УДК 519.6
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.1.09

ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЯВНЫХ МЕТОДОВ ВАРИАЦИОННОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л.Л. ГАРТ

Аннотация. Исследовано проекционно-итерационные методы регуляризации, основанные на явных методах вариационного типа (скорейшего спуска и минимальных невязок), для решения некорректных линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве, для которых не выполняется третье условие корректности задачи по Адамару (устойчивость). Предложенный подход состоит в замене исходного некорректного уравнения некоторой последовательностью более простых аппроксимирующих его уравнений, заданных в конечномерных подпространствах исходного пространства. Для каждого из «приближенных» уравнений строится с помощью явного вариационного метода лишь несколько приближений, последнее из которых принимается в качестве начального приближения в итерационном процессе для следующего «приближенного» уравнения. Доказаны теоремы о сходимости проекционно-итерационных методов, получены оценки погрешности. Даны рекомендации по выбору регуляризующего количества итераций.

Ключевые слова: некорректное уравнение, оператор, пространство, последовательность, приближение, итерационный метод, невязка, погрешность, проекционно-итерационный метод, сходимость, оценка.

ВВЕДЕНИЕ

Теория некорректных задач и методов их приближенного решения — активно развивающееся направление математики, имеющее разнообразные приложения во многих областях естествознания, техники и управления. Некорректно поставленные задачи возникают в процессе математического моделирования в геофизике, астрофизике, компьютерной томографии, при обработке и интерпретации данных физических экспериментов [1–3]. Интенсивное развитие теории некорректных задач во многом обусловлено появлением в последние десятилетия высокопроизводительных вычислительных систем. Такие задачи формулируются, как правило, в виде операторных уравнений, задач минимизации функционалов, а также задач вычисления значений неограниченных операторов. Операторы задаются обычно с той или иной погрешностью, поскольку источником исходных данных на практике часто являются эксперименты и измерения.

Значительная часть некорректных задач может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Au = f \tag{1}$$

с заданным оператором A, действующим из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ ($\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ — метрические пространства, в отдельных случаях банаховы или гильбертовы), и элементом $f \in \mathbf{Y}$.

Основные результаты по некорректным задачам отражены в работах М.М. Лаврентьева [4], А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина [5], В.А. Морозова [6], В.К. Иванова, В.В. Васина и В.П. Тананы [7], Г.М. Вайникко и А.Ю. Веретенникова [8]. Наиболее общим из известных подходов к решению некорректных задач является подход, основанный на введенном А.Н. Тихоновым понятии регуляризатора. Использование регуляризатора задачи дает возможность сколь угодно точного ее решения при достаточно точных исходных данных.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы. Первые методы приближений, дающие в пределе точные решения уравнения (1), если данные (оператор A и правая часть f) заданы точно, были предложены в 30-е годы прошлого века в работах Т. Карлемана, Г.М. Голузина и В.И. Крылова, И.Г. Малкина. В работе [4] М.М. Лаврентьев обосновал сходимость метода последовательных приближений при приближенной правой части линейных уравнений и распространил полученные результаты на случай нелинейных уравнений. Изучению итерационных методов посвящены работы В.Н. Страхова [9], М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко [10]. Различные схемы итерационных методов, предложенные А.С. Апарциным, В.К. Ивановым, М.М. Лаврентьевым, В. Липфертом, А.Б. Бакушинским и А.В. Гончарским, В.А. Морозовым, В.В. Васиным, применялись для решения многих некорректных задач в банаховых и гильбертовых пространствах. Метод простой итерации и итерационные методы вариационного типа для решения некорректных уравнений с приближенными данными изучались в работах А.А. Самарского и П.Н. Вабищевича [1], О.А. Лисковца и Я.В. Константиновой [11].

Помимо итерационных методов для приближенного решения некорректных задач широко применяются проекционные методы, позволяющие (по Л.В. Канторовичу) уравнение (1), рассматриваемое в каком-то сложном пространстве, заменить приближенным уравнением, заданным в более простом пространстве, и принять точное решение приближенного уравнения как приближение к решению исходного уравнения. Теоретическому обоснованию и различным приложениям проекционных методов посвящены работы С.Г. Михлина, Л.В. Канторовича, Н.И. Польского, М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, В.В. Иванова, В.В. Петришина, а также Ю.И. Грибанова, Б.Г. Габдулхаева, А.Ю. Лучки, С.Д. Балашовой и других авторов. При этом привлечение идей функционального анализа дало возможность выработать единый подход к решению разнообразных задач, поскольку различные конкретные виды уравнений представляют собой частные случаи некоторого операторного уравнения, а также теоретически обосновать исследуемые методы.

Несмотря на широкую область применения, проекционные методы имеют недостатки. Хотя приближенные уравнения и проще исходного, тем не менее получение их точных решений на практике затруднительно, а иногда и нецелесообразно (из-за погрешностей задания исходных данных). Сложным является также выбор порядка приближенного уравнения, который обеспечил бы получение решения с заданной точностью. Если решение приближенного уравнения некоторого порядка n не удовлетворяет поставленным требованиям, то приходится решать уравнение более высокого порядка, никак не используя при этом результат, полученный на предыдущем шаге.

Синтез проекционных и итерационных методов, основанный на возможности применения итерационных методов для приближенного решения приближенных уравнений, привел к возникновению группы методов под названием проекционно-итерационных. Так, согласно идее С.Д. Балашовой [12], реализованной для корректно поставленных задач, для каждого из приближенных уравнений (n-го уравнения) следует находить итерационным методом лишь несколько (k_n) приближений, последнее из которых полагать равным начальному приближению к решению следующего (($n+1$)-го) уравнения. Такой подход естественно устраняет трудности, возникающие при решении исходного уравнения обычным проекционным методом. Кроме того, применение итерационных методов не к исходному уравнению, а к более простым приближенным уравнениям позволяет наиболее просто строить последовательность приближений к решению, а также облегчает задачу о выборе начального приближения.

В данной работе согласно общей методологии [12, 13] впервые исследуются проекционно-итерационные методы решения некорректного линейного операторного уравнения (1) с приближенной правой частью, основанные на явных итерационных методах вариационного типа, в частности методах минимальных невязок и скорейшего спуска.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задано уравнение вида (1), в котором A — линейный ограниченный самосопряженный и положительный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ со скалярным произведением (u, v) произвольных элементов $u, v \in \mathrm{H}$ и порождаемой им нормой $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$, $u \in \mathbf{H}$. Предположим, что обратный оператор A^{-1} существует, но не является ограниченным в $\mathbf{H}$, т.е. не выполняется третье условие корректности задачи по Адамару (устойчивость) [5]. Некорректность уравнения (1) обуславливается тем, что собственные значения λ_m, $m = 1, 2, ...$ оператора A, упорядоченные по убыванию ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_m \geq ... > 0$), стремятся к нулю при $m \to \infty$, что влечет плохую его обусловленность. Будем обозначать через $u^* \in \mathrm{H}$ точное решение уравнения (1).

Отметим, что если в уравнении (1) оператор A не является самосопряженным и положительным, то можно провести предварительную симметризацию по Гауссу и рассматривать вместо уравнения (1) эквивалентное ему симметризованное уравнение $A^* A u = A^* f$ с положительным (а значит, самосопряженным) в $\mathbf{H}$ линейным оператором $A^* A$, где A^* — сопряженный оператор по отношению к A.

Цель работы — теоретическое обоснование проекционно-итерационного подхода для решения некорректных линейных операторных уравнений вида (1) в гильбертовом пространстве, а именно получение достаточных условий сходимости, оценок погрешности и скорости сходимости проекционно-итерационной реализации явных методов вариационного типа.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Наряду с уравнением (1) рассматрим последовательность приближенных уравнений

$$A_{\mathrm{n}}\, u_{\mathrm{n}} = f_n,\ n = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

где A_n — линейный оператор в $\mathbf{H}_{\mathrm{n}}$; $\{\mathbf{H}_{\mathrm{n}}\}$ — возрастающая последовательность конечномерных подпространств исходного пространства $\mathbf{H}$ ($\mathrm{H}_1 \subset \mathrm{H}_2 \subset \dots \subset \mathbf{H}_n \subset \dots \subset \mathbf{H}$, $\mathbf{H}_1 \neq \varnothing$); $f_n = P_n f$, P_n — оператор ортогонального проектирования $\mathbf{H}$ на $\mathbf{H}_{\mathrm{n}}$ ($P_n^2 = P_n$, $P_n^* = P_n$, $\|P_n\| = 1$).

Введенные пространства и операторы при каждом натуральном $n \in N$ свяжем условиями близости:

$$\|A\,u - P_n A\,u\| \le \xi_n\, \|u\|,\ \forall\, u \in H; \tag{3}$$

$$\|A_n u_n - P_n A\, u_n\| \le \alpha_n \|u_n\|,\ \forall\, u_n \in H_n; \tag{4}$$

$$\|P_n f - u\| \le \eta_n\, \|f\|,\ \forall\, \mathrm{f} \in H, \tag{5}$$

где ξ_n, α_n, η_n — положительные числа, не зависящие от $u \in H$ и $u_n \in H_n$, причем $\xi_n \to 0$, $\alpha_n \to 0$, $\eta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $\mathrm{Ker}\, A = \{u \in \mathbf{H}:\ A\, u = 0\}$ — подпространство нулей оператора A ($\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$), $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \setminus \mathrm{Ker}\, A$ — фактор-пространство пространства H по подпространству $\mathrm{Ker}\, A$, а $\overline{A} : \overline{H} \to H$ — линейный оператор, индуцированный оператором A в фактор-пространстве $\overline{\mathbf{H}}$ [14]. Сходимость в $\mathbf{H}$ проекционного метода решения уравнения (1) установлена с использованием результатов работы [15].

Теорема 1. Пусть уравнение (1) разрешимо при любой правой части $\mathrm{f} \in \mathrm{H}$ и выполнены условия близости (4), (5), а также условие

$$\forall\, u_n \in H_n\ \ \exists\, \mathrm{z}_n \in H_n:\ \|A\, u_n - z_n\| \le \beta_n\, \|u_n\|,\ \beta_n \to 0,\ n \to \infty. \tag{6}$$

Тогда при всех $n \ge N_0 \ge 1$, удовлетворяющих неравенству

$$\rho_n = \left\|\overline{A}^{-1}\right\| (\alpha_n + 2\,\beta_n) < 1,$$

приближенные уравнения (2) также разрешимы при любой правой части $f_n \in \mathbf{H}_n$ и последовательность $\{u_n^*\}$ их точных решений сходится в $\mathbf{H}$ к решению u^* уравнения (1) с оценкой погрешности

$$\left\| u_n^* - u^* \right\| \le \gamma_n,\ n \ge N_0, \tag{7}$$

где $\gamma_n = 2\left\|\overline{A}^{-1}\right\| \left\|f - A\,\mathrm{u}_n^*\right\| = O(\eta_n + \alpha_n + 2\,\beta_n)$.

Отметим, что из положительности исходного оператора A в $\mathbf{H}$ и выполнимости условий близости (3), (4) вытекает свойство положительности каждого из операторов A_n в $\mathbf{H}_n$, начиная с некоторого номера $n = N_1 \ge 1$

[12]. Кроме того, из выполнимости условий (3), (4) следует, что для каждого собственного значения λ_m оператора A существует последовательность $\{\lambda_{m,n}\}$ собственных значений операторов A_n такая, что $\lambda_{m,n} \to \lambda_m$ при $n \to \infty$, и наоборот, всякая предельная точка любой последовательности собственных значений операторов A_n является собственным значением оператора A. При этом, если $A_n = P_n A$, то $\lambda_m \le \lambda_{m,n}$ и $\lambda_{m,n+1} \le \lambda_{m,n}$ для всех натуральных номеров $m \in N$ и $n \ge N_1$ [10]. В частности, если оператор A переводит $\mathbf{H}_n$ в $\mathbf{H}_n$, то с учетом (3), (4) можно получить для любого $u_n \in \mathbf{H}_n$ оценку

$$(A_n u_n, u_n) = (Au_n, u_n) + \big((A_n - A)u_n, u_n\big) \le \lambda_1 \|u_n\|^2 + \|(A_n - A)u_n\| \, \|u_n\| \le$$

$$\le \lambda_1 \|u_n\|^2 + \big(\|A_n u_n - P_n A u_n\| + \|P_n A u_n - Au_n\|\big)\|u_n\| \le$$

$$\le (\lambda_1 + \alpha_n + \xi_n)\|u_n\|^2 = \lambda_{1,n} \|u_n\|^2,$$

из которой следует вследствие экстремального свойства собственных значений самосопряженных ограниченных операторов, что верхние границы λ_1 и $\lambda_{1,n}$ спектров A и A_n соответственно связаны соотношением

$$\lambda_{1,n} = \lambda_1 + \alpha_n + \xi_n, \ n \ge N_1 .$$

Таким образом, при сделанных предположениях об операторе A исходной задачи очевидно, что собственные значения $\lambda_{j,n}$ ($j = 1, 2, ..., \ell_\mathrm{n}$, $\ell_\mathrm{n} = \dim \mathbf{H}_n$) операторов A_n, упорядоченные по убыванию ($\lambda_{1,n} \ge \lambda_{2,n} \ge \ldots$ $\ldots \ge \lambda_{\ell_n,n} > 0$), стремятся к нулю при $n \to \infty$, что влечет малую устойчивость каждого из приближенных уравнений (2), начиная с номера $n = N = \max\{N_0, N_1\}$.

Во многих прикладных исследованиях типичной является ситуация с заданием исходных данных с погрешностью. Эту общую ситуацию промоделируем предположением, что правая часть уравнения (1) задана с погрешностью $\delta > 0$, т.е. вместо $f \in \mathbf{H}$ известно $\mathrm{f}_\delta \in \mathbf{H}$ такое, что

$$\| f - f_\delta \| \le \delta . \tag{8}$$

Требуется по $f_\delta \in \mathbf{H}$ построить приближенное решение $u^*(\delta) \in \mathbf{H}$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $u^*(\delta) \to u^*$ при $\delta \to 0$.

Для приближенного решения задачи (1) при условии (8) аппроксимируем уравнение

$$A u = f_\delta \tag{9}$$

по той же схеме, что и выше, последовательностью приближенных уравнений

$$A_\mathrm{n} u_\mathrm{n} = f_n(\delta), \ n \ge N , \tag{10}$$

где $f_n(\delta) = P_n f_\delta$. Так как P_n — ортогональный проектор $\mathbf{H}$ на $\mathbf{H}_n$, то отклонение правых частей соответствующих приближенных уравнений (2) и (10) по норме H не превышает погрешности δ задания правой части уравнения (1):

$$\| f_n - f_n(\delta) \| = \| P_n f - P_n f_\delta \| \le \| P_n \| \| f - f_\delta \| \le \delta \,. \tag{11}$$

На основании теоремы 1 из разрешимости уравнения (1) при любой правой части и выполнимости условий (4)–(6) следует разрешимость каждого из приближенных уравнений (10), причем последовательность точных решений $u_n^*(\delta) \in \mathbf{H}_n$ уравнений (10) сходится к точному решению $u^*(\delta) \in \mathbf{H}$ уравнения (9) с оценкой погрешности

$$\left\| u_n^*(\delta) - u^*(\delta) \right\| \le \gamma_n(\delta) = 2 \left\| \overline{A}^{-1} \right\| \left\| f_\delta - A u_n^*(\delta) \right\| , \; n \ge N \,.$$

Для решения каждого из приближенных уравнений (10) будем применять явный двухслойный итерационный метод Ричардсона вида

$$u_n^{(k+1)}(\delta) = u_n^{(k)}(\delta) - \tau_n^{(k+1)} (A_\text{n} \, u_n^{(k)}(\delta) - f_n(\delta)) \,, \; k = 0,1,\ldots \,, \; n \ge N \,, \tag{12}$$

где $u_n^{(k)}(\delta) \in \mathbf{H}_n$ — k-е итерационное приближение к точному решению $u_n^*(\delta) \in \mathbf{H}_n$ уравнения (10); $\tau_n^{(k+1)} > 0$ — итерационный параметр. Известно [16], что для метода (12) с положительным оператором A_n существует способ выбора оптимальных (чебышевских) итерационных параметров, однако из-за близости к нулю нижней границы спектра оператора A_n сложно конкретизировать скорость сходимости такого метода в $\mathbf{H}_n$ и указать априорное число итераций $k_n(\delta)$, согласованное с заданным уровнем погрешности правой части (оценка (11)).

Будем выбирать параметры $\tau_n^{(k+1)}$ в формуле (12) из условия минимума погрешности $\left\| u_n^{(\text{k}+1)}(\delta) - u_n^*(\delta) \right\|_{D_n}$ итерационного метода при заданной погрешности $\left\| u_n^{(\text{k})}(\delta) - u_n^*(\delta) \right\|_{D_n}$, где D_n — положительный оператор в $\mathbf{H}_n$, $\| u_n \|_{D_n} = \sqrt{(D_n u_n, u_n)}$. В зависимости от выбора D_n получают различные итерационные методы, преимущество которых состоит в том, что они не требуют знания границ спектра оператора A_n в отличие от метода с чебышевским набором параметров.

ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Обозначим через $r_n^{(k)}(\delta) = A_n u_n^{(k)}(\delta) - f_n(\delta)$ невязку метода (12) на k-й итерации, полученную при подстановке k-го итерационного приближения $u_n^{(k)}(\delta)$ в уравнение (10), а через $z_n^{(k)}(\delta) = u_n^{(k)}(\delta) - u_n^*(\delta)$ — погрешность метода (12) на k-й итерации. Заметим, что погрешность и невязка связаны равенством $A_n z_n^{(k)}(\delta) = r_n^{(k)}(\delta)$, с учетом которого из (12) легко получить, что невязка $r_n^{(k)}(\delta)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и погрешность:

$$r_n^{(k+1)}(\delta) = r_n^{(k)}(\delta) - \tau_n^{(k+1)} A_n\, r_n^{(k)}(\delta),\ n \ge N\,. \qquad (13)$$

Метод минимальных невязок состоит, как известно, в выборе итерационного параметра $\tau_n^{(k+1)}$ в формуле (12) из условия минимума $\left\| r_n^{(k+1)}(\delta) \right\|$ при заданной норме $\left\| r_n^{(k)}(\delta) \right\|$, что приводит с учетом уравнения (13) к явному выражению для параметра

$$\tau_n^{(k+1)} = \frac{(A_n r_n^{(k)}, r_n^{(k)})}{\left\| A_n r_n^{(k)} \right\|^2},\ r_n^{(k)} \equiv A_n u_n^{(k)}(\delta) - f_n(\delta)\,. \qquad (14)$$

Очевидно, роль оператора D_n при каждом $n \ge N$ выполняет тождественный оператор.

Рассмотрим проекционно-итерационный принцип решения задачи (1) при условии (8), основанный на применении к решению каждого из приближенных уравнений (10), начиная с номера $n = N$, итерационного метода (12), (14). Построив с помощью этого метода для n-го приближенного уравнения несколько приближений $u_n^{(k)}(\delta) \in H_n$, $k = 1, 2, ..., k_n$ ($k_n \le k(\delta)$) и положив последнее из них равным начальному приближению для следующего, ($n+1$)-го уравнения, получим последовательность $\{u_n^{(k_n)}(\delta)\}_{n=N}^{\infty}$ приближений к решению $u^* \in \mathbf{H}$ уравнения (1):

$$u_n^{(k+1)}(\delta) = u_n^{(k)}(\delta) - \tau_n^{(k+1)}(A_n\, u_n^{(k)}(\delta) - f_n(\delta)),\ k = 0, 1, ..., k_n - 1\,; \qquad (15)$$

$$u_{n+1}^{(0)}(\delta) = u_n^{(k_n)}(\delta),\ n \ge N\,;\ u_N^{(0)}(\delta) \in H_N\,. \qquad (16)$$

Достаточные условия сходимости проекционно-итерационного варианта метода минимальных невязок устанавливает теорема 2.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и в проекционно-итерационном методе (14)–(16) при каждом $n \ge N$ количество итераций $k_{nk} \le k(\delta)$, причем $k(\delta)\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. Тогда последовательность $\{u_n^{(k_n)}(\delta)\}_{n=N}^{\infty}$, определяемая по формулам (14)–(16), сходится в $\mathbf{H}$ к решению u^* уравнения (1) при условии (8), если $\delta \to 0$, и справедлива оценка погрешности

$$\left\| u_n^{(k_n)}(\delta) - u^* \right\| \le \chi_n(\delta),\ n \ge N\,, \qquad (17)$$

где $\chi_n(\delta) = \mu'_n \left\| z_N^{(0)} \right\| + \mu''_n + \delta \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^{(k)} + \gamma_n$; $z_N^{(0)} = u_N^{(0)}(\delta) - u_N^*$, γ_n дается формулой (7), $\mu'_n = \prod_{j=N}^{n} q_j^{k_j}$, $\mu''_n = \sum_{m=N}^{n-1} \left(\delta \sum_{k=1}^{k_m} \tau_m^{(k)} + \gamma_m + \gamma_{m+1} \right) \prod_{j=m+1}^{n} q_j^{k_j}$, $0 < q_j < 1$.

Доказательство. Рассмотрим при $n \geq N$ неравенство

$$\left\| u_n^{(k_n)}(\delta) - u^* \right\| \leq \left\| u_n^{(k_n)}(\delta) - u_n^* \right\| + \left\| u_n^* - u^* \right\|, \tag{18}$$

где $u_n^* \in H_n$ — точное решение приближенного уравнения (2). Для второго слагаемого неравенства (18) имеем оценку (7). Оценим первое слагаемое.

Из уравнения (15) непосредственно получаем

$$u_n^{(k_n)}(\delta) = \left(\prod_{j=0}^{k_n-1} (E - \tau_n^{(k_n-j)} A_{\text{n}}) \right) u_n^{(0)}(\delta) +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{k_n} \tau_n^{(i)} \prod_{j=i}^{k_n-1} (E - \tau_n^{(k_n+i-j)} A_{\text{n}}) \right) f_n(\delta), \; n \geq N, \tag{19}$$

где $u_n^{(0)}(\delta) \in \mathbf{H}_n$ — начальное приближение, определяемое по формулам (16).

Для точного решения $u_n^* \in H_n$ можно воспользоваться аналогичным представлением

$$u_n^* = \left(\prod_{j=0}^{k_n-1} (E - \tau_n^{(k_n-j)} A_{\text{n}}) \right) u_n^* + \left(\sum_{i=1}^{k_n} \tau_n^{(i)} \prod_{j=i}^{k_n-1} (E - \tau_n^{(k_n+i-j)} A_{\text{n}}) \right) f_n, \; n \geq N,$$

которое соответствует итерационному решению уравнения (2), когда начальное приближение совпадает с его точным решением.

С учетом (19) для погрешности $z_n^{(k_n)} = u_n^{(k_n)}(\delta) - u_n^*$ получим выражение

$$z_n^{(k_n)} = v_n^{(k_n)} + w_n^{(k_n)}, \; \text{n} \geq N, \tag{20}$$

где

$$v_n^{(k_n)} = \left(\prod_{j=0}^{k_n-1} (E - \tau_n^{(k_n-j)} A_n) \right) \text{z}_n^{(0)},$$

$$w_n^{(k_n)} = \left(\sum_{i=1}^{k_n} \tau_n^{(i)} \prod_{j=i}^{k_n-1} (E - \tau_n^{(k_n+i-j)} A_n) \right) (f_n(\delta) - f_n). \tag{21}$$

Первое слагаемое в выражении (20) является стандартным для проекционно-итерационных методов, во втором же слагаемом учитывается погрешность в задании правой части уравнения (2).

Обозначим через $T_n^{(k)} = E - \tau_n^{(k)} A_n$ самосопряженный в $\mathbf{H}_\text{n}$ оператор перехода от итерации к итерации в методе (12), (14) и с учетом уравнения (13) будем иметь:

$$r_n^{(k+1)}(\delta) = (E - \tau_n^{(k+1)} A_{\text{n}}) \, r_n^{(k)}(\delta) = T_n^{(k+1)} r_n^{(k)}(\delta);$$

$$\left\| r_n^{(k+1)}(\delta) \right\| \leq \left\| T_n^{(k+1)} \right\| \left\| r_n^{(k)}(\delta) \right\|, \; k = 0, 1, ..., k_n - 1. \tag{22}$$

В то же время для указанных номеров k при выборе $\tau_n^{(k+1)}$ согласно выражению (14) норма невязки $\left\| r_n^{(k+1)}(\delta) \right\|$ достигает минимума; поэтому, положив в уравнении (13) вместо $\tau_n^{(k+1)}$ любое другое, постоянное при данном $n \geq N$, значение $\tau_n \in (0, 2/\lambda_{1,n})$, получим неравенство

$$\left\| r_n^{(k+1)}(\delta) \right\| = \left\| (E - \tau_n^{(k+1)} A_{\text{n}})\, r_n^{(k)}(\delta) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| (E - \tau_n A_{\text{n}})\, r_n^{(k)}(\delta) \right\| \leq \left\| E - \tau_n A_{\text{n}} \right\| \left\| r_n^{(k)}(\delta) \right\| .$$

А так как для положительного в $\mathbf{H}_n$ оператора A_n при условии $\tau_n \in (0, 2/\lambda_{1,n})$ имеем [1] $\left\| E - \tau_n A_n \right\| = q_n < 1$, то $\left\| r_n^{(k+1)}(\delta) \right\| \leq q_n \left\| r_n^{(k)}(\delta) \right\|$ для всех $k = 0, 1, ..., k_n - 1$. Тогда с учетом (22) получаем следующую оценку для нормы оператора перехода:

$$\left\| T_n^{(k)} \right\| = \left\| E - \tau_n^{(k)} A_{\text{n}} \right\| \leq q_n < 1,\ k = 1, 2, ..., k_n,\ n \geq N . \qquad (23)$$

Для выражения $w_n^{(k_n)}$, $n \geq N$ в (21) на основании соотношений (11) и (23) будем иметь

$$\left\| w_n^{(k_n)} \right\| \leq \left\| f_n(\delta) - f_n \right\| \sum_{i=1}^{k_n} \tau_n^{(i)} \prod_{j=i}^{k_n - 1} \left\| E - \tau_n^{(k_n + i - j)} A_n \right\| \leq$$

$$\leq \left\| f_n(\delta) - f_n \right\| \sum_{i=1}^{k_n} \tau_n^{(i)} q_n^{k_n - i} \leq \delta \sum_{i=1}^{k_n} \tau_n^{(i)} . \qquad (24)$$

Далее, поскольку начальная погрешность метода для уравнения (2) с учетом (16) представима в виде $z_n^{(0)} = u_n^{(0)}(\delta) - u_n^* = u_{n\text{-}1}^{(k_n\text{-}1)}(\delta) - u_n^*$, то

$$\left\| z_n^{(0)} \right\| \leq \left\| z_{n\text{-}1}^{(k_n\text{-}1)} \right\| + \left\| u_{n-1}^* - u^* \right\| + \left\| u^* - u_n^* \right\| \leq \left\| z_{n\text{-}1}^{(k_n\text{-}1)} \right\| + \gamma_{n-1} + \gamma_n,\ n > N,$$

и для $v_n^{(k_n)}$ на основании соотношений (20), (21), (23), (24) выполняется рекурсивное неравенство

$$\left\| v_n^{(k_n)} \right\| \leq \left\| z_n^{(0)} \right\| \prod_{j=0}^{k_n - 1} \left\| E - \tau_n^{(k_n - j)} A_{\text{n}} \right\| \leq \left(\left\| z_{n-1}^{(k_{n-1})} \right\| + \gamma_{n-1} + \gamma_n \right) q_n^{k_n} \leq$$

$$\leq \left(\left\| v_{n-1}^{(k_{n-1})} \right\| + \left\| w_{n-1}^{(k_{n-1})} \right\| + \gamma_{n-1} + \gamma_n \right) q_n^{k_n} \leq ,$$

$$\leq \left(\left\| v_{n-1}^{(k_{n-1})} \right\| + \delta \sum_{i=1}^{k_{n-1}} \tau_{n-1}^{(i)} + \gamma_{n-1} + \gamma_n \right) q_n^{k_n} \quad n > N ;$$

$$\left\| v_N^{(k_N)} \right\| \leq \left\| z_N^{(0)} \right\| \prod_{j=0}^{k_N - 1} \left\| E - \tau_N^{(k_N - j)} A_{\text{N}} \right\| \leq \left\| z_N^{(0)} \right\| q_N^{k_N} .$$

Пользуясь этими соотношениями, получим оценку

$$\left\| v_n^{(k_n)} \right\| \leq \left\| z_N^{(0)} \right\| \prod_{j=N}^{n} q_j^{k_j} + \sum_{m=N}^{n-1} \left(\delta \sum_{i=1}^{k_m} \tau_m^{(i)} + \gamma_m + \gamma_{m+1} \right) \prod_{j=m+1}^{n} q_j^{k_j},\ n \geq N . \quad (25)$$

Возвращаясь к неравенству (18) и оценивая первое слагаемое в нем с учетом формул (20), (24), (25), приходим к оценке погрешности (17), из которой видно, что проекционно-итерационная последовательность приближений $\{u_n^{(k_n)}(\delta)\}_{n=N}^{\infty}$ сходится в H к решению u^* уравнения (1) при условии (8), когда $n \to \infty$ и $\delta \to 0$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь проекционно-итерационный метод решения задачи (1), (8), основанный на применении к решению каждого из приближенных уравнений (10), начиная с номера $n = N$, итерационного метода скорейшего спуска. Параметр $\tau_n^{(k+1)}$ в формулах (15), (16) выбираем из условия минимума энергетической нормы погрешности $\left\| z_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{k}+1)}(\delta) \right\|_{A_n}$ при заданной норме $\left\| z_n^{(k)}(\delta) \right\|_{A_n}$, которое с учетом уравнения для погрешности (вида (13)) приводит к выражению

$$\tau_n^{(k+1)} = \frac{(r_n^{(k)}, r_n^{(k)})}{(A_n r_n^{(k)}, r_n^{(k)})}, \; r_n^{(k)} \equiv A_n u_n^{(k)}(\delta) - f_n(\delta). \tag{26}$$

Как и в теореме 2 легко показать, что

$$\left\| z_n^{(k+1)}(\delta) \right\|_{A_n} = \left\| (E - \tau_n^{(k+1)} A_n)\, z_n^{(k)}(\delta) \right\|_{A_n} \le$$

$$\le \left\| (E - \tau_n A_{\mathrm{n}})\, z_n^{(k)}(\delta) \right\|_{A_{\mathrm{n}}} \le \left\| E - \tau_n A_n \right\| \left\| z_n^{(k)}(\delta) \right\|_{A_n}$$

при любых значениях $\tau_n \in (0, 2/\lambda_{1,n})$, $k = 0,1,\ldots,k_n - 1$, $n \ge N$. Поэтому для оператора перехода в методе скорейшего спуска (12), (26) справедлива та же оценка, что и в методе минимальных невязок (12), (14):

$$\left\| T_n^{(k)} \right\| = \left\| E - \tau_n^{(k)} A_{\mathrm{n}} \right\| \le \left\| E - \tau_n A_{\mathrm{n}} \right\| = q_n < 1, \; k = 1,2,\ldots,k_n, \; n \ge N,$$

откуда следует, что утверждения теоремы 2 сохраняет силу и для проекционно-итерационной реализации (15), (16), (26) метода скорейшего спуска.

Из доказательства теоремы 2 о сходимости явных проекционно-итерационных методов вариационного типа для решения задачи (1), (8) вытекает, что последовательность $\{u_n^{(k_n)}(\delta)\}_{n=N}^{\infty}$ сходится к u^*, если $\delta \to 0$, при произвольном выборе чисел k_n, в частности, все числа k_n могут быть равными 1. Следует, однако, иметь в виду, что с возрастанием n увеличивается объем вычислительной работы, необходимы для нахождения очередного приближения. Поэтому нужно стремиться к тому, чтобы за счет подходящего выбора k_n по возможности максимально приблизиться к искомому решению при данном n и только тогда переходить к уравнению (10) большей размерности. Не следует также выбирать число k_n при данном n слишком большим, поскольку, начиная с некоторого момента, увеличение этого числа не приводит к существенному улучшению (по отношению к решению

u^* исходного уравнения) очередных приближений. Таким образом, возникает вопрос о целесообразном выборе чисел k_n ($n \ge N$), ответ на который в общем случае затруднителен, однако могут быть даны некоторые рекомендации.

Подстановка формул (20), (24) и (7) в неравенство (18) приводит к оценке

$$\left\| u_n^{(k_n)}(\delta) - u^* \right\| \le \left\| v_n^{(k_n)} \right\| + \delta\, k_n \tilde{\tau}_n + \gamma_n\,,\ n \ge N\,, \tag{27}$$

где $\tilde{\tau}_n = \max\limits_{1 \le k \le k_n} \tau_n^{(k)}$. Эта оценка показывает, что в случае применения проекционно-итерационных методов (15), (16) с выбором итерационных параметров согласно выражению (14) (или (26)) для решения задачи (1), (8) параметром регуляризации является количество итераций k_n, которое следует согласовывать как с погрешностью δ в задании правой части, так и с погрешностью γ_n проекционного метода. Первое слагаемое в правой части (27) стремится к нулю при $k_n \to \infty$, второе — растет с количеством итераций, третье же не зависит от k_n. Понятно, что число k_n достаточно выбрать таким, чтобы величины $\left\| v_n^{(k_n)} \right\|$, $k_n \tilde{\tau}_n \delta$ и γ_n имели один и тот же порядок малости; в частности, роль k_n может играть наименьшее из чисел k ($k = 0, 1, \ldots$), удовлетворяющих неравенству

$$\left\| v_n^{(k)} \right\| \le M\,(k\,\tilde{\tau}_n \delta + \gamma_n)\,,\ n \ge N\,, \tag{28}$$

где $M > 0$ — некоторая константа.

Следует отметить, что способом (28) определения чисел k_n удобно пользоваться лишь в тех случаях, когда используемые здесь величины, входящие в оценку погрешности (27), легко вычисляются, что не всегда выполняется при решении практических задач. Некоторые другие способы выбора чисел k_n ($n \ge N$) можно найти в работе [13].

Отметим, что методы минимальных невязок (12), (14) и скорейшего спуска (12), (26) при решении устойчивых уравнений вида (10) сходятся с той же скоростью, что и метод простой итерации с оптимальным параметром $\tau_n = 2/(\lambda_{1,n} + \lambda_{\ell_n,n})$ [16]. При решении же некорректных уравнений (10), когда отношение $\lambda_{1,n} / \lambda_{\ell_n,n}$ наибольшего и наименьшего собственных значений оператора A_n велико, эти методы сходятся довольно медленно. Проекционно-итерационный подход позволяет ускорить сходимость процесса итерационных приближений к решению исходной задачи (1), (8) и тем самым уменьшить количество вычислительных затрат, поскольку значительная часть этих приближений строится для приближенных уравнений (10) меньшей размерности при неизменной погрешности δ их правых частей. Ускорить сходимость итерационных методов при решении приближенных уравнений (10) можно применением неявных итерационных методов, в том числе с переменными итерационными параметрами.

ВЫВОДЫ

В работе впервые рассмотрен вопрос теоретического обоснования проекционно-итерационных методов, основанных на явных методах вариационного типа (скорейшего спуска и минимальных невязок), для решения некорректных линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве, для которых не выполняется третье условие корректности задачи по Адамару (устойчивость). Доказаны теоремы о сходимости методов, получены оценки погрешности. Даны рекомендации по выбору регуляризирующего количества итераций при решении каждого из приближенных уравнений, рассматриваемых в конечномерных подпространствах исходного пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А.А.* Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. — М.: Изд-во ЛКИ, 2009. — 480 с.
2. *Алгоритмический* анализ неустойчивых задач: Тез. докл. междунар. конф. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. — 306 с.
3. *Матысик О.В.* Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О.В. Матысик. — Брест: Изд-во БрГУ, 2014. — 213 с.
4. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. — 92 с.
5. *Тихонов А.Н.* Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
6. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В.А. Морозов. — М.: Изд-во МГУ, 1974. — 320 с.
7. *Иванов В.К.* Теория линейных некорректных задач и её приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. — М.: Наука, 1978. — 206 с.
8. *Вайникко Г.М.* Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. — М.: Наука, 1986. — 178 с.
9. *Страхов В.Н.* К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации / В.Н. Страхов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1973. — **13**, № 6. — С. 1602–1606.
10. *Красносельский М.А.* Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский и др. — М.: Наука, 1969. — 456 с.
11. *Константинова Я.В.* Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. — 1973. — № 1. — С. 9–15.
12. *Балашова С.Д.* Приближенные методы решения операторных уравнений / С.Д. Балашова. — Д.: ДГУ, 1980. — 112 с.
13. *Гарт Л.Л.* Явный проекционно-итерационный метод решения некорректных операторных уравнений / Л.Л. Гарт // Питання прикладної математики і математичного моделювання. — Д.: РВВ ДНУ, 2015. — Вип. 15. — С. 33–47.
14. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — СПб.: Невский Диалект, 2004. — 816 с.
15. *Габдулхаев Б.Г.* Теория приближенных методов решения операторных уравнений / Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2006. — 112 с.
16. *Самарский А.А.* Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — М.: Наука, 1989. — 432 с.

Поступила 13.06.2016