УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун

Развитие исследований по точному решению экстремальных задач теории наилучшего приближения

Приведен обзор исследований по точному решению задач наилучшего приближения функциональных классов конкретными аппроксимирующими множествами, вычисления поперечников, а также некоторых близких задач. Основное внимание уделено фундаментальным результатам Н. П. Корнейчука, с именем которого тесно связано развитие этих направлений теории приближений. Прослежено влияние его идей и созданных им мощных методов на исследования других авторов.

Наведено огляд досліджень з точного розв'язання задач найкращого наближення функціональних класів конкретними апроксимуючими множинами, обчислення поперечників та деяких близьких задач. Основну увагу зосереджено на фундаментальних результатах М. П. Корнійчука, з ім'ям якого тісно пов'язаний розвиток цих напрямів теорії наближення. Простежується вплив його ідей та створених ним потужних методів на дослідження інших авторів.

Пусть X — линейное нормированное пространство, $\mathfrak{N} \subset X$ и $x \in X$. Величина

$$E(x, \mathfrak{N})_X = \inf\{\|x - u\|_X : u \in \mathfrak{N}\} \tag{1}$$

называется наилучшим приближением элемента $x \in X$ элементами множества $\mathfrak{N}$ в метрике пространства X.

Если задан класс элементов $\mathfrak{M} \subset X$, то величина

$$E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_X = \sup\{E(x, \mathfrak{N})_X : x \in \mathfrak{M}\} \tag{2}$$

называется наилучшим приближением класса $\mathfrak{M}$ множеством $\mathfrak{N}$ в метрике X.

Как правило, нахождение для $x \in X$ элемента наилучшего приближения является сложной задачей. Поэтому часто для аппроксимации элементов определенного класса $\mathfrak{M}$ используются линейные методы приближения, которые, возможно, дают и худшее приближение, чем наилучшее, но позволяют достаточно просто находить по $x \in \mathfrak{M}$ элемент $u \in \mathfrak{N}$, предназначенный для его приближения. На этом пути естественно возникает задача наилучшего линейного приближения класса $\mathfrak{M}$. Точнее, пусть $\mathfrak{N}$ — линейное подпространство из X, $A: X \to \mathfrak{N}$ — линейный оператор и

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, A)_X = \sup\{\|x - Ax\|_X : x \in \mathfrak{M}\}.$$

Наилучшим линейным приближением класса $\mathfrak{M}$ подпространством $\mathfrak{N}$ в метрике X называется величина

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_X = \inf_A \mathscr{E}(\mathfrak{M}, A)_X, \tag{3}$$

где нижняя грань берется по всевозможным линейным операторам $A: X \to \mathfrak{N}$.

При наилучшем и наилучшем линейном приближении конкретных функциональных классов в качестве аппроксимирующих подпространств $\mathfrak{N}$ традиционно использовались тригонометрические и алгебраические полиномы, а в последние десятилетия также сплайн-функции.

В 1936 г. А. Н. Колмогоров [11] сформулировал задачу вычисления поперечников, которая привела к возникновению в теории приближения направления, связанного с выбором для данного класса функций наилучших аппроксимирующих множеств. n-Поперечником по Колмогорову класса $\mathfrak{M}$ в пространстве X называется величина

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_X, \tag{4}$$

где нижняя грань берется по всевозможным n-мерным подпространствам $\mathfrak{N}$ пространства X. Линейным n-поперечником класса $\mathfrak{M}$ в пространстве X называется величина

$$d'_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_X. \tag{5}$$

И здесь нижняя грань берется по всевозможным n-мерным подпространствам пространства X.

Отметим, что наряду с обычными наилучшими приближениями в теории аппроксимации рассматриваются и наилучшие приближения при наличии ограничений (например, наилучшие односторонние приближения), и аналогично (2) и (4) в этих ситуациях могут быть введены наилучшие приближения и поперечники функциональных классов.

В теории приближений и вычислительной математике рассматриваются и другие важные поперечники, однако мы ограничимся рассмотрением только поперечников (4) и (5), связанных с наилучшими и наилучшими линейными приближениями.

В данном обзоре мы проследим этапы исследований, связанных с точным решением задач наилучшего приближения и вычисления поперечников классов вещественных периодических функций одной переменной, поскольку для них и получены, главным образом, точные результаты.

Остановимся подробнее на задачах приближения. Здесь можно естественным образом выделить два периода. К первому относятся исследования по наилучшим приближениям классов типа W^r_∞ в метрике L_∞ и классов типа W^r_1 в метрике L_1 тригонометрическими полиномами, проведенные Ж. Фаваром, А. Н. Ахиезером, М. Г. Крейном, Б. Надем, С. М. Никольским, В. К. Дзядыком, С. Б. Стечкиным, Сунь Юн-шеном и другими математиками. Эти исследования в той или иной мере базировались на наилучшем приближении в среднем (L_1-приближении) конкретной функции — ядра, задающего соответствующий функциональный класс. При этом наилучшие приближения классов функций оказывались реализованными с помощью линейных методов. Попытки изучения такими средствами аналогичных задач для классов функций, определяемых с помощью модуля непрерывности, не приводили, и, как выяснилось впоследствии, не могли привести к точному их решению. Перелом произошел в 1961 г., когда Н. П. Корнейчук [2] предложил принципиально новый подход к решению такого рода задач и нашел точное значение наилучшего приближения тригонометрическими полиномами класса H^ω в равномерной метрике. С этого времени и начинается второй современный период исследований по точному решению задач наилучшего приближения функциональных классов. Важные работы по данной проблематике были выполнены в этот период Н. П. Корнейчуком, С. Б. Стечкиным, В. М. Тихомировым, В. К. Дзядыком и их учениками. В результате исследований по наилучшему приближению тригонометрическими полиномами классов $W^\omega H^\omega$ Н. П. Корнейчук создал метод, базирующийся на сравнении перестановок, который не только позволил ему в 1970 г. получить полное решение этой задачи, но и оказался важным орудием точного решения многих других экстремальных задач теории приближения. На этом пути Н. П. Корнейчуком и его учениками было получено много важных результатов, которым и будет уделено основное внимание в настоящем обзоре. При этом формулировки результатов мы приведем в той общности, для которой не требуются слишком громоздкие определения и обозначения и, поскольку исследованиям по аппроксимации сплайн-функциями посвящен отдельный обзор [3], публикуемый в настоящем журнале, мы не претендуем на полноту изложения этой части. Отдельный пункт посвящен исследованиям по приближениям с ограничениями.

1. Классы периодических функций. Обозначим через L_p,

$p\in[1,\infty]$, и C пространства вещественных 2π-периодических функций с соответствующими нормами $\|\cdot\|_{L_p}=\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_C=\|\cdot\|_\infty$. Ниже мы вместо $E(f,\mathfrak{N})_{L_p}$ и $E(\mathfrak{M},\mathfrak{N})_{L_p}$ пишем $E(f,\mathfrak{N})_p$ и $E(\mathfrak{M},\mathfrak{N})_p$ соответственно.

Многие важные классы периодических функций можно рассматривать как классы $K*F$ сверток фиксированного ядра $K\in L_1$ с функциями из некоторого множества $F\subset L_1$ (часто F — шар в некотором функциональном пространстве). Пусть $\theta=\theta(K)=1$, если $K\perp 1$, и $\theta=0$ — в противном случае. Тогда класс $K*F$ определяется следующим образом:

$$K*F=\{f:f=a\theta+K*\varphi,\ a\in\mathbb{R},\ \varphi\in F,\ \varphi\perp\theta\},$$

где

$$K*\varphi=\int_0^{2\pi}K(\cdot-t)\,\varphi(t)\,dt$$

— свертка ядра K и функции φ и запись $\varphi\perp\psi$ означает, что

$$\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,\psi(t)\,dt=0.$$

Рассмотрим несколько наиболее важных случаев примеров ядра $K(t)$. Пусть

$$B_r(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}m^{-r}\cos(mt-\pi r/2),\quad r\in\mathbb{N},$$

— ядро Бернулли, а F — произвольное множество из L_1. Тогда $W^rF:=$ $:=B_r*F$ — класс функций $f\in C$ таких, что $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна на всей оси и $f^{(r)}\in F$. Если $F=F_p:=\{f:f\in L_p,\ \|f\|_p\leqslant 1\}$, $p\in$ $\in[1,\infty]$, — единичный шар в L_p, то $W_p^r:=W^rF_p$ — классические соболевские классы периодических функций. В случае, когда

$$F=H^\omega=\{f:f\in C,\ \omega(f,t)\leqslant\omega(t),\ t\in[0,\pi]\},$$

где $\omega(f,t)=\sup\{|f(t')-f(t'')|:|t'-t''|\leqslant t\}$ — модуль непрерывности функции f, а $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности, получаем введенные С. М. Никольским классы $W^rH^\omega:=B_r*H^\omega$. Эти классы учитывают более тонкие дифференциально-разностные свойства функций, чем классы W_p^r. В частности, если $\omega(t)=t$, $t\in[0,\pi]$, то $W^rH^\omega=W_\infty^{r+1}$.

Пусть далее

$$B_{r,\alpha}(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}m^{-r}\cos(mt-\pi\alpha/2),\quad \alpha,r\in\mathbb{R},\quad r>0.$$

Тогда $W_p^{r,\alpha}:=B_{r,\alpha}*F_p$. В частности, $W_p^{r,r}$ — класс функций f, у которых r-я производная в смысле Вейля лежит в F_p. Кроме того, $\widetilde{W}_p^r:=W_p^{r,r-1}$ — класс функций $\tilde{f}$, тригонометрически сопряженных с функциями из класса W_p^r.

Как классы сверток можно рассматривать также классы A_p^h, $h>0$, $p\in[1,\infty]$, функций, аналитически продолжимых в полосу $\{z:z=t+iu,$ $|u|<h\}$ и классы Γ_p^ρ, $\rho\in(0,1)$, $p\in[1,\infty]$,— следов гармонических в единичном круге функций на окружности радиуса ρ (см., например, [4, с. 185]).

В виде $K*F$ можно рассматривать и классы функций, определяемых с помощью более общих, чем d^r/dx^r, дифференциальных операторов $\mathcal{P}(d/dx)$ с постоянными коэффициентами, которые ниже обозначаются $W^{(\mathcal{P})}F$.

В дальнейшем $\mathcal{T}_{2n-1}$ — множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше чем $n-1$, а $S_{2n,r}$ — множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, минимального дефекта, с узлами в точках $\nu\pi/n$, $\nu \in \mathbb{Z}$, т. е. множество функций $s(t)$ вида

$$s(t) = a + \sum_{\nu=1}^{2n} a_\nu B_{r+1}\left(t - \frac{\nu\pi}{n}\right), \quad a, a_1, \ldots, a_{2n} \in \mathbb{R}, \quad \sum_{\nu=1}^{2n} a_\nu = 0.$$

2. Наилучшие и наилучшие линейные приближения классов сверток тригонометрическими полиномами в метриках C и L_1. Первые точные результаты по приближению (в равномерной метрике) классов периодических функций тригонометрическими полиномами были получены в 1936-1937 гг. Ж. Фаваром [5], а также Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном [6]. Ими, в частности, было показано, что для $n, r \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{E}(W_\infty^r, \mathscr{T}_{2n-1})_\infty = E(W_\infty^r, \mathscr{T}_{2n-1})_\infty = E(B_r, \mathscr{T}_{2n-1})_1 = \|\varphi_{n,r}\|_\infty \tag{6}$$

(здесь и ниже $\varphi_{n,r} := B_r * \varphi_n$ — r-й периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_n(x) = \operatorname{sign}\cos nx$) и получены аналогичные равенства для классов сопряженных функций.

Исследования в этом направлении еще в 30-х годах продолжили Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн, Б. Надь. Их результаты изложены в монографиях [7, 8]. Там же приведены и некоторые смежные результаты, в частности, по аппроксимации целыми функциями экспоненциального типа классов функций, заданных на всей числовой оси. Б. Надь [8, с. 91, 92] установил в терминах коэффициентов Фурье ядра K удобные достаточные условия, обеспечивающие справедливость соотношений

$$E(K*F_\infty, \mathscr{T}_{2n-1})_\infty = E(K, \mathscr{T}_{2n-1})_1 = \|K*\varphi_n\|_\infty. \tag{7}$$

В 1946 г. С. М. Никольский [9] начал исследование аналогичных вопросов в пространстве L_1 и построил общую теорию наилучших и наилучших линейных приближений классов $K*F_\infty$ и $K*F_1$, тригонометрическими полиномами в метриках C и L_1 соответственно.

Будем говорить, что ядро K удовлетворяет условию N_n^*, если существуют полином $T_n^* \in \mathscr{T}_{2n-1}$ и точка $\theta \in [0, \pi/n]$ такие, что $(K(t) - T_n^*(t)) \times \varphi_n(t - \theta) \geqslant 0$ почти всюду. Отметим, что для перечисленных выше ядер условие N_n^* выполнено при всех $n \in \mathbb{N}$.

С. М. Никольский доказал, что если ядро K удовлетворяет условию N_n^*, то

$$E(K*F_\infty, \mathscr{T}_{2n-1})_\infty = \mathscr{E}(K*F_\infty, \mathscr{T}_{2n-1})_\infty = E(K*F_1, \mathscr{T}_{2n-1})_1 =$$
$$= \mathscr{E}(K*F_1, \mathscr{T}_{2n-1})_1 = E(K, \mathscr{T}_{2n-1})_1 = \|K*\varphi_n\|_\infty. \tag{8}$$

В этих исследованиях С. М. Никольский впервые применил для точного решения задач приближения классов функций соотношение двойственности, которое он сформулировал в следующем виде.

Пусть X^* — пространство, сопряженное с линейным нормированным пространством X, и $\mathfrak{N}$ — конечномерное подпространство в X. Тогда для любого $x \in X$

$$E(x, \mathfrak{N})_X = \sup\{F(x) : F \in X^*, \ \|F\|_{X^*} \leqslant 1, \ F \perp \mathfrak{N}\}.$$

Это и подобные соотношения (см., например, [10], гл. 2) оказались очень полезными при решении многих экстремальных задач теории приближений.

Много усилий было затрачено на то, чтобы получить аналогичные (6) результаты для классов $W_p^{r,\alpha}$, $p = 1, \infty$, при всех $r, \alpha \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Трудность заключалась в проверке условия N_n^* для функций $B_{r,\alpha}(t)$. Сначала В. К. Дзядык [11] решил эту задачу при $r = \alpha \in (0, 1)$. Затем С. Б. Стечкин [12] рассмотрел случай $r \in (0, 1)$, $\alpha \in (r, 2 - r)$. Полностью для классов $W_p^{r,\alpha}$, $p = 1, \infty$, задача решена в работах В. К. Дзядыка и Сунь Юн-шена. Наиболее весомый вклад здесь сделан В. К. Дзядыком, рассмотревшим и ядра более общего, чем $B_{r,\alpha}$, вида. Точные формулировки, история развития исследований и библиографические указания по этим вопросам содержатся в работе [13].

Для классов $W^{(\mathscr{P})} F_p$, $p = 1, \infty$, классов функций, определяемых ядрами, не увеличивающими осцилляцию, и некоторых подобных им классов справедливость соотношений (8) устанавливалась в работах Н. И. Ахиезера, М. Г. Крейна (см. [7, с. 383]), К. И. Бабенко [14], А. Пинкуса [15].

3. Приближение классов функций, определяемых модулями непрерывности. Описанные выше результаты в основном были связаны с наилучшими и наилучшими линейными приближениями (совпадающими с наилучшими) классов $K{*}F$, где в качестве F фигурировали единичные шары в L_∞ и L_1, а совокупность вовлекаемых в рассмотрение ядер постепенно расширялась. Дальнейший прогресс в исследовании задач приближения функциональных классов $K{*}F$ был связан с расширением запаса множеств F.

В 1936 г. Ж. Фавар поставил задачу о наилучшем приближении тригонометрическими полиномами классов W^rH^ω, $r = 0, 1, \ldots$, $W^0 H^\omega = H^\omega$, задаваемых с помощью модулей непрерывности старших производных $\omega(f^{(r)}, t)$. Самим Ж. Фаваром и другими авторами предпринимались попытки решения этой задачи, однако окончательных результатов получено не было даже при $r = 0$. Методы, разработанные для классов $K{*}F_\infty$, для решения этой задачи оказались непригодными, поскольку, как выяснилось позже, наилучшее приближение класса W^rH^ω не может быть реализовано линейными методами. Так [10, с. 213], наилучшее приближение класса H^ω полиномами из $\mathscr{T}_{2n-1}$ реализуется линейным методом тогда и только тогда, когда $\omega(t)$ линеен на $[0, \pi/n]$. В связи с этим потребовались новые нетрадиционные подходы. Такие новые подходы были разработаны Н. П. Корнейчуком, который в 1961 г. [2] решил задачу Фавара для классов H^ω с произвольным выпуклым вверх модулем непрерывности $\omega(t)$. В дальнейшем [16, 17] (см. также [10], гл. 7) он решил эту задачу для классов W^rH^ω при всех $r = 1, 2, \ldots$. Результаты, полученные Н. П. Корнейчуком, можно сформулировать следующим образом.

Если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то для любых $n \in \mathbb{N}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ и $p = 1, \infty$ справедливо равенство

$$E(W^rH^\omega, \mathscr{T}_{2n-1})_p = \| f_{n,r} \|_p, \tag{9}$$

где $f_{n,0}(t) = f_{n,0}(\omega, t)$ есть нечетная, $2\pi/n$-периодическая функция, равная $0{,}5 \min\{\omega(2t), \omega(2\pi/n - 2t)\}$ для $t \in [0, \pi/n]$, и $f_{n,r}(t)$ — r-й периодический интеграл от $f_{n,0}(t)$, имеющий нулевое среднее значение на периоде ($f_{n,r} = B_r{*}f_{n,0}$).

Для классов H^ω этот результат был получен следующим образом.

С помощью тонких рассуждений Н. П. Корнейчук доказал, что при любом $M > 0$

$$E(H^\omega, MW^1_\infty)_\infty \leqslant \frac{1}{2} \max_{t>0} [\omega(t) - Mt], \tag{10}$$

а затем при подходящем выборе M в неравенстве

$$E(H^\omega, \mathscr{T}_{2n-1})_\infty \leqslant E(H^\omega, MW^1_\infty) + ME(W^1_\infty, \mathscr{T}_{2n-1})_\infty$$

с учетом результата Фавара (6) установил справедливость (9) при $r = 0$. Это был первый случай, когда метод промежуточного приближения позволил получить точный результат. С помощью метода промежуточного приближения Н. П. Корнейчуком еще в 60-х годах были найдены наилучшие приближения классов W^rH^ω с $r = 1, 2, 3$.

Изящное доказательство неравенства (10), основанное на других идеях, впоследствии было дано А. В. Покровским [18]. Я. Петре [19] указал на возможность доказательства (9) при $r = 0$ и $p = \infty$ с помощью теории интерполяционных пространств. В 1970 г. Н. П. Корнейчук [16] (см. также [10], гл. 7) разработал новый метод, позволивший доказать соотношения (9) в полном объеме и оказавшийся чрезвычайно полезным для решения других экстремальных задач. Основу этого метода составляют следующие 3 момента.

1. Теоремы двойственности (см. [10], гл. 2), сводящие задачу наилучшего приближения к оценке для $f \in H^{\omega}$ и $g\,(g^{(r)} \perp \mathscr{T}_{2n-1})$ интегралов вида $\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dg(t)$.

2. Понятие Σ-перестановки $\Phi(g, t)$ функции g [10, с. 144—149], позволяющее получать [10, с. 199] оценки типа

$$\left|\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dg(t)\right| \leqslant -\int\limits_0^{2\pi} \omega(f, t)\,d\Phi(g, t). \tag{11}$$

Как само понятие Σ-перестановки, так и неравенство (11) оказались основным инструментом точного (и асимптотически точного) решения практически всех экстремальных задач на классах W^rH^{ω}.

3. Теоремы сравнения Σ-перестановок функций. Основным здесь является следующее утверждение Н. П. Корнейчука [16]. Для любой функции $g \perp \mathscr{T}_{2n-1}$, у которой $g^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $\bigvee\limits_0^{2\pi}(g^{(r)}) \leqslant 1$, выполняется неравенство

$$\int\limits_0^t \Phi(g, u)\,du \leqslant \frac{1}{4n}\int\limits_0^t \Phi(\varphi_{n,r}, u)\,du, \quad t \in [0, 2\pi], \tag{12}$$

и для любой функции $g \in W^r_{\infty}$ такой, что $g \perp \mathscr{T}_{2n-1}$, выполняется неравенство

$$\int\limits_0^t \Phi(g, u)\,du \leqslant \int\limits_0^t \Phi(\varphi_{n,r}, u)\,du, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{13}$$

В [17; 20; 10, гл. 6] доказаны более общие теоремы сравнения Σ-перестановок.

При доказательстве неравенства (13) существенно использовалась теорема сравнения А. Н. Колмогорова [21], с помощью которой Н. П. Корнейчук [10, с. 168] доказал следующее неравенство для равноизмеримых перестановок $P(|g|, t)$ (перестановок Харди) функций $g \in W^r_{\infty}$, $g \perp \mathscr{T}_{2n-1}$:

$$\int\limits_0^t P(|g|, u)\,du \leqslant \int\limits_0^t P(|\varphi_{n,r}|, u)\,du, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{14}$$

Начиная с 60-х годов в теории аппроксимации начали активно изучаться задачи приближения функциональных классов сплайнами. В. М. Тихомиров [22, 23, с. 139] вычислил величину $E(W^r_{\infty}, S_{2n,\,r-1})_{\infty}$, где $S_{2n,\,r-1}$ — множество всех сплайн-функций минимального дефекта, порядка $r-1$ с $2n$ равноотстоящими узлами. В. М. Тихомиров показал, что наилучшее приближение в этом случае реализует интерполяционные сплайны. Задача наилучшего приближения сплайнами из $S_{2n,\,r}$ классов W^rH^{ω} ($\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности) в метриках C и L_1 была решена Н. П. Корнейчуком. Изложение полученных результатов и дальнейшие ссылки можно найти в [3, 23—25]. Решая эту задачу, Н. П. Корнейчук естественно получил сначала необходимые модификации неравенств (12)—(14). В дальнейшем эти неравенства обобщались в различных направлениях и плодотворно применялись при решении многих экстремальных задач теории приближений самим Н. П. Корнейчуком и его учениками. В частности, в результате этих исследований выкристаллизовалась следующая формулировка теоремы сравнения производных функций и равноизмеримых перестановок функций [26; 24, § 3.2].

Пусть заданы функции f и g, определенные и непрерывно дифференцируемые на всей числовой оси, причем функция f — T-периодическая ($T > 0$) и для некоторого $d < c < d + T$ интервалы (d, c) и $(c, d + T)$ являются интервалами строгой монотонности f. Предположим, что $\min_t f(t) < g(t) < \max_t f(t)$, и для любого τ разность $g(\cdot + \tau) - f(\cdot)$ имеет на периоде функции f ровно 2 перемены знака. Тогда, если $a, b \in \mathbb{R}$ таковы, что $g(a) = f(b)$ и $g'(a) f'(b) \geqslant 0$, то $|g'(a)| \leqslant |f'(b)|$, а если, кроме того, g также T-периодична и вместе с f и g указанными свойствами обладают и функции f' и g', то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int_0^t P((g' - \lambda)_{\pm}, u)\, du \leqslant \int_0^t P((f' - \lambda)_{\pm}, u)\, du, \quad t \in (0, T), \tag{15}$$

где $f_{\pm}(t) = \max\{\pm f(t), 0\}$.

Дальнейшее развитие исследований по наилучшему приближению классов $W^r H^\omega = B_r * H^\omega$ состояло в рассмотрении задач приближения классов $K * H^\omega$ с произвольным не увеличивающим осцилляцию ядром K: В. Ф. Бабенко [27] установил, что если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, $\mathfrak{N}$ есть $\mathscr{T}_{2n-1}$ или $K * S_{2n,\,r}$, $r = 0, 1, \ldots$, то

$$E(K * H^\omega, \mathfrak{N})_\infty = \frac{1}{4n} \int_0^{2\pi} \Phi(K(- \cdot) * \varphi_n, t)\, \omega'(t)\, dt \tag{16}$$

и

$$E(K * H^\omega, \mathfrak{N})_1 = \int_0^{2\pi} \Phi(B_1 * K(- \cdot) * \varphi_n, t)\, \omega'(t)\, dt. \tag{17}$$

Некоторые результаты по наилучшим L_1-приближениям классов $W^{(\mathscr{P})} H^\omega$ независимо получены Сунь Юн-шеном и Хуанг Да-реном.

4. Некоторые применения теоремы сравнения. Теорема сравнения производных и перестановок, сформулированная в предыдущем пункте, представляет интерес в связи с многообразием ситуаций, когда выполняются ее условия, что не только позволяет решать с ее помощью экстремальные задачи на классах $W^r H^\omega$, но и дает возможность получать результаты в других направлениях. Рассмотрим некоторые из них.

В 1939 г. А. Н. Колмогоров [21] доказал, что для любой функции $f \in L_\infty^r$ выполняется точное на L_∞^r неравенство

$$\| f^{(k)} \|_\infty \leqslant \frac{\| \varphi_{1,r-k} \|_\infty}{\| \varphi_{1,r} \|_\infty^{1-k/r}} \| f \|_\infty^{k/r} \| f^{(r)} \|_\infty^{1-k/r}, \quad 1 \leqslant k < r. \tag{18}$$

Как раз при доказательстве этого неравенства А. Н. Колмогоровым была доказана теорема сравнения производных, развитием которой является первая часть указанной общей теоремы.

Различные аналоги неравенства Колмогорова для функций, заданных на всей числовой оси (отметим, что А. Н. Колмогоров доказал (18) для функций, заданных на всей оси) и полуоси, и их приложения к ряду задач теории функций даны Г. Харди, Дж. Литлвудом и Д. Полиа, Л. Хермандером, И. Стейном, В. Н. Габушиным, В. И. Бердышевым, Л. В. Тайковым, С. Б. Стечкиным, В. В. Арестовым, Ю. Н. Субботиным, Н. П. Купцовым, Ю. И. Любичем, А. П. Буслаевым, Г. Г. Магарил-Ильяевым и др. Подробнее с этой проблематикой можно познакомиться, например, по обзору В. М. Тихомирова [28]. Конкретные варианты теоремы сравнения позволили получить ряд интересных неравенств вида (18) в периодическом случае. Так, А. А. Лигун [29] доказал, что при всех $p \in [1, \infty)$ и $1 \leqslant k < r$ справедливо неравенство

$$\| f^{(k)} \|_p \leqslant \| \varphi_{1,r-k} \|_p \| \varphi_{1,r} \|_\infty^{k/r-1} \| f \|_\infty^{k/r} \| f^{(r)} \|_\infty^{1-k/r}. \tag{19}$$

В. Ф. Бабенко [30] установил следующее неравенство для производных сопряженной функции:

$$\| \tilde{f}^{(k)} \|_1 \leqslant \| \tilde{\varphi}_{1,r-k} \|_1 \| \varphi_{1,r} \|_\infty^{k/r-1} \| f \|_\infty^{k/r} \| f^{(r)} \|_\infty^{1-k/r}, \quad 1 \leqslant k < r, \tag{20}$$

которое позволило доказать, что для любого $r \in \mathbb{N}$ и $\mu \geqslant r-1$ выполняются равенства

$$E(\tilde{W}^r_\infty, \mathcal{T}_{2n-1})_1 = E(W^r_\infty, S_{2n,\mu})_1 = \|\tilde{\varphi}_{n,r}\|_1. \tag{21}$$

Подробнее с методикой применения неравенств вида (18)—(20) к решению экстремальных задач теории приближения можно ознакомиться по монографиям [24, 25].

Теорема сравнения производных и перестановок позволяет легко вывести ряд неравенств типа неравенств Бернштейна для тригонометрических полиномов и сплайнов. Например, на этом пути А. А. Лигун установил неравенство [24, с. 93]

$$\frac{\|s^{(k)}\|_p}{\|\varphi_{1,r-k}\|_p} \leqslant n^k \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}, \quad s \in S_{2n,r}, \quad 1 \leqslant k < r, \quad p \in [1, \infty].$$

Такие неравенства, методику их получения (часто сводящуюся к проверке условий теоремы сравнения) и библиографические указания можно найти в монографиях [7, 8, 23, 24] и статьях [31, 32].

Мы уже отмечали, что равенство (9) при $r = 0$ и $p = \infty$ (а также при $r = 1, 2, 3$) первоначально было доказано с помощью промежуточного приближения класса H^ω классом MW^1_∞ (и класса W^rH^ω, $r = 1, 2, 3$, классом MW^{r+1}_∞). В 1972 г. Н. П. Корнейчук [17] дал полностью (при всех $r = 0, 1, 2, \ldots$) решение задачи приближения класса W^rH^ω классом MW^{r+1}_∞. Он доказал, что для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ при всех $r = 0, 1, \ldots$ и $M > 0$ выполняется неравенство

$$E(W^rH^\omega, MW^{r+1}_\infty)_\infty \leqslant \sup_{b>0} \frac{1}{4} b^r \int_0^{\pi b} \Phi\left(\varphi_{1,r} \frac{t}{b}\right)(\omega'(t) - M)\, dt. \tag{22}$$

Позже Н. П. Корнейчук и А. А. Лигун [33] получили аналогичный результат для приближения в метрике L_1. Эти результаты позволили, в частности, получить новое доказательство равенств (9) и их аналогов для сплайнов. Однако они имеют и другие интересные приложения. Так, с помощью неравенства (22) нетрудно установить [25, с. 155], что для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$, любого подпространства и любого $r = 0, 1, \ldots$ выполняется неравенство

$$E(W^rH^\omega, \mathfrak{N})_\infty \leqslant \frac{1}{4} b^r_\mu \int_0^{b_\mu \pi} \Phi\left(\varphi_{1,r} \frac{t}{b_\mu}\right)\omega'(t)\, dt, \tag{23}$$

где $\mu \geqslant r+1$ и $b_\mu = (E(W^\mu_\infty, \mathfrak{N})_\infty / \|\varphi_{1,\mu}\|_\infty)^{1/\mu}$.

Используя (23) и его аналог в пространстве L_1 А. А. Лигун [29] получил равенство, аналогичное (9), для сплайнов любого порядка $\mu \geqslant r+1$.

5. Наилучшие L_1-приближения классов функций, определяемых с помощью перестановочно инвариантных множеств. Отличное от описанного выше расширение совокупности множеств в задачах приближения классов $K * F$ было начато Л. В. Тайковым [34], который нашел наилучшие L_1-приближения тригонометрическими полиномами классов W^rF в случае, когда F — единичный шар в пространстве Орлича и, в частности, когда $F = F_p$, $p \in [1, \infty]$ (случай $p = \infty$ независимо исследован С. П. Туровец). При этом Л. В. Тайков использовал тонкие соображения, основанные на теореме Колмогорова о сравнении производных. В дальнейшем А. А. Лигун [29] получил аналогичные результаты для наилучших приближений сплайнами порядка $\mu \geqslant r-1$. Н. П. Корнейчук [35] (см. также [23, с. 197]) показал, что для $\mu = r-1$ наилучшее приближение этих классов реализует интерполяционные сплайны.

Дальнейшее развитие эти результаты получили в работах В. Ф. Бабенко [26, 36]. Итог этих исследований составляет следующее утверждение. Пусть для $f \in L_1$

$$\Pi(f, t) = P(f_+, t) - P(f_-, 2\pi - t).$$

Множество $F \subset L_1$ назовем перестановочно инвариантным, если из того, что $f \in F$ и $\Pi(g) = \Pi(f)$, следует $g \in F$.

Если $n \in \mathbb{N}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$; K — произвольное не увеличивающее осцилляцию ядро (CVD-ядро), F — произвольное перестановочно инвариантное множество и $\mathfrak{N}$ есть $\mathcal{T}_{2n-1}$ или $K * S_{2n,r}$, то

$$E(K * F, \mathfrak{N})_1 = \sup_{g \in F, g \perp \theta} \int_0^{2\pi} \Pi(K * \varphi_n, t)\, \Pi(g, t)\, dt. \tag{24}$$

Основную роль при доказательстве этого результата играют неравенства для перестановок типа (15), методы доказательства которых выкристаллизовались благодаря работам Н. П. Корнейчука и Л. В. Тайкова.

Подход, основанный на теоремах сравнения перестановок, и рассмотрение в этих задачах произвольных перестановочно инвариантных множеств позволили получить и ряд других результатов. Так, А. А. Лигун [29] доказал, что при $1 \leqslant k < r$ для любого конечномерного подпространства $\mathfrak{N} \subset \subset L_1$

$$E(W_p^k, \mathfrak{N})_1 \leqslant \| \varphi_{1,k} \|_{p'} \| \varphi_{1,r} \|_\infty^{-k/r} E(W_1^r, \mathfrak{N})_1^{k/r}. \tag{25}$$

В случае $p = \infty$ В. Ф. Бабенко [30] получил аналогичный результат для классов сопряженных функций. Соотношения (21) могут быть получены [36] с учетом того, что (24) справедливо для любого перестановочно инвариантного множества F.

6. Приближения с ограничениями. В 50-х годах Т. Ганелиусом [37] были получены первые точные результаты по наилучшим односторонним приближениям классов периодических функций: найдены наилучшие односторонние приближения тригонометрическими полиномами классов W_1^r в метрике L_1. Впоследствии в работах Н. И. Ахиезера, В. Г. Доронина, А. А. Лигуна и других авторов для большинства известных точных результатов по наилучшим L_1-приближениям классов периодических функций были получены их аналоги, относящиеся к односторонним приближениям. В. Г. Дорониным и А. А. Лигуном [25, 38] найдены, в частности, наилучшие односторонние L_1-приближения классов W_r^p, $r \in \mathbb{N}$, $p \in (1, \infty]$, и $W^r H^\omega$ (r — четное, $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности) тригонометрическими полиномами и сплайнами. Общую точку зрения на задачи наилучшего и наилучшего одностороннего приближения предложил В. Ф. Бабенко [39].

Наилучшие приближения снизу (+) и сверху (—) функции $f \in L_p$ множеством $\mathfrak{N} \subset L_p$ в метрике L_p — это величины

$$E^{\pm}(f, \mathfrak{N})_p = \inf \{ \| f - u \|_p : u \in \mathfrak{N},\ \pm u \leqslant \pm f \ \text{п. в.} \}.$$

Наилучшее (α, β)-приближения $(\alpha, \beta > 0)$ функции f множеством $\mathfrak{N}$ в метрике L_p определяется следующим образом:

$$E(f, \mathfrak{N})_{p;\alpha,\beta} = \inf \{ \| \alpha (f - u)_+ + \beta (f - u)_- \|_p : u \in \mathfrak{N} \}.$$

Аналогично (2) определяются наилучшие односторонние и наилучшие (α, β)-приближения классов функций, которые будем обозначать через $E^{\pm}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_p$ и $E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_{p;\,\alpha,\beta}$ соответственно.

Ясно, что при $\alpha = \beta = 1$ наилучшие (α, β)-приближения функции f и класса $\mathfrak{M}$ совпадают с обычными наилучшими приближениями. Вместе с тем [39] (см. также [24], § 1.4), если аппроксимирующее множество $\mathfrak{N}$ локально компактно, то в пределе при $\alpha \to \infty$ или $\beta \to \infty$ получаем соответственно наилучшие приближения сверху и снизу функции f и класса $\mathfrak{M}$ (учитывая это обстоятельство, ниже для α или β мы допускаем значение $+\infty$). Таким образом, семейство задач наилучшего (α, β)-приближения «интерполирует» задачи наилучшего и наилучшего одностороннего приближения, что и позволяет, в частности, изучать их с удобной общей точки зрения.

Эти задачи можно рассматривать также как задачи приближения в ситуации, когда допускается нарушение ограничений, но в меру погрешности приближения введен «штраф», учитывающий степень их нарушения.

Перейдем к изложению результатов в этом направлении. Прежде всего отметим, что разработана общая теория наилучших односторонних и, более общо, наилучших (α, β)-приближений классов $K*F_1$ тригонометрическими полиномами в пространстве L_1, и показано, что практически все конкретные ядра, рассматривающиеся в теории приближений, удовлетворяют ее условиям. Подробное изложение результатов о наилучших односторонних приближениях см. в [24, 25]. Результаты о наилучших (α, β)-приближениях изложены в [26], где, в частности, получен полный аналог соотношений (8) С. М. Никольского. Как и у С. М. Никольского, основой для доказательства этих результатов являются важные и при исследовании других задач теоремы двойственности

В случае, когда ядро K не увеличивает осцилляцию, F — произвольное перестановочно инвариантное множество, $\mathfrak{N}$ — $\mathcal{T}_{2n-1}$ или $K*S_{2n,\,r}$, $r = 0, 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$ и α, $\beta \in (0, \infty]$ справедливо [26] обобщающее (21) соотношение

$$E(K*F, \mathfrak{N})_{1;\alpha,\beta} = \sup_{g\in F,\, g\perp\theta} \int_0^{2\pi} \Pi(K-\cdot)*\varphi_{n;\alpha,\beta}, t)\,\Pi(g, t)\,dt, \qquad (26)$$

где $\varphi_{n;\alpha,\beta}(t)$ для конечных α и β — это четная $2\pi/n$-периодическая функция, равная α для $t\in[0, \beta\pi/(n(\alpha+\beta)))$ и $-\beta$ для $t\in[\beta\pi/(n(\alpha+\beta)), \pi/n]$, а когда $\max(\alpha, \beta) = +\infty$ — функция $K(-\cdot)*\varphi_{n;\alpha,\beta}$ определяется с помощью предельного перехода (впрочем легко дать и прямое определение ее).

Отметим, что многие результаты по наилучшим односторонним приближениям классов W_p^r подробно изложены в [25]. Некоторые результаты по односторонним приближениям классов $W^{(\mathscr{P})}F_p$ получены Сунь Юн-шеном и Хуанг Да-реном.

Аналогичные (9) и (17) результаты по наилучшим односторонним и наилучшим (α, β)-приближениям классов W^rH^ω, $r = 2, 4, \ldots$, и более общих классов $K*H^\omega$ ($K \in CVD$ — четная функция) см. в [25], гл. 7 и [27].

При получении указанных результатов наряду с теоремами двойственности существенную роль сыграли разработанные Н. П. Корнейчуком методы сравнения перестановок и Σ-перестановок.

7. Точные значения поперечников классов периодических функций. Как отмечалось, задачу о поперечниках сформулировал в 1936 г. А. Н. Колмогоров [1]. Им же были получены первые точные результаты — найдены величины $d_n(W_2^r, L_2) = d_n'(W_2^r, L_2)$, и показано, что экстремальными подпространствами являются подпространства тригонометрических полиномов.

В дальнейшем многие математики активно исследовали задачу вычисления поперечников классов W_p^r в пространстве L_q при различных соотношениях между p и q. В 1960 г. В. М. Тихомиров [22] решил ее при $p = q = \infty$. При этом им было доказано, что наряду с тригонометрическими полиномами колмогоровские и линейные поперечники реализуют интерполяционные сплайны. Поперечники $d_{2n-1}(W_1^r, L_1)$ вычислены независимо Ю. И. Маковозом и Ю. Н. Субботиным [40], поперечники $d_{2n-1}(W_\infty^r, L_1)$ найдены Ю. И. Маковозом. Величины $d_{2n}(W_1^r, L_1)$ и $d_{2n}(W_\infty^r, L_1)$ были найдены В. И. Рубаном (см. [10], § 10.5). При $p = \infty$, $q\in(1, \infty)$ и $p\in(1, \infty)$, $q = 1$ поперечники $d_n(W_p^r, L_q)$ независимо вычислены А. А. Лигуном, Ю. И. Маковозом и А. Пинкусом (см., например, [25], § 10.3 и [15]).

В развитие этих исследований В. Ф. Бабенко [36] решил задачу о поперечниках в L_1 для классов W^rF с произвольным перестановочно инвариантным множеством F.

Точные значения поперечников $d_n(W^r_p, L_q)$ при всех $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ получены А. П. Буслаевым и В. М. Тихомировым и анонсированы в работе [41].

Другой цикл точных результатов связан с поперечниками классов W^rH^ω с выпуклым вверх модулем непрерывности $\omega(t)$. Оценки сверху здесь следуют из результатов Н. П. Корнейчука о наилучших приближениях этих классов тригонометрическими полиномами и сплайнами в метриках C и L_1 (см. (9)). Совпадающие с ними оценки снизу поперечников $d_n(W^rH^\omega, C)$ при нечетных n получены Н. П. Корнейчуком, а при четных n — В. И. Рубаном [42] (см. также [10], § 10.4). Точные оценки снизу для поперечников $d_n(W^rH^\omega, L_1)$ найдены В. П. Моторным и В. И. Рубаном [43] при нечетных n и В. И. Рубаном [44] при четных n. Н. П. Корнейчуком найдены точные значения колмогоровских поперечников классов H^ω и W^1H^ω в пространстве L_p при всех $p \in [1, \infty)$ и линейные поперечники классов H^ω в пространстве L_p при $p \in [1, 3]$. Практически все перечисленные результаты о поперечниках подробно изложены в монографиях [4, 10, 23—25, 45].

Направление, связанное с вычислением точных значений поперечников, получило дальнейшее развитие в работах А. Пинкуса [15], В. Т. Шевалдина [46], В. Ф. Бабенко [47] и других, и связано с переходом от классов дифференцируемых функций к более общим классам сверток с ядрами, не увеличивающими осцилляцию, и классам типа $W^{(\mathscr{P})}F$. Так, В. Ф. Бабенко получил поперечники в пространстве L_1 классов $K*F$, где $K \in CVD$, а F — произвольное перестаночно инвариантное множество.

Практически во всех случаях, когда найдены точные значения поперечников, оценки сверху для них следуют из результатов о наилучших приближениях соответствующих классов функций тригонометрическими полиномами, сплайнами или обобщенными сплайнами, которые достаточно подробно рассмотрены выше.

Первый эффективный метод получения оценок снизу для поперечников разработан В. М. Тихомировым [22]. Идея этого метода состоит в том, чтобы при оценке n-мерных поперечников установить, что в рассматриваемом функциональном классе содержится $(n+1)$-мерный шар достаточно большого радиуса, и затем воспользоваться известной теоремой о поперечнике шара (см., например, [10, с. 255]). При этом, как правило, в качестве таких шаров использовались шары в подпространстве сплайнов или их обобщений или тригонометрических полиномов. В ряде важных случаев этот метод позволил получить нужные оценки для поперечников (о некоторых точных результатах, полученных на этом пути, см. [4, 10, 23—25]).

Теорему о поперечнике шара сравнительно просто можно доказать с помощью теоремы Борсука об антиподах (см. [10, с. 255—257]). В ряде случаев эффективной оказалась схема рассуждений, основанная на непосредственном использовании теоремы Борсука. С помощью этой теоремы устанавливается существование совершенных (идеальных) сплайнов (определение см., например, в [23, с. 8]) или их аналогов (например, моносплайнов), обладающих некоторыми специальными свойствами, например, ортогональных подпространству заданной размерности, что позволяет свести задачу оценки снизу поперечников к исследованию экстремальных свойств совершенных сплайнов.

При получении точных оценок снизу для четных поперечников классов периодических функций доказательство существования совершенных сплайнов и их аналогов с заданными свойствами наталкивается на трудности, методы преодоления которых разработаны Н. П. Корнейчуком [23, 24] и В. И. Рубаном [42, 44].

Задача исследования экстремальных свойств совершенных сплайнов и их аналогов естественно возникает не только при оценках поперечников, но и во многих других вопросах теории функций, и этой проблематике были посвящены работы многих авторов. При этом использовались, в основном, вариационные методы (см., например, [41, 45]) и методы, основанные на сравнении Σ-перестановок Н. П. Корнейчука [24, 25, 43]. Полученные результаты и их приложения к оптимизации квадратурных формул достаточно полно изложены в монографии С. М. Никольского [48] с добавлением Н. П. Корнейчука, обзоре А. А. Женсыкбаева [49] и публикуемом в данном журнале обзоре В. П. Моторного [50].

При получении указанных выше результатов о поперечниках в той или иной степени использовалось то обстоятельство, что ядро, задающее класс функций, не увеличивает осцилляцию. Вместе с тем многие традиционные классы функций (классы $\tilde{W}_p^r$ сопряженных функций, классы Γ_p^ρ и др.) таковыми не являются, и в этой связи для них получено гораздо меньше точных результатов. Не останавливаясь на них подробно, укажем лишь на работы В. Ф. Бабенко [51], В. Т. Шевалдина [52] и А. Кушпеля [53], отметим еще, что в работе В. И. Рубана [44] найдены «односторонние» поперечники класса W_∞^r в пространстве L_1.

8. Точные неравенства типа Джексона. В 1911 г. Д. Джексон [54] доказал существование абсолютной константы $\varkappa > 0$ такой, что для любой функции $f \in C$ выполняется неравенство

$$E(f, \mathscr{T}_{2n-1})_\infty \leqslant \varkappa\omega\left(f, \frac{1}{n}\right). \tag{27}$$

В дальнейшем этот результат обобщался в различных направлениях и было получено большое число принципиальных результатов о связи аппроксимационных и дифференциально-разностных характеристик функций.

Отметим лишь те исследования, которые связаны с поиском точных констант в неравенствах типа (27) для наилучших приближений тригонометрическими полиномами.

Первый результат в этом направлении получен Н. П. Корнейчуком [55]. Для формулировки этого и других результатов введем следующие обозначения. Пусть $\mathfrak{N} \subset L_p$ — произвольное множество и

$$\varkappa_r(\mathfrak{N}, \delta)_p = \sup\{E(f, \mathfrak{N})_p/\omega(f^{(r)}, \delta)_p : f^{(r)} \in L_p, f \not\equiv \mathrm{const}\}, \tag{28}$$

где

$$\omega(f, \delta)_p = \sup\{\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p : |h| \leqslant \delta\}$$

— модуль непрерывности функции $f \in L_p$.

В 1962 г. Н. П. Корнейчук показал, что

$$1 - \frac{1}{2n} \leqslant \varkappa_0\left(\mathscr{T}_{2n-1}, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant 1. \tag{29}$$

Позже им были получены [56] аналогичные оценки величин $\varkappa_0(\mathscr{T}_{2n-1}, \delta)$ при $\delta = \frac{\pi}{kn}$, $k \in \mathbb{N}$. Аналоги неравенств (29) в случае, когда в (28) вместо модуля непрерывности используется модуль гладкости, получены В. В. Шалаевым [57].

В 1967 г. Н. И. Черных [58] доказал, что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\varkappa_0\left(\mathscr{T}_{2n-1}, \frac{\pi}{n}\right)_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{30}$$

Ряд обобщений (30) получили Н. И. Черных, В. Ю. Попов, Л. В. Тайков, А. Г. Бабенко и др.

Точные константы в неравенствах Джексона для дифференцируемых периодических функций были найдены В. В. Жуком ($r = 1$, $p = \infty$) и А. А. Лигуном ($r = 1, 3, 5, \ldots$; $p = 1, \infty$) (см. [59]):

$$\varkappa_r\left(\mathscr{T}_{2n-1}, \frac{\pi}{n}\right)_p = \|\varphi_{1,r}\|_\infty/(2n^r). \tag{31}$$

В дальнейшем А. А. Лигун [60] показал, что если

$$a_r = (E(W_\infty^r, \mathfrak{N})_\infty/\|\varphi_{1,r}\|_\infty)^{1/r},$$

то для $\delta > a_{r+1}\pi$, $r = 1, 3, \ldots$, и $\delta \geqslant 2a_{r+1}\pi$, $r = 0, 2, 4, \ldots$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2}\|\varphi_{1,r}\|_\infty a_r^r \leqslant \varkappa_r(\mathfrak{N}, \delta)_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi_{1,r}\|_\infty a_{r+1}^r.$$

Им же доказаны аналогичные неравенства в случае L_1-приближений и наилучших односторонних приближений в пространстве L_1 (если $\omega(f, t)$ — равномерный модуль непрерывности).

Отметим, что ряд интересных точных неравенств типа неравенств Джексона для приближения функций сплайнами содержится в монографиях [23—25].

Величины $\varkappa_r(\mathcal{T}_{2n-1}, \delta)_2$, $r>0$, исследовали А. Г. Бабенко, Л. В. Тайков, В. А. Юдин и А. А. Лигун. В частности, В. А. Юдин [61] при $n = 1$ и А. А. Лигун [62] при $n \geqslant 1$ установили связь этих величин с диофантовыми приближениями.

1. *Kolmogoroff A. H.* Uber die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Function Klassen // Ann. Math.— 1936.— **37**.—S. 107—110.
2. *Корнейчук Н. П.* О наилучшем равномерном приближении на некоторых классах непрерывных функций // Докл. АН СССР.— 1961.— **140**.— С. 748—751.
3. *Великин В. Л.*, *Назаренко Н. А.* Об исследованиях по экстремальным задачам сплайн-аппроксимации // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 1.— С. 34—59.
4. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976.— 303 с.
5. *Favard J.* Sur les meilleure procedes d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonometriques // Bull. sci math. Ser 2.— 1937. — **60**.—P. 209—224, 243—256.
6. *Ахиезер Н. И.*, *Крейн М. Г.* О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // Докл. АН СССР.— 1937.— **15**, № 3.— С. 107—112.
7. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации.— М. : Наука, 1965.— 407 с.
8. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.— М. : Физматгиз, 1960.— 624 с.
9. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1946.— **10**, № 3.— С. 207—256.
10. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
11. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющий ограниченную s-ю производную $(0 < s < 1)$ // Изв. АН СССР.— 1953.— **17**, № 2.— С. 135—162.
12. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР.— 1956.— **20**, № 5.— С. 643—748.
13. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейных комбинаций абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки.— 1974.— **16**, № 5.— С. 691—701.
14. *Бабенко К. И.* Лекции по теории приближений.— М. : Ин-т прикл. математики АН СССР, 1970.— 320 с.
15. *Pinkus A.* On n-width of periodic functions // J. Anal. Math.— 1979.— **35**.— P. 209—235.
16. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1971. — **35**, № 1. — С. 93—124.
17. *Корнейчук Н. П.* Неравенства для дифференцируемых функций и наилучшее приближение одного класса функций другими // Там же.— 1972.— **36**, № 2.— С. 423—434.
18. *Покровский А. В.* Об одной теореме А. Ф. Тимана // Функцион. анализ.— 1967.— **1**, № 3.— С. 93—94.
19. *Peetre J.* Exact interpolation theorems for Lipshitz continuous functions // Ric. mat.— 1969.— **180**.— P. 239—259.
20. *Korneičhuk N. P.* On extremal subspaces and approximation of periodic functions by splines of minimal defect // Anal. math.— 1975.— **1**, N 2.— P. 91—101.
21. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных на бесконечном интервале // Уч. зап. Моск. ун-та. Математика.— 1939.— Вып. 30, № 3.— С. 3—13.
22. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук.— 1960 — **15**, № 3.— С. 81—120.
23. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.— М. : Наука, 1984.— 352 с.
24. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения.— М. : Наука, 1987.— 424 с.
25. *Корнейчук Н. П.*, *Лигун А. А.*, *Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями.— Киев : Наук. думка, 1982.— 250 с.
26. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов сверток // Сиб. мат. журн.— 1987.— **28**, № 5.— С. 6—21.
27. *Бабенко В. Ф.* Приближения классов функций, задаваемых с помощью модуля непрерывности // Докл. АН СССР.— 1988.— **298**, № 6.— С. 1296—1299.
28. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники: Совр. пробл. математики // ВИНИТИ.— 1987.— **14**.— С. 103—270.
29. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bound of functionals // Anal. math.— 1976.— **2**, N 1.— P. 11—40.

30. *Бабенко В. Ф.* Точные неравенства для норм сопряженных функций и их применения // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 2.— С. 139—144.
31. *Стечкин С. Б.* Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР.— 1948.— **60**, № 9.— С. 1511—1514.
32. *Бабенко В. Ф.* Теоремы сравнения и неравенства типа неравенств Бернштейна // Теория приближений и смежные вопросы анализа и топологии.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 4—8.
33. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А.* О приближении класса классом и экстремальных подпространств в пространстве L_1 // Anal. math.— 1981.— **7**, N 2.— P. 107—119.
34. *Тайков Л. В.* О приближении в среднем некоторых классов периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1967.— **88**.— С. 61—70.
35. *Korneičhuk N. P.* Exact error bound of approximation by interpolating splines on L-metric on the classes W_p^r $(1 \leqslant p < \infty)$ of periodic functions // Anal. math.— 1977.— **3**, N 2.— P. 109—117.
36. *Babenko V. F.* Approximations, widths and optimal quadrature formule for classes of periodic functions with rearrangement invariant sets of derivatives // Ibid.— 1987.— **11**, N 4.— P. 15—28.
37. *Ganelius T.* On one sided approximation by trigonometrical polynomials // Math. scand.— 1956.— **4**.— P. 247—258.
38. *Доронин В. Г., Лигун А. А.* Наилучшее одностороннее приближение некоторых классов функций // Мат. заметки.— 1981.— **29**, № 3.— С. 431—454.
39. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 4.— С. 409—416.
40. *Субботин Ю. Н.* Поперечники класса W^rL в L $(0, 2\pi)$ и приближение сплайн-функциями // Мат. заметки.— 1970.— **7**, № 1.— с. 43—52.
41. *Буслаев А. П., Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы нелинейного анализа и теории приближений // Докл. АН СССР.— 1985.— **283**, № 1.— С. 13—18.
42. *Рубан В. И.* Четные поперечники классов W^rH^ω в пространстве $C_{2\pi}$ // Мат. заметки.— 1974.— **15**, № 3.— С. 387—392.
43. *Моторный В. П., Рубан В. И.* Поперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций в пространстве // Там же.— 1975.— **17**, № 4.— С. 531—543.
44. *Рубан В. И.* Поперечники множеств в пространствах периодических функций // Докл. АН СССР.— 1980.— **225**, № 1.— С. 34—35.
45. *Pinkus A.* n-widths in Approximation Theory.— Berlin: Springer, 1985.— 492 S.
46. *Шевалдин В. Т.* $\mathcal{L}$-сплайны и поперечники //Мат. заметки.— 1983.— **33**, № 5.— С. 735—744.
47. *Бабенко В. Ф.* Экстремальные задачи теории приближения и неравенства для перестановок // Докл. АН СССР.— 1986.— **290**, № 5.— С. 1033—1036.
48. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.— М. : Наука, 1988.— 252 с.
49. *Женсыкбаев А. А.* Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи мат. наук.— 1981.— **36**, № 4.— С. 107—159.
50. *Моторный В. П.* Исследования днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 1.— С. 18—33.
51. *Бабенко В. Ф.* О поперечниках некоторых классов сверток // Укр. мат. журн.—1983.— **35**, № 5.— С. 603—607.
52. *Шевалдин В. Т.* Оценки снизу поперечников классов истокообразно представимых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1989.— **189**.— С. 185—200.
53. *Кушпель А. К.* Точные оценки поперечников классов сверток // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1988.— **52**, № 6.— С. 1305—1322.
54. *Jackson D.* Uber die Genauigkeit des Annäherung statiger Functionen durch ganze gegebener Ordnung: Diss.— Gottingen, 1911.
55. *Корнейчук Н. П.* Точная константа в теореме Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР.— 1962.— **145**, № 3.— С. 514—515.
56. *Корнейчук Н. П.* О точной константе в неравенствах Джексона для непрерывных периодических функций // Мат. заметки.— 1982.— **32**, № 5.— С. 669—674.
57. *Шалаев В. В.* К вопросу о приближении непрерывных функций тригонометрическими полиномами // Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их прил.— Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1977.— С. 39—43.
58. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки.— 1967.— **2**, № 5.— С. 513—522.
59. *Лигун А. А.* О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки.— 1973.— **14**, № 1.— С. 21—30.
60. *Лигун А. А.* О точных константах в неравенствах типа Джексона // Докл. АН СССР.— 1985.— 283, № 1.— С. 34—38.
61. *Юдин В. А.* Диофантовы приближения в экстремальных задачах L_2 // Там же.— 1980.— **251**, № 1.— С. 54—57.
62. *Лигун А. А.* Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Мат. заметки.— 1988.— **43**, № 7.— С. 757—768.

Днепропетр. ун-т

Получено 07.08.89