УДК 517.51

О. Н. Литвин

Интерлинация функций двух переменных на $M(M \geqslant 2)$ прямых с сохранением класса $C^r(R^2)$

Впервые предложен алгоритм построения оператора $O_{Mn}(\{\varphi_{ks}\}; x, y)$ со свойствами

$$O_{Mn}(\{\varphi_{ks}\}; x, y) \in C^r(R^2 \setminus G), \quad G = \{\Gamma_k \cap \Gamma_l;\ k, l = 1, M;\ k \neq l\}, \quad r > n,$$

$$\left.\frac{\partial^p O_{Mn}(\{\varphi_{ks}\}; x, y)}{\partial \nu_q^p}\right|_{\Gamma_q} = \varphi_{qp}(x, y)\Big|_{\Gamma_q}, \quad q = \overline{1, M}; \quad p = \overline{0, n},$$

где $\{\Gamma_q\}$ — заданное семейство прямых произвольного расположения, ν_q — нормаль к Γ_q, $\varphi_{qp}(x, y) \in C^{r-p}(R^2)$, $p = \overline{0, n}$, — заданные функции. В основе статьи лежит интегральный аналог обобщенной формулы Даламбера, использующей усреднение не непосредственно от следов, а от некоторых повторных интегралов от этих следов. Дано интегральное представление остатка приближения функций $u(x, y) \in C^r(R^2)$ со свойствами операторами $O_{Mn}(\{\varphi_{ks}\}; x, y)$.

Вперше запропоновано алгоритм побудови оператора $O_{Mn}(\{\varphi_{ks}\}; x, y)$ з властивостям

$$O_{Mn}(\{\varphi_{ks}\}; x, y) \in C^r(R^2 \setminus G), \quad G = \{\Gamma_k \cap \Gamma_l;\ k, l = \overline{1, M};\ k \neq l\}, \quad r > n,$$

$$\left.\frac{\partial^p O_{Mn}(\{\varphi_{ks}\}; x, y)}{\partial \nu_q^p}\right|_{\Gamma_q} = \varphi_{qp}(x, y)\,|_{\Gamma_q}, \quad q = \overline{1, M}; \qquad \overline{0, n},$$

де $\{\Gamma_q\}$ — задана множина прямих довільного розташування, ν_q — нормаль до Γ_q, $\varphi_{qp}(x, y) \in C^{r-p}(R^2)$, $p = \overline{0, n}$, — задані функції. В основі статті лежить інтегральний аналог узагальненої формули Даламбера, яка використовує усереднення не безпосередньо від слідів, а від деяких повторних інтегралів від цих слідів. Дається інтегральне представлення залишку наближення функцій $u(x, y) \in C^r(R^2)$ з властивостями операторами $O_{Mn}(\{\varphi_{ks}\}; x, y)$.

1. Построим интегральный аналог обобщенной формулы Даламбера [1 — 3] на прямой $y = 0$. Пусть $u(x, y) \in C^r(R^2)$, $r > n \geqslant 0$, $K_{ns}(\beta)$, $s = \overline{0, n}$, — функции со свойствами $K_{ns}(\beta) \in C^r(R)$, $\operatorname{supp} K_{ns}(\beta) = [-1, 1]$,

$$\int_{-1}^{1} K_{ns}(\beta)\, \beta^p d\beta = \delta_{sp} = \begin{cases} 1, & s = p, \\ 0, & s \neq p, \end{cases} \quad 0 \leqslant s, \quad p \leqslant n. \tag{1}$$

Теорема 1. *Оператор* (*об иных операторах усреднения см.* [4 — 8])

$$\widetilde{\mathcal{D}}_n u(x, y) = \int_{-1}^{1} K_{n0}(\beta)\, u(x + \beta y, 0)\, d\beta + \sum_{s=1}^{n} \int_{-1}^{1} K_{ns}(\beta) \int_{0}^{x+\beta y} u^{(0,s)}(\xi, 0) \times$$

$$\times \frac{(x + \beta y - \xi)^{s-1}}{(s-1)!}\, d\xi d\beta \tag{2}$$

обладает свойствами ($C^r(R^k) = \{u(x_1, \ldots, x_k) \mid \partial^{p_1+\ldots+p_k} u / \partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_k^{p_k} \in C(R^k),$ $p_1 + \ldots + p_k \leqslant r\}$),

$$\widetilde{\mathcal{D}}_n u(x, y) \in C^r(R^2), \tag{3}$$

$$\left. \frac{\partial^s \widetilde{\mathcal{D}}_n u(x, y)}{\partial y^s} \right|_{y=0} = u^{(0,s)}(x, 0) \in C^{r-s}(R), \quad s = \overline{0, n}. \tag{4}$$

Доказательство. Свойство (1) следует из того, что каждая группа слагаемых в (2) принадлежит классу $C^r(R^2)$:

$$u(x + \beta y, 0) \in C^r(R^3), \quad u^{(0,s)}(x, 0) \in C^{r-s}(R) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{x+\beta y} u^{(0,s)}(\xi, 0) \frac{(x + \beta y - \xi)^{s-1}}{(s-1)!} d\xi \in C^r(R^3), \quad s = \overline{1, n}.$$

Доказательство свойств (4) проводится непосредственной проверкой.

Замечание 1. Для построения функций $K_{ns}(\beta)$ воспользуемся идеей Головкина [9], соответствующим образом ее видоизменив и обобщив. Пусть $\zeta(\beta) \in C^r(R)$, $r \geqslant n + 1$, — функция со свойствами

$$\zeta(\beta) > 0, \quad \beta \in (-1, 1), \quad \zeta(\beta) = 0, \quad |\beta| \geqslant 1, \quad \int_{-1}^{1} \zeta(\beta) \beta^p d\beta = \gamma_p \neq 0, \quad p = \overline{0, n}.$$

Тогда функции K_{ns} представим в виде

$$K_{ns}(\beta) = \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda_{nsk} \zeta(k\beta),$$

где неизвестные Λ_{nsk}, $s = \overline{0, n}$; $k = \overline{1, n+1}$, найдем, решив систему

$$\sum_{k=1}^{n+1} \Lambda_{nsk} \int_{-1}^{1} \zeta(k\beta) \beta^p d\beta = \delta_{ps}, \quad 0 \leqslant p, \quad s \leqslant n,$$

которую можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n+1} \Lambda_{nsk} k^{-p-1} = \delta_{ps} \gamma_p^{-1}, \quad 0 \leqslant s, \quad p \leqslant n.$$

Так как ее определитель является определителем Вандермонда, то она имеет единственное решение для всех значений $s = \overline{0, n}$.

Функции $\xi(\beta)$ с требуемыми свойствами можно получить, например, в виде

$$\zeta(\beta) = \begin{cases} 0, & |\beta| \geqslant 1, \\ (1 - \beta^2)^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} a_j (1 + \beta)^j, & |\beta| < 1. \end{cases}$$

В частности, для $n = 1$ можно взять

$$\zeta(\beta) = \begin{cases} 0, & |\beta| \geqslant 1, \\ c(1 - \beta^2)^2 (1 + \beta), & |\beta| < 1, \quad c = \text{const}. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть* $u(x, y) \in C^r(R^2)$, $r \geqslant n+1$. *Остаток* $\widetilde{R}_n u(x, y) = (I - \widetilde{\mathcal{D}}_n) u(x, y)$ *можно представить в виде*

$$\widetilde{R}_n u(x, y) = \int_0^y \left[\int_{-1}^{1} \left[\int_0^{x+\beta(y-z)} A_{n+1}(u(\xi, z); \beta) \frac{(x + \beta(y-z) - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} d\xi \right] d\beta \right] dz, \tag{5}$$

где

$$A_{n+1}(u(\xi, z); \beta) = \Big[- K_{n0}(\beta)\,\beta u^{(n+1,0)} + \sum_{s=1}^{n} (K_{n,s-1}(\beta) - \beta K_{ns}(\beta))\, u^{(n+1-s,s)} + $$
$$+ K_{nn}(\beta)\, u^{(0,n+1)} \Big](\xi, z), \tag{6}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$\mathscr{L}_n(u(x, y); z) = \int_{-1}^{1} K_{n0}(\beta)\, u(x + \beta(y - z), z)\, d\beta + \sum_{s=1}^{n} \int_{-1}^{1} K_{ns}(\beta) \times$$
$$\times \int_{0}^{x+\beta(y-z)} u^{(0,s)}(\xi, z) \frac{(x + \beta(y - z) - \xi)^{s-1}}{(s-1)!}\, d\xi d\beta.$$

Очевидно,

$$\mathscr{L}_n(u(x, y); y) = u(x, y); \qquad \mathscr{L}_n(u(x, y); 0) = \widetilde{\mathscr{D}}_n u(x, y).$$

Поэтому для остатка $\widetilde{R}_n$ справедливо равенство

$$\widetilde{R}_n u(x, y) = \int_0^y \frac{\partial \mathscr{L}_n(u(x, y); z)}{\partial z}\, dz = \int_0^y \Big\{ - \int_{-1}^{1} K_{n0}(\beta) \beta u^{(1,0)}(x + \beta(y - z), z) d\beta +$$
$$+ \int_{-1}^{1} [K_{n0}(\beta) - \beta K_{n1}(\beta)]\, u^{(0,1)}(x + \beta(y - z), z)\, d\beta +$$
$$+ \sum_{s=2}^{n} \int_{-1}^{1} [K_{n,s-1}(\beta) - \beta K_{ns}(\beta)] \int_0^{x+\beta(y-z)} u^{(0,s)}(\xi, z) \frac{(x + \beta(y - z) - \xi)^{s-2}}{(s-2)!}\, d\xi d\beta +$$
$$+ \int_{-1}^{1} K_{nn}(\beta) \int_0^{x+\beta(y-z)} u^{(0,n+1)}(\xi, z) \frac{(x + \beta(y - z) - \xi)^{n-1}}{(n-1)!}\, d\xi d\beta \Big\}\, dz. \tag{7}$$

Используем следующие тождества (полученные интегрированием по частям с учетом равенств (1)):

$$\int_{-1}^{1} K_{n0}(\beta)\, \beta u^{(1,0)}(x + \beta(y - z), z)\, d\beta = \int_{-1}^{1} K_{n0}(\beta)\, \beta \times$$
$$\times \int_0^{x+\beta(y-z)} u^{(n+1,0)}(\xi, z) \frac{(x + \beta(y - z) - \xi)^{n-1}}{(n-1)!}\, d\xi d\beta,$$

$$\int_{-1}^{1} [K_{n,s-1}(\beta) - \beta K_{n,s}(\beta)] \int_0^{x+\beta(y-z)} u^{(0,s)}(\xi, z) \frac{(x + \beta(y - z) - \xi)^{s-2}}{(s-2)!}\, d\xi d\beta =$$
$$= \int_{-1}^{1} [K_{n,s-1}(\beta) - \beta K_{ns}(\beta)] \int_0^{x+\beta(y-z)} u^{(n+1-s,s)}(\xi, z) \frac{(x + \beta(y - z) - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} d\xi d\beta,$$
$$s = \overline{2, n}.$$

Подставляя эти выражения в равенство (7), получаем

$$\widetilde{R}_n u(x, y) = \int\limits_0^y \Big\{ \int\limits_{-1}^1 \Big[\int\limits_0^{x+\beta(y-z)} \Big[-\beta K_{n0}(\beta) u^{(n+1,0)} + \sum_{s=1}^n (K_{n,s-1}(\beta) - \beta K_{ns}(\beta)) \times$$

$$\times u^{(n+1-s,s)} + K_{nn}(\beta) u^{(0,n+1)} \Big](\xi, z) \frac{(x+\beta(y-z)-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} d\xi \Big] d\beta \Big\} dz,$$

что и доказывает теорему 2.

Следствие 1. *Если* $A_{n+1}(u(\xi, z); \beta) \in C(G)$, $K_{nn}(\beta)\beta^n \geqslant 0$,

$$G = \{\xi \in (x, x+\beta(y-z)),\ 0 \leqslant z \leqslant y,\ \beta \in [-1, 1]\},$$

то $\exists \bar{\theta}(\eta) = \theta(x, y, \beta, \eta)$; $\bar{\beta} \in (-1, 1)$; $\eta \in (0, y)$;

$$\widetilde{R}_n u(x, y) = \widetilde{A}_{n+1}(u(\bar{\theta}(\eta), \eta); \bar{\beta})\, y^{n+1}/(n+1)!; \qquad \widetilde{A}_{n+1} = K_{nn}^{-1}(\beta) A_{n+1}; \quad (8)$$

$$|\widetilde{R}_n u(x, y)| \leqslant \widetilde{M}_{n+1} \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \widetilde{M}_{n+1} = \max_{(\xi, z, \beta) \in G} |\widetilde{A}_{n+1}(u(\xi, z); \beta)|. \quad (9)$$

Доказательство. Равенство (5) можно записать в виде (с учетом свойств (1))

$$\widetilde{R}_n u(x, y) = \int\limits_0^y \Big\{ \Big\{ \int\limits_{-1}^1 \int\limits_x^{x+\beta(y-z)} \Big[-\beta K_{n0}(\beta) u^{(n+1,0)} + \sum_{s=1}^n (K_{n,s-1}(\beta) - \beta K_{ns'}(\beta)) \times$$

$$\times u^{(n+1-s,s)} + K_{nn}(\beta) u^{(0,n+1)} \Big](\xi, z) \frac{(x+\beta(y-z)-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} d\xi d\beta \Big\} dz,$$

так как

$$\int\limits_{-1}^1 \int\limits_x^0 \Big[-\beta K_{n0}(\beta) u^{(n+1,0)} + \sum_{s=1}^n (K_{n,s-1}(\beta) - \beta K_{ns}(\beta)) u^{(n+1-s,s)} +$$

$$+ K_{nn}(\beta) u^{(0,n+1)} \Big](\xi, z) \frac{(x+\beta(y-z)-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} d\xi d\beta = 0.$$

Используем для каждого внутреннего интеграла теорему о среднем, полагая $\theta \in (x, x+\beta(y-z))$, $\theta = \theta(x, y, z, \beta)$;

$$\widetilde{R}_n u(x, y) = \int\limits_0^y \Big\{ \int\limits_{-1}^1 A_{n+1}(u(\theta, z); \beta) \frac{\beta^n (y-z)^n}{n!} d\beta \Big\} dz.$$

В силу соотношений

$$\int\limits_{-1}^1 K_{nn}(\beta)\beta^n d\beta = 1, \quad \widetilde{A}_{n+1}(u(\theta, z); \beta) = K_{nn}^{-1}(\beta) A_{n+1}(u(\theta, z); \beta) \in C(G),$$

в предположении, что $K_{nn}(\beta)\beta^n \geqslant 0$, существуют $\bar{\beta} \in (-1, 1)$ и $\bar{\theta} = \theta(x, y, z, \bar{\beta}) = \bar{\theta}(z)$ такие, что

$$\int\limits_{-1}^1 K_{nn}(\beta)\beta^n \widetilde{A}_{n+1}(u(\theta, z); \beta) d\beta = \widetilde{A}_{n+1} u(\bar{\theta}, z); \bar{\beta}),$$

т. е.

$$\widetilde{R}_n u(x, y) = \int\limits_0^y \widetilde{A}_{n+1}(u(\bar{\theta}, z); \bar{\beta}) \frac{(y-z)^n}{n!} dz = \widetilde{A}_{n+1}(u(\bar{\theta}(\eta), \eta); \bar{\beta}) \frac{y^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\eta \in (0, y).$$

Таким образом, равенство (8) доказано. Доказательство неравенства (9), очевидно, вытекает из равенства (8). Следствие 1 доказано.

Замечание 2. На основе неравенства (9) можно сделать следующие выводы: если $\widetilde{M}_{n+1} < \max\limits_{0\leqslant z\leqslant y} |u^{(0,n+1)}(x, z)|$, то $|\widetilde{R}_n u(x, y)|$ будет меньше остатка формулы Тейлора по степеням y; для уменьшения величины $\widetilde{M}_{n+1}$ можно использовать выбор $K_{ns}(\beta)$, $s=\overline{0, n}$, при условии $\widetilde{M}_{n+1}\to\min$.

Замечание 3. Если в формуле (2) интегралы по переменной β заменить интегральными суммами $(-1\leqslant\beta_0<\beta_1<\ldots<\beta_n\leqslant 1)$

$$\int\limits_{-1}^{1} K_{n0}(\beta)\, u(x+\beta y, 0)\, d\beta \to \sum_{i=0}^{n} \lambda_{n0i} u(x+\beta_i y, 0),$$

$$\int\limits_{-1}^{1} K_{ns}(\beta) \int\limits_{0}^{x+\beta y} u^{(0,s)}(\xi, 0) \frac{(x+\beta y-\xi)^{s-1}}{(s-1)!}\, d\xi d\beta \to \sum_{i=0}^{n} \lambda_{nsi} \int\limits_{0}^{x+\beta_i y} u^{(0,s)}(\xi, 0) \times$$

$$\times \frac{(x+\beta_i y-\xi)^{s-1}}{(s-1)!}\, d\xi, \quad s=\overline{1, n},$$

выбрав коэффициенты λ_{nsi} решением систем

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_{nsi}\beta_i^p = \delta_{ps}, \quad 0\leqslant s, \quad p\leqslant n,$$

то формула (2) превратится в обобщенную формулу Даламбера, рассмотренную в [3]. Отметим, что в [3], по вине автора, в теореме 4 при формулировке утверждения, аналогичного равенству (8), пропущена фраза «$\exists\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$», вытекающая из такого требования: $\lambda_{nni}\beta_i^n\geqslant 0$ аналогично предположению $K_{nn}(\beta)\,\beta^n\geqslant 0$.

2. Обобщим результаты предыдущего пункта на случай M $(M\geqslant 2)$ прямых, параллельных оси Ox.

Теорема 3. *Пусть* $u(x, y)\in C^r(R^2)$, $r>n$; $0\leqslant\rho_l\leqslant n$, $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_M)$, $-\infty<a\leqslant y_1<y_2<\ldots<y_M\leqslant b<+\infty$; $h_{ks}^{(p)}(y_l)=\delta_{kl}\delta_{0p}$, $0\leqslant p\leqslant\rho_l$,

$$h_{ks}(y)=\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{M}(y-y_l)^{\rho_l+1}\left\{\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{M}(y-y_l)^{-\rho_l-1}\right\}_{(y_k)}^{(\rho_k-s)}, \quad 0\leqslant s\leqslant\rho_k, \quad k=\overline{1, M},$$

где введено обозначение

$$\{\varphi(y)\}_{(y_k)}^{(\nu)}=\sum_{s=0}^{\nu}\varphi^{(s)}(y_k)\frac{(y-y_k)^s}{s!}.$$

Тогда функция

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{M\rho}u(x, y)=\sum_{k=1}^{M}\left\{h_{k0}(y)\int\limits_{-1}^{1}K_{n0}(\beta)\, u(x+\beta(y-y_k), y_k)\, d\beta+\sum_{s=1}^{\rho_k}h_{ks}(y)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{-1}^{1}K_{ns}(\beta)\int\limits_{0}^{x+\beta(y-y_k)}u^{(0,s)}(\xi, y_k)\frac{(x+\beta(y-y_k)-\xi)^{s-1}}{(s-1)!}\, d\xi d\beta\right\} \quad (10)$$

удовлетворяет условиям

$$u(x, y)\in C^r(R^2)\Rightarrow\widetilde{\mathcal{D}}_{M\rho}u(x, y)\in C^r(R^2), \quad (11)$$

$$\partial^s\widetilde{\mathcal{D}}_{M\rho}u/\partial y^s\Big|_{y=y_l}=u^{(0,s)}(x, y_l), \qquad l=\overline{1, M}; \qquad s=\overline{0, \rho_l}. \quad (12)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть* $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_M = n$. *Тогда для остатка* $\widetilde{R}_{M\rho}u(x, y) = (I - \widetilde{\mathcal{D}}_{M\rho})\, u(x, y)$ *справедливо равенство*

$$\widetilde{R}_{M\rho}u(x, y) = \sum_{k=1}^{M} h_{k0}(y)\, r_{nk}u(x, y) + \sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{n}\int_{-1}^{1} K_{ns}(\beta)\,[h_{k0}(y) - h_{ks}(y)] \times$$

$$\times \int_{0}^{x+\beta(y-y_k)} u^{(0,s)}(\xi, y_k)\,\frac{(x+\beta(y-y_k)-\xi)^{s-1}}{(s-1)!}\, d\xi d\beta,$$

где введено обозначение

$$r_{nk}u(x, y) = \int_{y_k}^{y}\left\{\int_{-1}^{1}\int_{0}^{x+\beta(y-\eta)} A_{n+1}(u(\xi, \eta); \beta)\,\frac{(x+\beta(y-\eta)-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\, d\xi d\beta\right\} d\eta.$$

Доказательство. Используем тождество

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{M} h_{k0}(y)\,[\widetilde{\mathcal{D}}_{nk}u(x, y) + r_{nk}u(x, y)], \tag{13}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{nk}u(x, y) = \int_{-1}^{1} K_{n0}(\beta)\, u(x+\beta(y-y_k), y_k)\, d\beta + \sum_{s=1}^{n}\int_{-1}^{1} K_{ns}(\beta) \times$$

$$\times \int_{0}^{x+\beta(y-y_k)} u^{(0,s)}(\xi, y_k)\,\frac{(x+\beta(y-y_k)-\xi)^{s-1}}{(s-1)!}\, d\xi d\beta, \tag{14}$$

вытекающее из следующих соотношений:

$$\sum_{k=1}^{M} h_{k0}(y) \equiv 1, \quad u(x, y) \equiv \widetilde{\mathcal{D}}_{nk}u(x, y) + r_{nk}u(x, y), \quad k = \overline{1, M}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в равенство $\widetilde{R}_{M\rho}u = (I - \widetilde{\mathcal{D}}_{M\rho})\, u$, получаем

$$\widetilde{R}_{M\rho}u(x, y) = \sum_{k=1}^{M} h_{k0}(y)\,\widetilde{\mathcal{D}}_{nk}u(x, y) - \widetilde{\mathcal{D}}_{M\rho}u(x, y) + \sum_{k=1}^{M} h_{k0}(y)\, r_{nk}u(x, y) -$$

$$- \widetilde{\mathcal{D}}_{M\rho}r_{nk}u(x, y) = \sum_{k=1}^{M} h_{k0}(y)\, r_{nk}u(x, y) + \sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{n}[h_{k0}(y) - h_{ks}(y)] \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} K_{ns}(\beta)\int_{0}^{x+\beta(y-y_k)} u^{(0,s)}(\xi, y_k)\,\frac{(x+\beta(y-y_k)-\xi)^{s-1}}{(s-1)!}\, d\xi d\beta,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 4. Функции $\widetilde{\mathcal{D}}_{nk}u(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{nk}u \in C^r(R^2), \quad \partial^s\widetilde{\mathcal{D}}_{nk}u/\partial y^s\,|_{y=y_k} = u^{(0,s)}(x, y_k), \quad s = \overline{0, n}; \qquad k = \overline{1, M}.$$

Поэтому, учитывая $h_{k0}^{(p)}(y_l) = \delta_{kl}\delta_{0p}$, $p = \overline{0, n}$, убеждаемся непосредственной проверкой, что формула

$$O_M u(x, y) = \sum_{k=1}^{M} h_{k0}(y)\,\widetilde{\mathcal{D}}_{nk}u(x, y) \tag{16}$$

удовлетворяет условиям (11), (12) при $\rho_1 = \ldots = \rho_M = n$ (используем при этом одни и те же функции $h_{k0}(y) \to h_{ks}(y)$ $\forall s = \overline{0, n}$).

При этом если $u(x, y) \in C^{n+1}(R^2)$, то для остатка $R_M u$ формулы $u(x, y) = O_M u(x, y) + R_M u$ справедливо выражение

$$R_M u(x, y) = \sum_{k=1}^{M} h_{k0}(y) r_{nk} u(x, y) = \sum_{k=1}^{M} h_{k0}(y) \widetilde{A}_{n+1}(u(\theta_k, \eta_k); \bar{\beta}_k) \frac{(y - y_k)^{n+1}}{(n+1)!},$$

вытекающее очевидным образом из следствия 1 (θ_k, η_k, $\bar{\beta}_k$ имеют тот же смысл, что и в следствии 1, однако применительно к прямой $y - y_k = 0$).

Из последнего выражения для остатка с учетом формул для $h_{k0}(y)$ получаем следующую оценку:

$$|R_M u(x, y)| \leqslant \widetilde{M}_{n+1} \prod_{k=1}^{M} |y - y_k|^{n+1} K_M(y)/(n+1)!, \quad x \in R, \quad a \leqslant y \leqslant b, \tag{17}$$

$$\widetilde{M}_{n+1} = \max_{k=\overline{1, M}} \{|A_{n+1}(u(\theta_k, \eta_k); \bar{\beta}_k)|\},$$

$$K_M(y) = \sum_{k=1}^{M} \left| \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{M} (y - y_i)^{-n-1} \right\}_{(y_k)}^{(n)} \right|.$$

З а м е ч а н и е 5. Заменяя в формулах (10), (16) интегралы по переменной β соответствующими интегральными суммами аналогично тому, как это было предложено в замечании 3, получаем обобщенные формулы Даламбера для M параллельных прямых, первая из которых приведена в работе [2], а вторая имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{M} h_{k0}(y) \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_{n0i} u(x + \beta_i(y - y_k), y_k) + \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=0}^{n} \lambda_{nsi} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{x+\beta_i(y-y_k)} u^{(0,s)}(\xi, y_k) \frac{(x + \beta_i(y - y_k) - \xi)^{s-1}}{(s-1)!} d\xi \right\} + \bar{r}_{Mn} u(x, y), \tag{18}$$

$$\bar{r}_{Mn} u(x, y) = \sum_{k=1}^{M} h_{k0}(y) \int_{y_k}^{y} \sum_{i=0}^{n} \Delta_{ni}^{-1} \int_0^{x+\beta_i(y-\eta)} (L_{n+1}u)(\xi, \eta) \times$$

$$\times \frac{(x + \beta_i(y - \eta) - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} d\xi d\eta,$$

$$(L_{n+1}u)(x, y) := \prod_{i=0}^{n} \left(-\beta_i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) u(x, y), \quad \Delta_{ni} = \lambda_{nni} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M} (\beta_j - \beta_i).$$

С л е д с т в и е 1. *Пусть $u(x, y)$ — решение задачи*

$$L_{n+1} u(x, y) = g(x, y), \quad y \neq y_k, \quad k = \overline{1, M}, \quad g \in C(R^2), \tag{19}$$

$$u^{(0,s)}(x, y_1) = \varphi_{1s}(x) \in C^{n+1-s}(R), \quad s = \overline{0, n}. \tag{20}$$

Положим

$$u^{(0,s)}(x, y_k) = \varphi_{ks}(x), \quad k = \overline{2, M}, \quad s = \overline{0, n}. \tag{21}$$

Тогда решение переопределенной задачи (19)—(21) *существует, единственно и может быть представлено в виде формулы* (18), *если в ней заменить $u^{(0,s)}(x, y_k)$ на $\varphi_{ks}(x)$ и $L_{n+1}u(\xi, \eta)$ на $g(\xi, \eta)$.*

Такая переопределенная задача может быть использована для нахождения по данным (20), (21) неизвестной $g(x, y)$.

З а м е ч а н и е 6. Решение задачи

$$\left(-\beta\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^{Mn}u(x,y)=g(x,y),\quad y\neq y_k,\quad k=\overline{1,M},\quad g\in C^1(R^2),$$

$$u^{(0,s)}(x,y_k)=\varphi_{ks}(x)\in C^{Mn-s+n}(R),\quad s=\overline{0,n-1};\qquad k=\overline{1,M},$$

имеет вид

$$u(x,y)=l_{Mn}(u;x,y)+r_{Mn}(u;x,y),$$

$$l_{Mn}(u;x,y)=\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=0}^{n-1}h_{Mks}(y)\sum_{i=0}^{s}(-1)^i C_s^i\beta^i\varphi_{k,s-i}^{(i)}(x+\beta(y-y_k)),$$

$$r_{Mn}(u;x,y)=\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=0}^{n-1}h_{Mks}(y)\int_{y_k}^{y}g(x+\beta(y-\eta),\eta)\frac{(y_k-\eta)^{Mn-1-s}}{(Mn-1-s)!}\,d\eta,$$

где $h_{Mks}(y)$ — фундаментальные полиномы Эрмита степени $Mn-1$:

$$h_{Mks}^{(p)}(y_l)=\delta_{kl}\delta_{ps},\quad k,\ l=\overline{1,M},\quad p,s=\overline{0,n-1}.$$

Докажем это утверждение, используя тождество

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{n-1}h_{Mks}(y)\Bigg[\frac{\partial^s u(x+\beta(y-y_k),y_k)}{\partial y_k^s}+$$

$$+\int_{y_k}^{y}\frac{\partial^{Mn}u(x+\beta(y-\eta),\eta)}{\partial\eta^{Mn}}\frac{(y_k-\eta)^{Mn-s-1}}{(Mn-s-1)!}\,d\eta\Bigg],$$

в справедливости которого можно убедиться интегрированием по частям с учетом того, что

$$\frac{\partial^s u(x+\beta(y-\eta),\eta)}{\partial\eta^s}\bigg|_{\eta=\eta_k}=\left[\left(-\beta\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^s u\right](x+\beta(y-y_k),y_k)=$$

$$=\sum_{i=0}^{s}(-1)^i C_s^i\beta^i\varphi_{k,s-i}^{(i)}(x+\beta(y-y_k)),$$

$$\sum_{\nu=0}^{p}C_p^\nu\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^i C_\nu^i\beta^{i+p-\nu}\varphi_{k,\nu-i}^{(i+p-\nu)}(x)=\varphi_{kp}(x),$$

$$\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=0}^{n-1}h_{Mks}(y)\frac{(y_k-y)^{Mn-s-1}}{(Mn-s-1)!}=0,\quad 0\leqslant p\leqslant n,\quad 0\leqslant s\leqslant Mn-1.$$

Отметим, что оператор $l_{Mn}(u;x,y)$ не сохраняет класс дифференцируемости, к которому принадлежала функция $u(x,y)$: $u(x,y)\in C^{Mn+1}(R^2)\Rightarrow l_{Mn}(u;x,y)\in C^{Mn-n+2}(R^2)$.

3. Построим операторы, интерлинирующие функцию $u(x,y)$ и ее нормальные производные до порядка n на M $(M\geqslant 2)$ произвольных прямых.

Пусть $\Gamma_k:\omega_k(x,y):=xa_k+yb_k-\gamma_k=0$, $a_k^2+b_k^2=1$, $\nu_k=\nabla\omega_k=(a_k,b_k)$; (t_k,ω_k) — ортогональная система координат, связанная с Γ_k;

$$t_k=t_k(x,y):=b_kx-a_ky,\quad u(x,y)\in C^r(R^2),$$

$$\Phi_k(t_k,\omega_k):=u(t_kb_k+\omega_ka_k-\gamma_ka_k,\ -t_ka_k+\omega_kb_k-\gamma_kb_k)\equiv u(x,y).$$

Введем в рассмотрение следующие операторы:

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{nk}u(x,y)=\widetilde{\mathscr{D}}_{nk}\Phi_k(t_k,\omega_k)=\int_{-1}^{1}K_{n0}(\beta)\,\Phi_k(t_k+\beta\omega_k,0)\,d\beta+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\int_{-1}^{1}K_{ns}(\beta)\int_{0}^{t_k+\beta\omega_k}\Phi_k^{(0,s)}(\xi,0)\frac{(t_k+\beta\omega_k-\xi)^{s-1}}{(s-1)!}d\xi d\beta,$$

обладающие свойствами

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{nk}u(x,y)\in C^r(R^2),\quad \left.\frac{\partial^s\widetilde{\mathcal{D}}_{nk}u}{\partial\omega_k^s}\right|_{\omega_k=0}=\Phi^{(0,s)}(t_k,0)=\left.\frac{\partial^s u}{\partial\nu_k^s}\right|_{\Gamma_k},\quad s=\overline{0,n},$$

и систему рациональных функций

$$h_{Nk}(x,y)=\prod_{i\neq k}\omega_i^N(x,y)/\sum_{i=1}^{M}\prod_{j\neq i}\omega_j^N(x,y),\quad N=\begin{cases}n+1,\ n=2m+1,\\ n+2,\ n=2m,\ m\in\mathbb{N},\end{cases}$$

обладающую, как известно [10], следующими свойствами:

$$\sum_{k=1}^{M}h_{Nk}(x,y)\equiv 1$$

и (за исключением точек пересечения двух или более прямых Γ_k)

$$\partial^p h_{Nk}(x,y)/\partial\nu_q^p|_{\Gamma_q}=\delta_{qk}\delta_{0p},\quad 1\leqslant k,\quad q\leqslant M,\quad 0\leqslant p\leqslant n.$$

Теорема 5. *Оператор*

$$O_{Mn}u(x,y)=\sum_{k=1}^{M}h_{Nk}(x,y)\widetilde{\mathcal{D}}_{nk}u(x,y)\tag{22}$$

обладает свойствами

$$O_{Mn}u(x,y)\in C^r(R^2\setminus G),\quad G=\{A_{kl}\}=\{\Gamma_k\cap\Gamma_l\},\tag{23}$$

$$\partial^p O_{Mn}u/\partial\nu_q^p|_{\Gamma_q}=\partial^p u/\partial\nu_q^p|_{\Gamma_q},\quad q=\overline{1,M},\quad p=\overline{0,n},\tag{24}$$

за исключением точек, где пересекаются две или более прямых Γ_k. При этом если $\widetilde{r}_{nk}u=(I-\widetilde{\mathcal{D}}_{nk})u$, то

$$(I-O_{Mn})u(x,y)=\sum_{k=1}^{M}h_{Nk}(x,y)\widetilde{r}_{nk}u(x,y).$$

Если $\partial^{p+s}O_{Mn}u/\partial x^p\partial y^s$, $0\leqslant p+s\leqslant n$, доопределить в точках $A_{kl}=\Gamma_k\cap\Gamma_l$, $k,\ l=\overline{1,M}$, $k\neq l$, значениями $u^{(p,s)}(A_{kl})$, то таким образом доопределенная функция $O_{Mn}u(x,y)$ будет принадлежать классу $C^n(R^2)$.

Доказательство может быть проведено непосредственной проверкой.

Замечание 7. Учитывая равенство

$$\int_{-1}^{1}K_{ns}(\beta)\int_{x}^{0}u^{(0,s)}(\xi,0)\frac{(x+\beta y-\xi)^{s-1}}{(s-1)!}d\xi d\beta=0,\quad s=\overline{1,n},$$

формулу (4) можно представить в виде

$$\widetilde{\mathcal{D}}_n u(x,y)=\int_{-1}^{1}K_{n0}(\beta)u(x+\beta y,0)d\beta+\sum_{s=1}^{n}\int_{-1}^{1}K_{ns}(\beta)\int_{x}^{x+\beta y}u^{(0,s)}(\xi,0)\times$$

$$\times\frac{(x+\beta y-\xi)^{s-1}}{(s-1)!}d\xi d\beta.$$

Аналогичное замечание справедливо также для формул (10), (14), (18) и их соответствующих обобщений на случай общего расположения заданного семейства прямых Γ_k ($k=\overline{1,M}$).

Замечание 8. Если предлагаемые формулы интерлинации используются при решении краевых задач в многоугольных областях Ω, ограниченных отрезками Γ_k' прямых Γ_k, то возникает вопрос о продолжении следов $\varphi_{ks}(t_h)$ с Γ_k' на Γ_h; алгоритм должен использовать только информацию, заданную на Γ_k'. В случае интерлинации без сохранения класса $C^r(R^2)$ представляет интерес алгоритм, изложенный в работе [11], для случая, когда Ω — выпуклый многоугольник. В случае интерлинации с сохранением класса $C^r(R^2)$ или $C^\infty(R^2)$ в виде обобщений операторов (8), (10), (12), (22) ядра $K_{ns}(\beta)$ нужно строить так, чтобы интегрирование следов $\varphi_{hs}(t_h)$ производилось по Γ_k'; при этом вместо $x+\beta y$ можно рассматривать и более сложные формулы; приложения используют также линейные комбинации формул вида (2).

Пример. Функция

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}\Big[\sum_{i=1}^{2}\lambda_{0i}\varphi_0(x+\beta a_i 2\sqrt{t})\Big]d\beta+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}\times$$

$$\times\Big[\sum_{i=1}^{2}\lambda_{1i}\int_{0}^{x+\beta a_i 2\sqrt{t}}\varphi_1(\xi)\,\frac{x+\beta a_i 2\sqrt{t}-\xi)}{1!}\,d\xi\Big]d\beta,$$

где постоянные λ_{si} находятся из систем

$$\sum_{i=1}^{2}\lambda_{si}a_i^{2p}=\delta_{sp},\quad 0\leqslant s,\quad p\leqslant 1,$$

является решением задачи

$$\prod_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial}{\partial t}-a_i^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)u(x,t)=0,$$

$$\lim_{t\to 0}u^{(0,s)}(x,t)=\varphi_s(x)\in C^{r-2s}(R),\quad s=0,1,\quad r>4,$$

являющейся обобщением известной задачи Коши — Дирихле для уравнения теплопроводности.

1. *Литвин О. Н.* Интерполяция функций и их нормальных производных на гладких линиях в R^n // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 7.— С. 15—19.
2. *Литвин О. Н.* Интерполяция данных Коши на нескольких параллельных прямых в R^2 с сохранением класса дифференцируемости // Укр. мат. журн.— 1985.— 38, № 5.— С. 509—514.
3. *Литвин О. Н.* Восстановление функций по следам их нормальных производных на прямой в R^2 с сохранением класса $C^r(R^2)$ // Там же.— 1989.— **41**, № 8.— С. 1141—1146.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М. : Наука, 1969.— 480 с.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М. : Наука, 1975.— 480 с.
6. *Буренков В. И.* Об одном способе приложения дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1976.— **140**.— С. 27—67.
7. *Гаврилова О. А.* О бесконечно дифференцируемом продолжении систем функций // Мат. заметки.— 1971.— **9**, № 6.— С. 723—734.
8. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М. : 1973.— 342 с.
9. *Головкин К. К.* О приближении функций класса $W_2^1(\Omega)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1966.— **67**.— С. 50—56.
10. *Литвин О. Н.* Формула В. Л. Рвачева для областей с угловыми точками // Укр. мат. журн.— 1972.— **26**, № 2.— С. 111—118.
11. *Said H. B.* C^1-interpolation on a polygon // Appl. Math. and Comput.— 1988.— **27**.— N 3, Pt. 1.— P. 217—229.

Укр. заоч. политехн. ин-т

Получено 08.02.90