

## ФИЗИКА ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

PACS numbers: 46.55.+d, 47.10.A-, 06.60.Vz, 81.20.Wk, 81.40.Lm, 81.40.Pq, 83.50.-v

### Исследование методом гипербола обтекания клина при свободном резании

М. А. Курин

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт»,  
ул. Чкалова, 17,  
61070 Харьков, Украина*

Рассмотрена картина пластического деформирования металла при обтекании режущего клина. Предложен новый метод определения поля скоростей течения, допускающий вращение частиц металла и учитывающий, таким образом, действие неконсервативных сил. На основании разработанного метода получена система уравнений, которая описывает поле скоростей течения металла при обтекании клиновидного тела с учётом диссипативных процессов, протекающих в металле. Построены семейства линий тока для трёх характерных типов углов, которые подтвердили адекватность модельных представлений и математических выкладок.

**Ключевые слова:** режущий клин, пластическое деформирование, линии тока, поля скоростей.

Розглянуто картину пластичного деформування металу при обтіканні різального клину. Запропоновано нову методу визначення поля швидкостей течії, що припускає обертання частинок металу та враховує, таким чином, дію неконсервативних сил. На підставі розробленої методи одержано систему рівнянь, яка описує поле швидкостей течії металу при обтіканні клинчастого тіла з урахуванням дисипативних процесів, які відбуваються у металі. Побудовано сімейства ліній струму для трьох характерних типів кутів, які підтвердили адекватність модельних уявлень і мате-

Corresponding author: Maksym Oleksandrovych Kurin  
E-mail: m.kurin@khai.edu

*National Aerospace University 'Kharkiv Aviation Institute',  
17 Chkalov Str., 61070 Kharkiv, Ukraine,*

Citation: M. O. Kurin, Hyperbolae Method Analysis of a Wedge Flow at Free Cutting, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **40**, No. 7: 859–876 (2018) (in Russian), DOI: 10.15407/mfint.40.07.0859.

матичних викладок.

**Ключові слова:** різальний клин, пластичне деформування, лінії струму, поля швидкостей.

A pattern of plastic deformation of metal during cutting-wedge flow is considered. A new method is proposed for determining the field of flow velocities. It takes into account the rotation of metal particles and, thereby, the action of non-conservative forces. A set of equations is obtained on the basis of developed method. This set describes the field of metal flow velocities during wedge-shaped body flow with an allowance for the dissipative processes taking place in a metal. The families of streamlines are obtained for the three characteristic types of angles, which confirm the adequacy of model representations and mathematical calculations.

**Key words:** cutting wedge, plastic deformation, streamlines, velocity fields.

*(Получено 19 февраля 2018 г.; окончат. вариант — 19 мая 2018 р.)*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Большое количество прикладных, технологических задач в области обработки металлов давлением и резанием — основных методов формообразования поверхностей различных деталей в современном машиностроении — так или иначе, связано с разработкой полноценной теории комплекса процессов, протекающих в зоне деформирования. Одним из таких важных вопросов в теории резания есть кинематика пластического течения металла при обтекании режущего клина. Целью представленных в данной работе теоретических исследований является получение аналитических зависимостей, не только описывающих картину течения металла в зоне деформирования, но вместе с тем пригодных для расчёта энергосиловых характеристик процесса, минуя использование большого массива эмпирических зависимостей, не отражающих в полной мере физику процесса и ограниченных узкими рамками экспериментальных исследований. Кроме того, подобные исследования кинематики течения дают возможность выйти на такую важную реологическую характеристику течения металла, как интенсивность деформаций, что вместе с моделями поверхностного упрочнения позволяет сформировать целостную картину закономерности процессов зарождения, развития и аннигиляции дислокаций, являющихся элементарными носителями пластической деформации.

## 2. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Расчёт очага деформирования требует введения гипотезы о сплошности металла, а основной задачей кинематики течения в этом слу-

чае является определение поля скоростей частиц [1]. Для получения искомым уравнений, описывающих поле скоростей течения металла при обтекании клина, возможно использование традиционных методов координатных сеток, наложения потоков или конформных преобразований [2–4]. Применение каждого из указанных выше методов не лишено недостатков и требует введения допущений, иногда кардинально искажающих физическую картину процесса. Так, например, метод координатных сеток предполагает определение функции тока путём аппроксимации линий движения частиц металла, полученных на основании экспериментальных данных. В связи с этим он достаточно неудобен и не может претендовать на универсальность. Метод наложения потоков тоже не удовлетворяет нашим требованиям по причине громоздкости и как не являющийся простым и удобным. Кроме того, метод наложения, как и мощный метод конформных преобразований, базирующийся на математическом аппарате теории функции комплексного переменного, пригоден для определения поля скоростей потенциальных течений. Этого вполне достаточно для решения аэродинамических задач в теории удобообтекаемых тел, но он некорректен в случае обтекания клина по ряду причин. Во-первых, клин нельзя отнести к удобообтекаемым телам, особенно при прямом и тупых углах раствора; во-вторых, упругопластическое деформирование твёрдых тел неизбежно вызывает движение различных дефектов кристаллического строения, что приводит к диссипации энергии деформирования с практически полным её переходом в тепло, а значит, и к значительным силам внутреннего трения, пренебрегать которыми в этом случае нельзя [5]. Наличие значительных сил внутреннего трения допускает вращение частиц металла в процессе деформирования, а само движение в таком случае нельзя считать потенциальным. Действительно, температура в зоне деформирования достигает нескольких сотен градусов по Цельсию, а при некоторых методах обработки, в частности шлифовании, её мгновенные значения могут превышать температуру плавления металла. В связи с этим возникла необходимость разработки метода получения полей скоростей обтекания клиновидных тел, который в полной мере отражает физику процесса и при этом достаточно прост и приемлем для инженерных расчётов различных методов обработки металлов.

### 3. МЕТОД ГИПЕРБОЛ

Рассмотрим классическую схему процесса резания (рис. 1). Если режущий клин поместить в систему координат, то течение (траекторию) стружки в процессе упругопластического деформирования можно представить в виде ветви гиперболы, а её асимптотами будут ось абсцисс и линия, представляющая собой проекцию передней

границы клина на плоскость  $XOY$ . Действительно, в работе [2] представлены экспериментальные данные изменения картины деформации, полученные методом координатных сеток на строгальном станке и на специальном взрывном копре, где производилось резание образцов при скоростях деформирования от 15 м/мин до 100 м/с с фиксированием зоны деформации. По результатам проведённых экспериментальных исследований авторами установлено, что линии тока представляют собой семейство смещённых гипербол при различных углах клина.

Запишем уравнение ветви гиперболы в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x(\xi) = a \operatorname{sh}(\xi), \\ y(\xi) = b \operatorname{ch}(\xi). \end{cases} \quad (1)$$

Система уравнений (1) задаёт гиперболу, сопряжённую с классической, получаемой при параметрическом задании. Если принять, что угол между асимптотами равен углу между проекцией передней грани клина и осью абсцисс (это соответствует  $\gamma$ ), то эксцентриситет гиперболы можно вычислить по формуле  $e = (1 + \operatorname{tg}(\gamma/2)^2)^{1/2}$ , а саму ветвь нужно повернуть на угол  $\gamma/2$  против часовой стрелки (что эквивалентно повороту системы координат на угол  $\alpha - \gamma/2$ ). После преобразований получим такую систему уравнений

$$\begin{cases} x(\xi) = a \operatorname{sh}(\xi) \cos \alpha + b \operatorname{ch}(\xi) \sin \alpha, \\ y(\xi) = -a \operatorname{sh}(\xi) \sin \alpha + b \operatorname{ch}(\xi) \cos \alpha. \end{cases} \quad (2)$$

Известно, что  $\xi$  — параметр, представляющий собой удвоенную

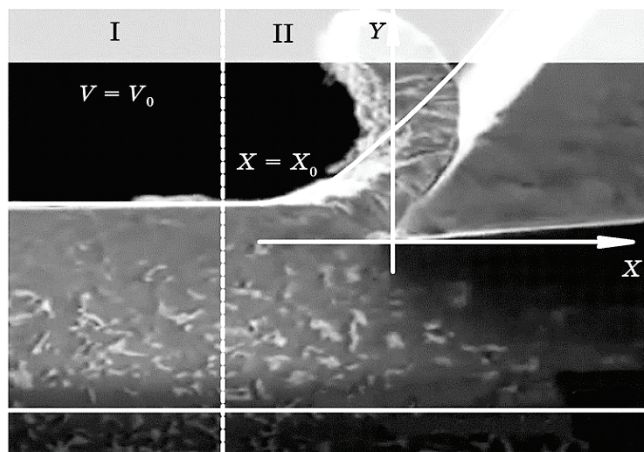


Рис. 1. Условная схема процесса резания.

Fig. 1. Schematic diagram of the cutting process.

площадь криволинейного треугольника. Предположим, что этот параметр линейно зависит от времени и определяется по формуле  $\xi = \omega t + C$ , где  $\omega$  и  $C$  — константы. Тогда систему (2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} x(t) = a \operatorname{sh}(\omega t + C) \cos \alpha + b \operatorname{ch}(\omega t + C) \sin \alpha, \\ y(t) = -a \operatorname{sh}(\omega t + C) \sin \alpha + b \operatorname{ch}(\omega t + C) \cos \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) представляет собой координатный способ движения точки по гиперболе. Продифференцировав систему уравнений (3) по времени, легко найти составляющие скорости движения:

$$\begin{cases} V_x(t) = dx(t)/dt = a\omega \operatorname{ch}(\omega t + C) \cos \alpha + b\omega \operatorname{sh}(\omega t + C) \sin \alpha, \\ V_y(t) = dy(t)/dt = b\omega \operatorname{sh}(\omega t + C) \cos \alpha - a\omega \operatorname{ch}(\omega t + C) \sin \alpha. \end{cases} \quad (4)$$

Полученные системы уравнений (3) и (4) описывают кинематику частицы (точки) в координатах Лагранжа, т.е. они даны в виде  $x = x(a, b, c, t)$ ,  $y = y(a, b, c, t)$ ,  $V_x = V_x(a, b, c, t)$ ,  $V_y = V_y(a, b, c, t)$ . Для построения поля скоростей и более удобной работы нам необходимо перейти к эйлеровым координатам, а именно, к заданию поля скоростей в виде  $V_x = V_x(x, y, z, t)$ ,  $V_y = V_y(x, y, z, t)$ . Для этого выразим из системы (3) значения гиперболических функций.

Из уравнения для  $x(t)$  получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\omega t + C) &= \frac{x - a \operatorname{sh}(\omega t + C) \cos \alpha}{b \sin \alpha}, \\ \operatorname{sh}(\omega t + C) &= \frac{x - b \operatorname{ch}(\omega t + C) \sin \alpha}{a \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Из уравнения для  $y(t)$  получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\omega t + C) &= \frac{y + a \operatorname{sh}(\omega t + C) \sin \alpha}{b \cos \alpha}, \\ \operatorname{sh}(\omega t + C) &= \frac{b \operatorname{ch}(\omega t + C) \cos \alpha - y}{a \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Приравняем соответствующие правые части полученных равенств:

$$\begin{cases} \frac{x - a \operatorname{sh}(\omega t + C) \cos \alpha}{b \sin \alpha} = \frac{y + a \operatorname{sh}(\omega t + C) \sin \alpha}{b \cos \alpha}, \\ \frac{x - b \operatorname{ch}(\omega t + C) \sin \alpha}{a \cos \alpha} = \frac{b \operatorname{ch}(\omega t + C) \cos \alpha - y}{a \sin \alpha}. \end{cases} \quad (5)$$

Из системы (5) выразим значение гиперболических функций через декартовы координаты:

$$\begin{cases} x \cos \alpha - a \operatorname{sh}(\omega t + C) \cos^2 \alpha = y \sin \alpha + a \operatorname{sh}(\omega t + C) \sin^2 \alpha, \\ x \sin \alpha - b \operatorname{ch}(\omega t + C) \sin^2 \alpha = b \operatorname{ch}(\omega t + C) \cos^2 \alpha - y \cos \alpha. \end{cases}$$

В итоге получим:

$$\begin{cases} \operatorname{sh}(\omega t + C) = \frac{x \cos \alpha - y \sin \alpha}{a}, \\ \operatorname{ch}(\omega t + C) = \frac{x \sin \alpha + y \cos \alpha}{b}. \end{cases} \quad (6)$$

В системе (4) заменим гиперболические функции выражениями (6):

$$\begin{aligned} V_x(x, y, a, b, \omega) &= \omega \left[ \frac{a}{b} (x \sin \alpha + y \cos \alpha) \cos \alpha + \frac{b}{a} (x \cos \alpha - y \sin \alpha) \sin \alpha \right], \\ V_y(x, y, a, b, \omega) &= \omega \left[ \frac{b}{a} (x \cos \alpha - y \sin \alpha) \cos \alpha - \frac{a}{b} (x \sin \alpha + y \cos \alpha) \sin \alpha \right]. \end{aligned}$$

После преобразования и упрощений имеем систему уравнений

$$\begin{cases} V_x(x, y, a, b, \omega) = \omega \left[ \frac{ay}{b} + \frac{(x \cos \alpha - y \sin \alpha)(a^2 + b^2) \sin \alpha}{ab} \right], \\ V_y(x, y, a, b, \omega) = \omega \left[ -\frac{ax}{b} + \frac{(x \cos \alpha - y \sin \alpha)(a^2 + b^2) \cos \alpha}{ab} \right]. \end{cases} \quad (7)$$

Нами получена промежуточная система уравнений (7). Для того чтобы окончательно перейти к эйлеровым координатам, необходимо избавиться от параметров  $\omega$ ,  $a$  и  $b$ . Дальнейшие математические выкладки требуют пояснений; поэтому рассмотрим их подробно.

Выразим значение  $\omega$  через абсолютную линейную скорость частицы металла (условной материальной точки)  $V_i$  и параметры гиперболы  $a$  и  $b$ , т.е. найдём функцию  $\omega = f(V_i, x, y, a, b)$ . Абсолютную скорость найдём по формуле

$$V_i = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}. \quad (8)$$

Подставив в формулу (8) значения скорости из системы (4) и выполнив преобразования, получим

$$\omega = V_i [a^2 \operatorname{ch}^2(\omega t + C) + b^2 \operatorname{sh}^2(\omega t + C)]^{-1/2}. \quad (9)$$

Основное тригонометрическое тождество гиперболических функций и система параметрических уравнений (2) позволяют свести выражение (9) к более компактному виду

$$\omega_i = V_i / \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + a_i^2 - b_i^2}. \quad (10)$$

По формуле (10) величину  $\omega$  можно определить, зная параметры кривой, координаты точки и значения абсолютной скорости в ней. Для достижения поставленной цели, как и в большинстве задач аэродинамики, следует перейти от рассмотрения движения клина в среде металла к эквивалентному в силовом отношении установившемуся движению среды относительно клина, т.е., по сути, обратить явление.

Такой вид движения реализуется в «чистом» виде при некоторых методах обработки поверхностей, например, при точении. Известно, что при установившемся движении, линии тока совпадают с траекториями частиц, а поле скоростей является стационарным.

При такой постановке в качестве расчётной удобно взять точку, лежащую на границе зоны пластической деформации, а именно в том месте, где начинается процесс пластической деформации, и где можно допустить, что скорость течения металла относительно клина эквивалентна скорости обработки. В таком случае левее зоны пластической деформации и на её границе поле скоростей будет однородно, стационарно и эквивалентно скорости обработки, а в лагранжевых координатах положение точки металла на этой границе будет соответствовать начальному моменту времени ( $t = 0$ ). Если достаточно далеко отступить от клина влево, где возмущения, оказываемые им на среду ничтожно малы, можно считать эту границу плоской, а её проекцию на плоскость  $XOY$  — прямой. Действительно, при удалении точки вдоль ветви гиперболы последняя стремится к своей асимптоте, а поток вырождается в прямолинейно-поступательный. Таким образом, скорость на границе зоны деформирования инвариантна выбору ординаты, а сама ордината  $y_0$  определяется параметрами кривой и абсциссой  $x_0$ , что и видно из системы уравнений (3).

Эти рассуждения приводят к необходимости выражения параметров гиперболы и ординаты начальной (расчётной) точки через координаты точки поля скоростей и абсциссу границы зоны пластического течения. Следовательно, задача вычисления  $\omega$  сводится к поиску знаменателя дроби (10). В начальный момент времени при  $t = 0$ ,  $V = V_0$  и с учётом того, что прицельный параметр гиперболы связан с большей полуосью выражением  $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ , параметрические уравнения (3) примут такой вид:

$$\begin{cases} a \operatorname{sh}(C) \cos \alpha + a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{ch}(C) \sin \alpha = x_0, \\ -a \operatorname{sh}(C) \sin \alpha + a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{ch}(C) \cos \alpha = y_0. \end{cases} \quad (11)$$

Используя систему (11), найдём сумму квадратов координат нулевой точки:

$$\begin{aligned}x_0^2 + y_0^2 &= a^2 \operatorname{sh}^2(C) + a^2(e^2 - 1) \operatorname{ch}^2(C), \\x_0^2 + y_0^2 &= a^2 e^2 \operatorname{ch}^2(C) - a^2.\end{aligned}\quad (12)$$

Тогда знаменатель дроби (10)

$$x_0^2 + y_0^2 + a_i^2 - b_i^2 = a_i^2 e^2 \operatorname{sh}^2(C) + a_i^2. \quad (13)$$

Для определения  $\operatorname{sh}(C)$  нужно решить первое уравнение системы (11) относительно искомого параметра. В итоге задача сводится к решению уравнения

$$(a^2 e^2 \sin^2 \alpha - a^2) \xi^2 + 2a x_0 \cos \alpha \xi - x_0^2 + a^2 e^2 \sin^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha = 0,$$

где  $\xi = \operatorname{sh}(C)$ . Это квадратное уравнение имеет два корня, один из которых — посторонний:

$$\begin{aligned}\xi_{1,2} &= [\pm \sqrt{\sin^2 \alpha (x_0^2 e^2 - x_0^2 - a^2 e^4 \sin^2 \alpha + a^2 e^2 \sin^2 \alpha + a^2 e^2 - a^2)} + \\ &+ x_0 \cos \alpha] (a - a e^2 \sin^2 \alpha)^{-1}.\end{aligned}$$

Вынеся общий множитель под корнем, преобразуем выражение

$$\xi_{1,2} = \frac{x_0 \cos \alpha \pm \sqrt{\sin^2 \alpha (1 - e^2) (a^2 e^2 \sin^2 \alpha - x_0^2 - a^2)}}{a - a e^2 \sin^2 \alpha}. \quad (14)$$

Для того чтобы выразить параметр  $a$  гиперболы, обратимся к выражению (12). Для произвольного момента времени получим:

$$x^2 + y^2 = a^2 e^2 \operatorname{ch}^2(\omega t + C) - a^2. \quad (15)$$

Из выражения (15) выразим  $\operatorname{sh}^2(\omega t + C)$ :

$$\operatorname{sh}^2(\omega t + C) = [x^2 + y^2 + a^2(1 - e^2)](a^2 e^2)^{-1}.$$

Приравняем правую часть полученного выражения и первого уравнения системы (6), предварительно возведя его в квадрат:

$$\frac{x^2 + y^2 + a^2(1 - e^2)}{a^2 e^2} = \frac{(x \cos \alpha - y \sin \alpha)^2}{a^2}.$$

После несложных преобразований находим:

$$a^2 = [(x \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 e^2 - (x^2 + y^2)](1 - e^2)^{-1}. \quad (16)$$

Последовательная подстановка выражения (16) даёт возможность преобразовать выражения (13) и (14) и закончить переход к эйлеровым координатам.



Для получения компактных выражений, представим конечную систему в виде произведения таких функций координат:

$$\left\{ \begin{aligned} V_x(x, y) &= V_0[\omega(x, y)]^{-1/2} \frac{(x \cos \alpha - y \sin \alpha)e^2 \sin \alpha + y}{\sqrt{e^2 - 1}}, \\ V_y(x, y) &= V_0[\omega(x, y)]^{-1/2} \frac{(x \cos \alpha - y \sin \alpha)e^2 \cos \alpha - x}{\sqrt{e^2 - 1}}, \\ \omega(x, y) &= [a(x, y)]^2 + \\ &+ \frac{e^2 \left[ x_0 \cos \alpha \pm \sqrt{\sin^2 \alpha (1 - e^2) ([a(x, y)]^2 (e^2 \sin^2 \alpha - 1) - x_0^2)} \right]^2}{(1 - e^2 \sin^2 \alpha)^2}, \\ a(x, y) &= \sqrt{\frac{(x \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 e^2 - (x^2 + y^2)}{(1 - e^2)}}. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Но процесс деформации металла в рамках законов механики сплошных сред [1, 3, 4] подчиняется уравнению неразрывности

$$d\rho/dt + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) показывает, что расходимость поля скоростей приводит к относительному изменению плотности элемента металла в единицу времени. В нашем случае, и вообще в задачах из области обработки металлов давлением и резанием изменением плотности металла в процессе деформирования пренебрегают. В этом случае уравнение (18) отражает условие несжимаемости металла:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (19)$$

В скалярной форме уравнение (19) примет вид

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (20)$$

Истинность выражения (20) является необходимым условием, которому должна удовлетворять система (17). Частные производных от ключевых уравнений системы (17) достаточно громоздки, поэтому представим их, вводя дополнительные обозначения:

$$\zeta = \sqrt{\sin^2 \alpha [x_0^2 (e^2 - 1) - (e^2 \sin^2 \alpha - 1)(x^2 - e^2(x \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 + y^2)]}, \\ Z = \frac{x^2 - e^2(x \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 + y^2}{e^2 - 1} + \frac{e^2 [x_0 \cos \alpha + \zeta]^2}{(e^2 \sin^2 \alpha - 1)^2},$$

$$\Psi = \left[ \frac{1}{e^2 - 1} - \frac{e^2 \sin^2 \alpha (x_0 \cos \alpha + \zeta)}{(e^2 \sin^2 \alpha - 1)\zeta} \right] [x - e^2 \cos^2 \alpha (x \cos \alpha - y \sin \alpha)],$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{V_0 e^2 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{Z(e^2 - 1)}} - \frac{V_0 (y + e^2 \sin \alpha (x \cos \alpha - y \sin \alpha))}{Z \sqrt{Z(e^2 - 1)}} \Psi,$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{-V_0 e^2 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{Z(e^2 - 1)}} + \frac{V_0 (y + e^2 \sin \alpha (x \cos \alpha - y \sin \alpha))}{Z \sqrt{Z(e^2 - 1)}} \Psi.$$

Как видим, для одного из решений системы (17) условие (20) выполняется. Аналогично можно показать, что оно действительно также и для второго решения (знак «-» в формуле для  $\omega(x, y)$ ); вместе с этим численные проверки решений (14) указывают на то, что именно второй корень является посторонним, и поэтому его можно исключить из системы (17). При необходимости несложно будет доказать, что в потоке, который задаёт поле скоростей системы уравнений (17), присутствует вращение частиц — ненулевой вихрь скорости, что математически можно выразить так:

$$\text{rot} \mathbf{V} \neq 0. \quad (21)$$

Действительно, в проекциях в двухмерной декартовой системе условие (21) можно записать как  $\partial V_y / \partial x \neq \partial V_x / \partial y$ , что легко доказуемо. Такие результаты согласуются с представленными выше рассуждениями о невозможности рассмотрения такого рода потоков как потенциальных и подтверждают рациональность выбранного нами метода решения.

### 3. ЛИНИИ ТОКА

Исследование поля скоростей течения металла было бы неполным без определения уравнения семейства линий тока. Дифференциальное уравнение линий тока плоского потока

$$dx/V_x(x, y) = dy/V_y(x, y)$$

удобно представить в виде

$$V_y dx - V_x dy = 0. \quad (22)$$

Известно, что для несжимаемой среды выражение (22) представляет собой полный дифференциал некой функции  $U(x, y)$ . В самом деле, выражение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  является полным дифференциалом некоторой функции, если выполняется условие

$\partial P(x, y)/\partial y = \partial Q(x, y)/\partial x$ . Применительно к нашему случаю это условие будет выглядеть так

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{\partial V_x}{\partial x}.$$

Полученное выражение является уравнением неразрывности (20) для плоского потока. Подставим из (17) выражения для составляющих скорости. Сократив общий множитель  $V_0[\omega(x, y)]^{-1/2} \neq 0$ , выражение (22) можно записать так:  $V_{yi}dx - V_{xi}dy = 0$ , где

$$V_{xi} = \frac{xe^2 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{e^2 - 1}} - \frac{y(e^2 \sin^2 \alpha - 1)}{\sqrt{e^2 - 1}},$$

$$V_{yi} = \frac{x(e^2 \cos^2 \alpha - 1)}{\sqrt{e^2 - 1}} - \frac{ye^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{e^2 - 1}}.$$

Представим

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} dy.$$

Тогда можно составить систему

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = V_{yi}, \\ \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = -V_{xi}. \end{cases} \quad (23)$$

Из первого уравнения системы (23) по формуле

$$U(x, y) = \int V_{yi}(x, y)dx + \varphi(y)$$

находим функцию тока

$$U(x, y) = \frac{x^2(e^2 \cos^2 \alpha - 1)}{2\sqrt{e^2 - 1}} - \frac{yxe^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{e^2 - 1}} + \varphi(y). \quad (24)$$

Далее дифференцируем выражение (24) по  $y$  и приравниваем его к  $-V_{xi}(x, y)$ , находя, таким образом, что

$$\varphi(y) = \int \frac{y(e^2 \sin^2 \alpha - 1)}{\sqrt{e^2 - 1}} dy. \quad (25)$$

После интегрирования (25) и подстановки в (24) получаем функцию тока в виде  $U(x, y) = \text{const}$ :

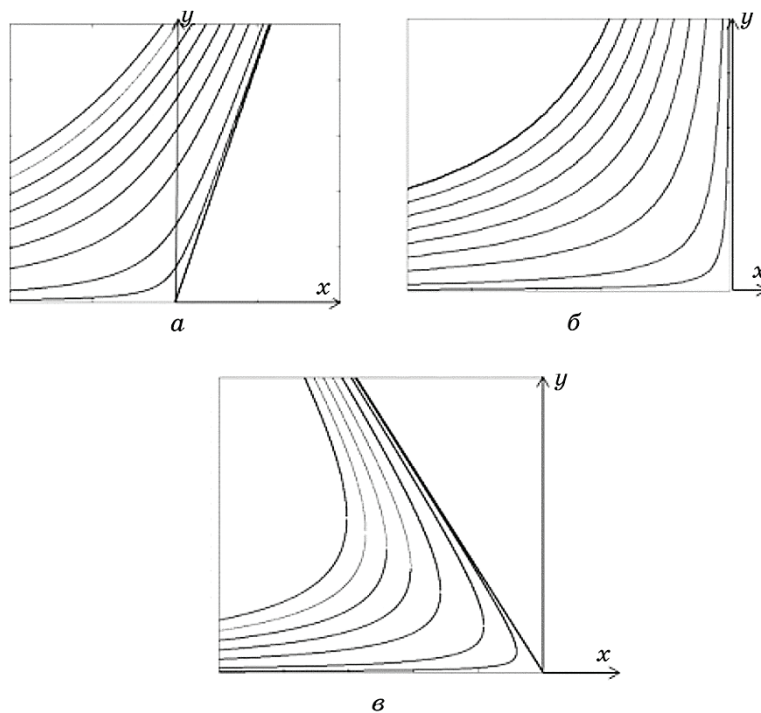
$$\frac{x^2(e^2 \cos^2 \alpha - 1)}{2\sqrt{e^2 - 1}} - \frac{yxe^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{e^2 - 1}} + \frac{y^2(e^2 \sin^2 \alpha - 1)}{2\sqrt{e^2 - 1}} = \Omega, \quad (26)$$

где  $\Omega$  — произвольная постоянная.

Для построения семейства линий тока переходим от неявно заданной функции (26) к явной форме  $y = f(x)$ . Очевидно, что задача сводится к квадратному уравнению с решением

$$y_{1,2}(x) = -\frac{xe^2 \cos \alpha \sin \alpha}{(1 - e^2 \sin^2 \alpha)^2} \pm \frac{\sqrt{(xe^2 \cos \alpha \sin \alpha)^2 - (1 - e^2 \sin^2 \alpha)[x^2(1 - e^2 \cos^2 \alpha) - \Omega]}}{(1 - e^2 \sin^2 \alpha)^2}. \quad (27)$$

Прокомментируем результат (27). При острых и прямом углах каждое из двух решений отвечает за построение двух различных ветвей гиперболы, и в этом случае линией тока будет лишь одна из



**Рис. 2.** Семейства линий тока для разных типов углов:  $a$  — острого ( $\gamma - \pi/3$ ),  $б$  — прямого и  $в$  — тупого ( $\gamma - 2\pi/3$ ).

**Fig. 2.** Set of streamlines for different types of angles:  $a$ —acute ( $\gamma - \pi/3$ ),  $б$ —right,  $в$ —obtuse ( $\gamma - 2\pi/3$ ).

ветвей, уравнение которой содержит знак «+». В случае тупого угла клина, напротив, каждое из двух решений будет формировать участки каждой из ветвей гиперболы; поэтому необходима «сшивка» двух решений для построения семейства с ограничением  $y > 0$ . В целях верификации модельных представлений построим семейство линий тока по описанному выше алгоритму с использованием (27) для разных типов углов: прямого, острого, тупого (рис. 2).

#### 4. СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ И ДЕФОРМАЦИИ

Использование предложенного поля скоростей позволяет производить детальное исследование состояния деформируемого металла в зоне обработки и рассчитывать важные характеристики процесса и материала, такие как: деформации, скорости деформаций и их интенсивности; работу деформирования, плотность дислокаций и т.д.

Найдём составляющие скоростей деформаций с учётом того, что  $V_z = 0$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{V_0 e^2 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{Z(e^2 - 1)}} - \frac{V_0 (y + e^2 \sin \alpha (x \cos \alpha - y \sin \alpha))}{Z \sqrt{Z(e^2 - 1)}} \Psi, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{-V_0 e^2 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{Z(e^2 - 1)}} + \frac{V_0 (y + e^2 \sin \alpha (x \cos \alpha - y \sin \alpha))}{Z \sqrt{Z(e^2 - 1)}} \Psi, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{V_0 e^2 \cos 2\alpha}{\sqrt{Z(e^2 - 1)}} + \frac{V_0 (x - e^2 \cos \alpha (x \cos \alpha - y \sin \alpha))^2 \Psi_1}{Z \sqrt{Z(e^2 - 1)}} - \\ &\quad - \frac{V_0 (y + e^2 \sin \alpha (x \cos \alpha - y \sin \alpha))^2 \Psi_1}{Z \sqrt{Z(e^2 - 1)}}, \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\Psi_1 = \left[ \frac{1}{e^2 - 1} - \frac{e^2 \sin^2 \alpha (x_0 \cos \alpha + \zeta)}{(e^2 \sin^2 \alpha - 1)\zeta} \right].$$

Составляющие деформаций могут быть вычислены через составляющие скоростей деформаций по формулам:

$$e_{xx} = \int \varepsilon_{xx} dt, \quad e_{yy} = \int \varepsilon_{yy} dt, \quad e_{xy} = \int \varepsilon_{xy} dt.$$

Комплексы вышеуказанных формул позволяют перейти к двум

важным инвариантным выражениям — интенсивности скоростей деформаций и интенсивности деформаций соответственно, выражения для которых в нашем случае приобретут следующий вид:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{xx}^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{xy}^2}, \quad (28)$$

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + e_{yy}^2 + e_{xx}^2 + \frac{3}{2} e_{xy}^2}. \quad (29)$$

Используя выражение для интенсивности деформаций, мы можем определить характер изменения плотности дислокаций в материале стружки при пластическом течении по формуле [6]:

$$\rho = \left[ \frac{2\pi}{Gb} \sigma_{0,2/T} (e_i^n - 1) \right]^2, \quad (30)$$

где  $G$  — модуль сдвига [Па],  $b$  — модуль вектора Бюргерса [м],  $n$  — показатель деформационного упрочнения,  $\sigma_T$  — предел текучести материала [Па].

Рассмотрим конкретный пример.

Операция строгания детали из сплава ХН77ТЮР ( $G = 8,14 \cdot 10^{10}$  Па,  $b = 3,524 \cdot 10^{-10}$  м,  $\sigma_T = 650 \cdot 10^6$  Па,  $n = 0,33$ ), скорость резания  $V = 4$  м/мин, глубина резания  $t = 0,14 \cdot 10^{-3}$  м. Обработку проводили твёрдосплавным резцом из ВК8 с геометрией  $\gamma = \alpha = 10^\circ$  (здесь не стоит путать передний угол резца с ключевым углом, фигурирую-

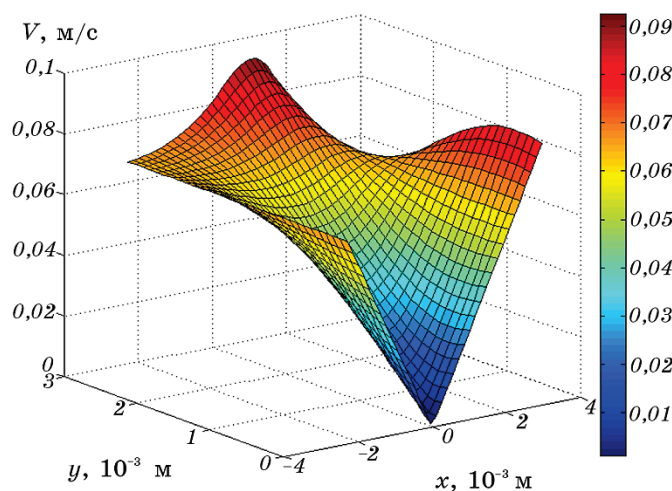


Рис. 3. Поле скоростей перемещений частиц.

Fig. 3. The velocity field of particle displacements.

щим и в нашей системе уравнений полей скоростей и являющимся, по сути, углом резания  $\gamma = 80^\circ$ ). Границы пластически деформированной зоны, как и длину контакта стружки с передней поверхностью реза примем согласно экспериментальным данным работы [7]:  $X_0 = -2,29 \cdot 10^{-3}$  м,  $C \approx 0,5 \cdot 10^{-3}$  м. Расчёт интенсивности деформации произведём в конечный момент времени  $t_k = (|X_0| + C)/V$ .

Построим графики зависимостей поля скоростей, интенсивности скоростей деформаций, интенсивности деформаций и плотности дислокаций, в снимаемой стружке и в зоне перед резцом, используя формулы (17), (28), (29) и (30).

При построении графиков нами сознательно были расширены границы с выходом за реальные технологические параметры режима обработки с целью улучшения наглядности законов изменения величин и оценки соответствия полученных значений реальным. Как видно из построения (рис. 3), скорость перемещения частиц металла на границе пластически деформированной зоны не зависит от ординаты и равна скорости резания. По мере приближения к клину скорость частиц уменьшается, достигая минимума в начале координат, что соответствует торможению материала у поверхности реза. Последующее увеличение скорости соответствует течению материала образовавшейся стружки.

Характер изменения интенсивности скоростей деформаций и деформаций (рис. 4, 5) одинаков — постепенное увеличение от границ пластически деформированной зоны с максимумом в начале координат и последующим спадом. Такая картина распределения интенсивностей согласуется с классическими представлениями о механизме деформирования материала при стружкообразовании и

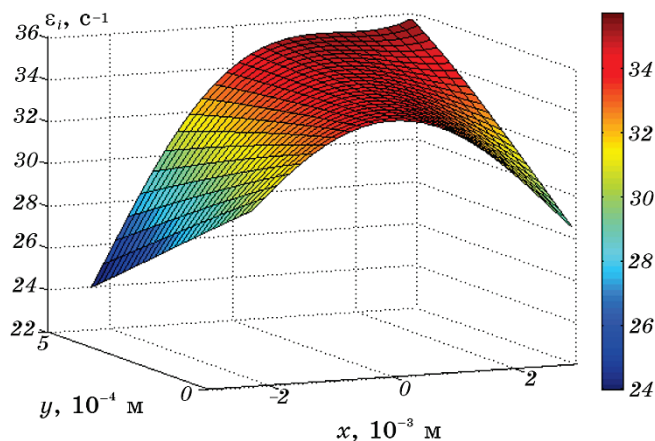


Рис. 4. Интенсивность скоростей деформаций.

Fig. 4. The strain rate intensity.

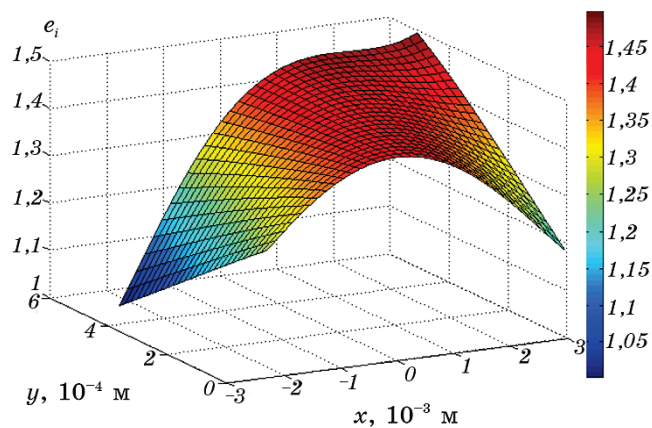


Рис. 5. Интенсивность деформаций.

Fig. 5. The deformation intensity.

подтверждена экспериментально [7–9].

Изменение дислокационных характеристик материала коррелирует с интенсивностью деформаций (рис. 6), а численные значения плотности дислокаций находятся в допустимых пределах для деформированного материала.

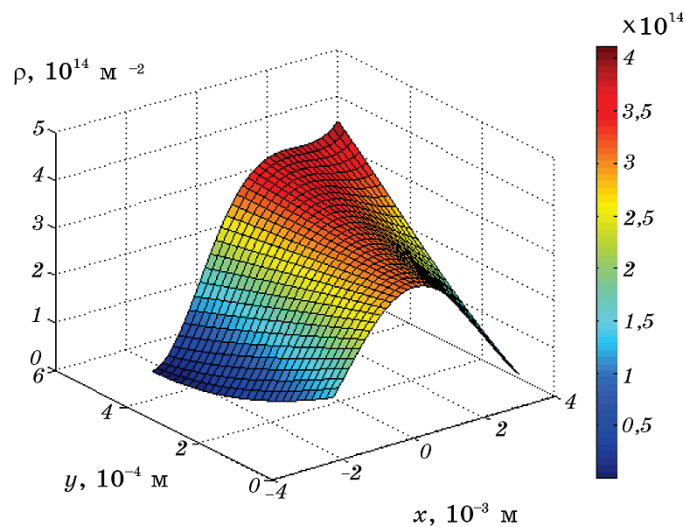


Рис. 6. Плотность дислокаций.

Fig. 6. The dislocations density.



## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами разработан метод гипербол, использование которого дало возможность получить основные уравнения полей скоростей течения частиц при обтекании клиновидных тел. В отличие от традиционных методов, описывающих картину течения среды, метод гипербол учитывает наличие вращения частиц, что, как указано в начале работы, очень важно при исследовании пластического деформирования металла. Область приложения метода достаточно широка и охватывает все виды механической обработки металлов резанием, также предлагаемый способ исследования может быть адаптирован для решения определённого круга задач в теории обработки металлов давлением. Полученные нами уравнения семейства линий тока согласуются с траекториями частиц, заданными в координатах Лагранжа, что подтверждает правильность представленных выкладок.

Последовательное определение основных параметров при пластическом деформировании металла на базе исходного поля скоростей позволяет в перспективе выйти на важную энергосиловую характеристику любого процесса обработки — работу пластической деформации. В качестве ещё одного важного преимущества метода следует отметить, что кинематика течения может быть описана при любых скоростях деформирования и углах клина, что в совокупности с областью приложения позволяет сделать вывод об универсальности предлагаемой методики исследования. Влияние же скорости деформирования, угла клина, характеристики обрабатываемого материала и прочих параметров режимов обработки будет сказываться на форме и границе упругопластической зоны. Как известно, по мере удаления от источника возмущения деформационных волн, каковым в нашем случае является клин, происходит затухание скоростей пластического течения металла до нуля в области недеформированных объёмов.

Таким образом, открытым вопросом в разработанной теории остаётся механизм определения координаты ( $x_0$ ), т.е. начала пластического течения металла. Можно заключить, что определение характера затухания скорости пластического течения металла, а также границ зоны упругопластического деформирования является ключевым и достаточно сложным вопросом, требующим дополнительных исследований.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА—REFERENCES

1. Yu. N. Alekseev, *Vvedenie v Teoriyu Obrabotki Metallov Davleniem Prokatkoy i Rezaniem* [Introduction to the Theory of Metal Processing Pressure Rolling and Cutting] (Kharkov: Izdatel'stvo KhGU: 1969) (in Russian).

2. Yu. N. Alekseev and O. F. Zamshev, *Obrabotka Metallov Davleniem*, No. 7: 132 (1971) (in Russian).
3. N. Ya. Fabrikant, *Aerodinamika* [Aerodynamics] (Moscow: Nauka: 1964) (in Russian).
4. L. G. Loytsyanskiy, *Mekhanika Zhidkosti i Gaza* [Mechanics of Fluid and Gas] (Moscow: Nauka: 1978) (in Russian).
5. H. Kolsky, *Volny Napryazheniya v Tverdykh Telakh* [Stress Waves in Solids] (Moscow: Izd-vo Inostr. Lit-ry: 1953) (in Russian).
6. M. O. Kurin and M. V. Surdu, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **39**, No. 3: 401 (2017) (in Ukrainian).
7. V. K. Starkov, *Fizika i Optimizatsiya Rezaniya Materialov* [Physics and Optimization of Cutting Materials] (Moscow: Mashinostroenie: 2009) (in Russian).
8. V. S. Kushner and O. Yu. Burgonova, *Teoriya Struzhkoobrazovaniya* [Theory of Chip Formation] (Omsk: Izd-vo OmGTU: 2011) (in Russian).
9. A. M. Rozenberg and A. N. Eremin, *Elementy Teorii Protsessa Rezaniya Metallov* [Elements of the Theory of the Process of Metal Cutting] (Moscow–Sverdlovsk: Mashgiz. Uralo-Sib. Otdelenie: 1956) (in Russian).