $\operatorname{Sp} A_n = \| j \|$ для всех n и $(\mathcal{L}u)(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{Sp} A_n u''(x)$, причем сходимость последовательности $\operatorname{Sp} A_n u''(x)$ к $(\mathcal{L}u)(x)$ равномерна на $\mathcal{D}$.

Теорема 3 (принцип максимума). *Пусть функция u непрерывна в $\overline{\mathcal{D}}$ и в области $\mathcal{D}$ принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$, $\mathcal{L}$ — нерегулярный эллиптический дифференциальный оператор и $\mathcal{L}u(x) \geqslant 0$ всюду в $\mathcal{D}$. Тогда* $\sup\limits_{x \in \mathcal{D}} u(x) = \sup\limits_{x \in \partial\mathcal{D}} u(x)$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Заменив u на $v = u + \varepsilon \| x \|^2$, добьемся, чтобы $(\mathcal{L}v)(x) = j(v''(x)) \geqslant 2\varepsilon \| j \|$ всюду в $\mathcal{D}$. В силу доказанного найдется такой конечномерный оператор $A_n \geqslant 0$, что $\operatorname{Sp} A_n v''(x) > \varepsilon \| j \|$ всюду в $\mathcal{D}$. Теперь (ссылаясь на конечномерный принцип максимума) можно утверждать, что $\sup\limits_{x \in \mathcal{D}} v(x) = \sup\limits_{x \in \partial\mathcal{D}} v(x)$, откуда $\sup\limits_{x \in \mathcal{D}} u(x) \leqslant \sup\limits_{x \in \partial\mathcal{D}} u(x) + \varepsilon R^2$, где R — радиус шара с центром в 0, содержащего $\mathcal{D}$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и непрерывности u в $\overline{\mathcal{D}}$ отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие. *Краевая задача $(\mathcal{L}u)(x) = f(x)$, $x \in \mathcal{D}$; $u(x) = g(x)$, $x \in \partial\mathcal{D}$, имеет в классе функций $\mathfrak{A}$ не более одного решения.*

Замечание 4. Для регулярного и существенно бесконечномерного эллиптических операторов принцип максимума установлен в классе всех непрерывных в $\overline{\mathcal{D}}$, дважды непрерывно дифференцируемых в $\mathcal{D}$ функций. При этом для регулярного оператора результат является естественным обобщением конечномерного принципа максимума; для оператора Лапласа—Леви (частного случая существенно бесконечномерного оператора) принцип максимума получен в [5], для общего существенно бесконечномерного — в работе [3].

1. *Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В.* Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. II // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1972.— **27**.— С. 247—262.

2. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Укр. мат. журн.— 1977.— **29**, № 6.— С. 781—784.
3. *Богданский Ю. В.* Параболические уравнения с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами.— Киев, 1977.— 50.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 4Б269-77 Деп.
4. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ.— М. : Мир, 1973.— 469 с.
5. *Феллер М. Н.* Об уравнении Лапласа в пространстве $L_2(G)$ // Докл. АН УССР.— 1965.— № 12.— С. 1558—1562.

Киев. политехн. ин-т Получено 26.12.85