УДК 517.94
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2016.4.13

ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНОГО НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Ю.Є. БОХОНОВ

Анотація. Запропоновано підхід до знаходження періодичних розв'язків нелінійного диференціального рівняння другого порядку із запізненням. Відомо числово-аналітичний метод знаходження періодичних розв'язків для звичайних рівнянь другого порядку, що узагальнюється для рівнянь із запізненням, у якому рівняння зводиться до системи першого порядку. У пропонованому методі досліджено саме рівняння без зведення його до системи. Побудовано функцію Гріна для самоспряженого диференціального оператора другої похідної, що визначений на функціях, які задовольняють періодичні крайові умови. Наведено необхідні і достатні умови існування періодичних розв'язків рівняння. Отримано оцінку швидкості збіжності наближених обчислень.

Ключові слова: періодичні розв'язки, нелінійне диференціальне рівняння з запізненням, періодична крайова задача, функція Гріна, самоспряжений диференціальний оператор.

ВСТУП

Широко відомо числово-аналітичний методі знаходження періодичних розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку [1]–[3]. Його використовують також для знаходження періодичних розв'язків рівняння другого порядку шляхом зведення його до системи першого порядку. Узагальнення цього методу застосовують для розв'язання такої ж задачі для рівнянь та систем рівнянь із запізненням [4], [5]. У пропонованій роботі шукаються періодичні розв'язки для рівняння із запізненням другого порядку без зведення його до системи першого порядку. Таку методику запропоновано для звичайного рівняння другого порядку [6]. Періодичний розв'язок інтерпретується як розв'язок крайової задачі з періодичними умовами.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Знаходження періодичного розв'язку диференціального рівняння другого порядку із запізненням можна звести до розв'язання періодичної крайової задачі для цього рівняння на відрізку, довжина якого дорівнює періоду. Такий підхід не потребує зведення рівняння другого порядку до системи рівнянь першого порядку.

Отже, будемо шукати періодичні за t з періодом T розв'язки рівняння

$$\ddot{x} = f(t, x(t), x(t-\delta), \dot{x}(t), \dot{x}(t-\delta)) \qquad (1)$$

(зазвичай, $0 < \delta < T$).

Нехай функція $f(t,x,u,y,v)$ задовольняє такі умови:

а) неперервність і обмеженість на $D=(-\infty,\infty)\times[a,b]\times[a,b]\times[c,d][c,d]$`,

Позначимо

$$M=\sup_D\left|f(t,x,u,y,v)\right|; \tag{2}$$

б) періодичність за t з періодом T ,

в) виконання умови Ліпшиця:

$$\left|f(t,x_1,u_1,y_1,v_1)-f(t,x_2,u_2,y_2,v_2)\right|\le$$

$$\le K_0\left|x_1-x_2\right|+\widetilde{K}_0\left|u_1-u_2\right|+K_1\left|y_1-y_2\right|+\widetilde{K}_1\left|v_1-v_2\right|. \tag{3}$$

Будемо шукати розв'язок (1), який задовольняє крайові умови

$$x(0)=x(T),\ \ \dot{x}(0)=\dot{x}(T) \tag{4}$$

Зрозуміло, що його та його похідну можна періодично продовжити на всю вісь.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЕРІОДИЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Пропонується розглянути самоспряжений диференціальний оператор $(Lx)(t)=x''(t)$ у гільбертовому просторі $H=L_2(0,T)$, область визначення якого – функції, що мають абсолютно неперервну першу похідну, які задовольняють крайові умови (4). Задача знаходження періодичних розв'язків зводиться до задачі обернення оператора L. Треба, утім, зауважити, що цей оператор не має оберненого, оскільки, як легко бачити, $\lambda=0$ є його власним числом з одновимірним власним підпростором H_1, натягнутим на функцію $x(t)\equiv 1$. Із самоспряженості оператора випливає, що підпростір `$H$, ортогональний до одиниці, є інваріантним відносно $L$. При цьому $H=H_1\oplus`H$. Підпростір H, очевидно, складається із функцій, середнє яких за [0, T] $\bar{h}=\frac{1}{T}\int\limits_0^T h(t)\,dt=0\quad\forall h\in`H$ дорівнює нулю. Слід зауважити, що функція в правій частині рівняння (1) не належить до `H, тому далі будемо розглядати допоміжне рівняння

$$\ddot{x}=f(t,x(t),x(t-\delta),\dot{x}(t),\dot{x}(t-\delta))-\overline{f}. \tag{5}$$

Для побудови вказаного оберненого оператора використаємо авторську методику із праці [1], за допомогою якої знаходимо функцію Гріна:

$$G(t,\tau)=\frac{1}{2T}(2t\tau-\tau^2)+\frac{1}{2}\begin{cases}t-\tau,\ 0\le\tau\le t\le T;\\ \tau-t,\ 0\le t\le\tau\le T.\end{cases} \tag{6}$$

Тоді $x(t)=\int\limits_0^T G(t,\tau)\,h(\tau)\,d\tau.$ Звідси маємо: $x'(t)=\int\limits_0^T G_t'(t,\tau)\,h(\tau)\,d\tau,$ де

$$G'(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{\tau}{T} + \dfrac{1}{2}; & 0 \le \tau \le t \le T; \\ \dfrac{\tau}{T} - \dfrac{1}{2}; & 0 \le t \le \tau \le T. \end{cases} \tag{7}$$

Завдяки розкладу в пряму ортогональну суму $H = H_1 \oplus \grave{H}$ кожен розв'язок крайової задачі для рівняння (5) можна подати у вигляді $x(t) = x_0 + x_1(t)$, де $x_0 = \overline{x}$, $\overline{x_1} = 0$, тобто

$$x(t) = x_0 + \int_0^T G(t,\tau)\left(f(\tau, x(\tau), x(\tau-\delta), \dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau-\delta)) - \overline{f}\right) d\tau. \tag{8}$$

Разом з рівнянням (8) розглядається рівняння для похідної:

$$\dot{x}(t) = \int_0^T G_t'(t,\tau)\left(f(\tau, x(\tau), x(\tau-\delta), \dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau-\delta)) - \overline{f}\right) d\tau. \tag{9}$$

Система (8)–(9) розв'язується методом послідовних наближень. Якщо процес збігається, отримуємо розв'язок $x = \varphi(t, x_0)$, який при підстановці в рівняння (8) перетворює його в тотожність. Для того, щоб цей розв'язок був також розв'язком (1), очевидно необхідно і разом з виконанням умов (4) достатньо, щоб виконувалась умова

$$\int_0^T f(\xi, \varphi(\xi, x_0), \varphi(\xi-\delta, x_0), \dot{\varphi}(\xi, x_0), \dot{\varphi}(\xi-\delta, x_0))\, d\xi = 0, \tag{10}$$

тобто щоб число x_0 (яке є середнім від $x(t)$, розв'язку задачі) було коренем цього рівняння.

Використовуючи формули (6), (7), перетворимо систему (8)–(9).

Інтеграл у правій частині формули (8):

$$\int_0^T G(t,\tau)\left(f(\tau, x(\tau), x(\tau-\delta), \dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau-\delta)) - \overline{f}\right) d\tau =$$

$$= \int_0^T G(t,\tau)\, f(\tau, x(\tau), x(\tau-\delta), \dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau-\delta))\,dt -$$

$$- \int_0^T f(\xi, x(\xi), x(\xi), \dot{x}(\xi), \dot{x}(\xi-\delta))\,d\xi \left(\frac{1}{T} \int_0^T G(t,\tau)\,d\tau \right) =$$

$$= \int_0^T (G(t,\tau) - \overline{G}(t))\, f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2T} \left(\int_0^t \left(\frac{T^2}{12} - \left(\tau - t + \frac{T}{2} \right)^2 \right) f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_t^T \left(\frac{T^2}{12} - \left(\tau - t - \frac{T}{2} \right)^2 \right) f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\,d\tau \right).$$

Отже, рівняння (8) набуде вигляду

$$x(t)=x_0+\frac{1}{2T}\left(\int_0^t\left(\frac{T^2}{12}-\left(\tau-t+\frac{T}{2}\right)^2\right)f(\tau,x(\tau),x(\tau-\delta),\dot{x}(\tau),\dot{x}(\tau-\delta))d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_t^T\left(\frac{T^2}{12}-\left(\tau-t-\frac{T}{2}\right)^2\right)f(\tau,x(\tau),x(\tau-\delta),\dot{x}(\tau),\dot{x}(\tau-\delta))d\tau\right). \qquad (11)$$

Аналогічно перетворимо праву частину рівняння (9):

$$\dot{x}(t)=\frac{1}{T}\left(\int_0^t(t-\tau+\frac{T}{2})\,f(\tau,x(\tau),x(\tau-\delta),\dot{x}(\tau),\dot{x}(\tau-\delta))\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_t^T(t-\tau-\frac{T}{2})\,f(\tau,x(\tau),x(\tau-\delta),\dot{x}(\tau),\dot{x}(\tau-\delta))d\tau\right). \qquad (12)$$

Цілком зрозуміло, що нерухома точка цього оператора є розв'язком системи інтегральних рівнянь (8)–(9).

Уведемо в просторі $\mathbb{R}^2$ псевдонорму: $\mathrm{col}\left|(x_1,x_2)\right|=\mathrm{col}\left(\left|x_1\right|,\ \left|x_2\right|\right)$, а також для вектора-функції $\mathrm{col}\,(x_1(t),x_2(t))$:

$$\mathrm{col}\left\|(x_1,x_2)\right\|=\mathrm{col}\left(\left\|x_1\right\|,\ \left\|x_2\right\|\right)=\mathrm{col}\left(\max_{t\in[0,T]}\left|x_1(t)\right|,\max_{t\in[0,T]}\left|x_2(t)\right|\right).$$

Простір з такою псевдонормою буде частково впорядкованим, і для векторів $\mathrm{col}(x,y)$, $\mathrm{col}(\xi,\eta)$ при виконанні умов $x\le\xi,\ y\le\eta$ використовуватимемо позначення $\mathrm{col}(x,y)\le\mathrm{col}\,(\xi,\eta)$.

Шукати розв'язок системи (11)–(12) будемо методом послідовних наближень:

$$x_1(t)=x_0+\frac{1}{2T}\int_0^t\left(\frac{T^2}{12}-\left(t-\tau+\frac{T}{2}\right)^2\right)f(\tau,x_0,x_0,0,0)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2T}\int_t^T\left(\frac{T^2}{12}-\left(t-\tau-\frac{T}{2}\right)^2\right)f(\tau,x_0,x_0,0,0)d\tau\,;$$

$$\dot{x}_1(t)=\frac{1}{T}\left(\int_0^t\left(\tau-t+\frac{T}{2}\right)f(\tau,x_0,x_0,0,0)d\tau+\int_t^T\left(\tau-t-\frac{T}{2}\right)f(\tau,x_0,x_0,0,0)d\tau\right),$$

…………………………………………………………………

$$x_m(t)=x_0+$$

$$+\frac{1}{2T}\int_0^t\left(\frac{T^2}{12}-\left(t-\tau+\frac{T}{2}\right)^2\right)f(\tau,x_{m-1}(\tau),x_{m-1}(\tau-\delta),\dot{x}_{m-1}(\tau),\dot{x}_{m-1}(\tau-\delta))d\tau+$$

$$+\frac{1}{2T}\int_t^T\left(\frac{T^2}{12}-\left(t-\tau-\frac{T}{2}\right)^2\right)f(\tau,x_{m-1}(\tau),x_{m-1}(\tau-\delta),\dot{x}_{m-1}(\tau),\dot{x}_{m-1}(\tau-\delta))d\tau\,;$$

$$\dot{x}_m(t) = \frac{1}{T}\int_0^t \left(\tau - t + \frac{T}{2}\right) f(\tau, x_{m-1}(\tau), x_{m-1}(\tau-\delta), \dot{x}_{m-1}(\tau), \dot{x}_{m-1}(\tau-\delta))d\tau +$$

$$+\frac{1}{T}\int_t^T \left(\tau - t - \frac{T}{2}\right) f(\tau, x_{m-1}(\tau), x_{m-1}(\tau-\delta), \dot{x}_{m-1}(\tau), \dot{x}_{m-1}(\tau-\delta))d\tau .$$

Дослідимо цю послідовність на збіжність. Спочатку оцінимо відхилення першого наближення від нульового. Для більшої зручності зробимо це для кожної координати окремо:

$$|x_1(t) - x_0| = \frac{1}{2T}\left|\int_0^t \left(\frac{T^2}{12} - \left(t - \tau + \frac{T}{2}\right)^2\right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0)d\tau +\right.$$

$$\left. + \int_t^T \left(\frac{T^2}{12} - \left(t - \tau - \frac{T}{2}\right)^2\right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0)d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2T}\left|\int_0^t \left(\frac{T^2}{12} - \left(t - \tau + \frac{T}{2}\right)^2\right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0)d\tau\right| +$$

$$+\left|\int_t^T \left(\frac{T^2}{12} - \left(t - \tau - \frac{T}{2}\right)^2\right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0)d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{M}{2T}\left(\int_0^t \left|\frac{T^2}{12} - \left(t - \tau + \frac{T}{2}\right)^2\right| d\tau + \int_t^T \left|\frac{T^2}{12} - \left(t - \tau - \frac{T}{2}\right)^2\right| d\tau\right) = \frac{T^2}{18\sqrt{3}} M ;$$

$$|\dot{x}_1(t)| \le \frac{1}{T}\left(\left|\int_0^t \left(\tau - t + \frac{T}{2}\right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0)d\tau\right| + \left|\int_t^T \left(\tau - t - \frac{T}{2}\right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0)d\tau\right|\right) \le$$

$$\le \frac{M}{T}\left(\int_0^t \left|\tau - t + \frac{T}{2}\right| d\tau + \int_t^T \left|\tau - t - \frac{T}{2}\right| d\tau\right) \le \frac{MT}{4} .$$

Очевидно, що такі самі оцінки справедливі для норм $\|x_1(t) - x_0\|$ і $\|\dot{x}_1(t)\|$. Тому

$$\operatorname{col}\|(x_1 - x_0, \dot{x}_1)\| \le \operatorname{col}\left(\frac{T^2}{18\sqrt{3}} M, \frac{T}{4} M\right). \qquad (13)$$

Аналогічно оцінимо псевдонорму різниці $\operatorname{col}\|(x_{m+1} - x_m, \dot{x}_{m+1} - \dot{x}_m)\|$.

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \le \int_0^T |G(t,\tau)|\, |f(\tau, x_m(\tau), x_m(\tau-\delta), \dot{x}_m(\tau), \dot{x}_m(\tau-\delta)) -$$

$$- f(\tau, x_m(\tau), x_m(\tau-\delta), \dot{x}_m(\tau), \dot{x}_m(\tau-\delta))| d\tau \le$$

$$\le \frac{T^2}{18\sqrt{3}}\left(\left(K_0+\tilde{K}_0\right)\left\|x_m-x_{m-1}\right\|+\left(K_1+\tilde{K}_1\right)\left\|x_m-x_{m-1}\right\|\right).$$

Тут використано факт, що для періодичної з періодом T функції $\|x(t)\|=\|x(t-\delta)\|$:

$$\left|\dot{x}_{m+1}(t)-\dot{x}_m(t)\right|\le\int_0^T\left|\dot{G}_t(t,\tau)\right|\left|f(\tau,x_m(\tau),x_m(\tau-\delta),\dot{x}_m(\tau),\dot{x}_m(\tau-\delta))-\right.$$

$$\left.f(\tau,x_m(\tau),x_m(\tau-\delta),\dot{x}_m(\tau),\dot{x}_m(\tau-\delta))\right|d\tau\le$$

$$\le\frac{T}{4}\left((K_0+\tilde{K}_0)\left\|x_m-x_{m-1}\right\|+(K_1+\tilde{K}_1)\left\|x_m-x_{m-1}\right\|\right).$$

Перепишемо цю оцінку, використовуючи впроваджені раніше позначення:

$$\left\|\begin{matrix}x_{m+1}-x_m\\ \dot{x}_{m+1}-\dot{x}_m\end{matrix}\right\|\le\frac{T}{2}\begin{pmatrix}\frac{T}{9\sqrt{3}}(K_0+\tilde{K}_0) & \frac{T}{9\sqrt{3}}(K_1+\tilde{K}_1)\\ \frac{1}{2}(K_0+\tilde{K}_0) & \frac{1}{2}(K_1+\tilde{K}_1)\end{pmatrix}\left\|\begin{matrix}x_m-x_{m-1}\\ \dot{x}_m-\dot{x}_{m-1}\end{matrix}\right\|.$$

Нехай $K=\max(K_0+\tilde{K}_0,K_1+\tilde{K}_1)$. Тоді, очевидно,

$$\left\|\begin{matrix}x_{m+1}-x_m\\ \dot{x}_{m+1}-\dot{x}_m\end{matrix}\right\|\le\frac{TK}{2}\begin{pmatrix}\frac{T}{9\sqrt{3}} & \frac{T}{9\sqrt{3}}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\left\|\begin{matrix}x_m-x_{m-1}\\ \dot{x}_m-\dot{x}_{m-1}\end{matrix}\right\|. \quad (14)$$

Далі будемо позначати матрицю в лівій частині через Q.

Звідси, з урахуванням рівнянь (13), (14), можна отримати оцінку

$$\left\|\begin{matrix}x_{m+1}-x_m\\ \dot{x}_{m+1}-\dot{x}_m\end{matrix}\right\|\le\frac{MT}{2}\left(\frac{TK}{2}\right)^m\begin{pmatrix}\frac{T}{9\sqrt{3}} & \frac{T}{9\sqrt{3}}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^m\begin{pmatrix}\frac{T}{9\sqrt{3}}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Стандартні міркування приводять до оцінки відхилення m-го наближення розв’язку від $m+p$-го за будь-якого натурального p:

$$\left\|\begin{pmatrix}x_{m+p}-x_m\\ \dot{x}_{m+p}-\dot{x}_m\end{pmatrix}\right\|\le\frac{MT}{2}\left(\frac{TK}{2}\right)^m\left(\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{TK}{2}\right)^k\begin{pmatrix}\frac{T}{9\sqrt{3}} & \frac{T}{9\sqrt{3}}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^k\right)\begin{pmatrix}\frac{T}{9\sqrt{3}}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}. \quad (15)$$

Для вектора $x=\mathrm{col}(x_1,...,x_n)$ і матриці $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ розглянемо відомі норми

$$\|x\|_1=\sum_{j=1}^n\left|x_j\right|;\ \ \|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n\left|a_{i,j}\right|.$$

Вони узгоджені в тому розумінні, що $\|x\|_1\ \|Ax\|_1\le\|A\|_1\|x\|_1$.

Відомо, що якщо $a_{i,j} \ge 0,\ i, j = 1,\dots,n$ і суми елементів в стовпцях матриці однакові, то її норма збігається із спектральним радіусом ([7]). Такі властивості має матриця Q. З іншого боку, спектральний радіус $\rho(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}$ дорівнює найбільшому з модулів власних чисел матриці ([7]). Знаходячи найбільше власне число матриці Q, маємо її спектральний радіус: $\|Q\|_1 = \rho(Q) = \frac{T}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$.

Із виразу (15) випливає оцінка

$$\left\| \begin{pmatrix} x_{m+p} - x_m \\ \dot{x}_{m+p} - \dot{x}_m \end{pmatrix} \right\|_1 \le \frac{MT}{2}\left(\frac{T}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{TK}{2}\right)^m \|Q\|_1^{\ m} \left(\sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{TK}{2}\right)^k \ \|Q\|_1^{\ m} \right) \quad (16)$$

Якщо

$$q = \frac{TK}{2}\left(\frac{T}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right) < 1, \quad (17)$$

виконується умова критерію Коші, отже послідовність $\operatorname{col}\|(x_m, \dot{x}_m)\|$ збігається, причому до розв'язку системи (11)–(12). Користуючись стандартними міркуваннями, легко довести, що цей розв'язок єдиний. Переходячи в рівнянні (16) до границі при $p \to \infty$, маємо похибку між розв'язком системи і її m-м наближенням:

$$\left\| \begin{pmatrix} \phi(t, x_0) - x_m \\ \dot{\phi}(t, x_0) - \dot{x}_m \end{pmatrix} \right\|_1 \le \frac{MT}{2}\left(\frac{T}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{TK}{2}\right)^m \|Q\|_1^{\ m} \left(I - \frac{TK}{2}\right)^{-1}.$$

Або остаточно

$$\left\| \begin{pmatrix} \phi(t, x_0) - x_m \\ \dot{\phi}(t, x_0) - \dot{x}_m \end{pmatrix} \right\|_1 \le \frac{MT}{2}\left(\frac{TK}{2}\right)^m \left(\frac{T}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)^{m+1} \left(I - \frac{TK}{2}\right)^{-1}. \quad (18)$$

Границя послідовних наближень, яка є розв'язком системи інтегральних рівнянь, повинна належати області D. Із стандартних міркувань випливає, що для цього від константи M досить вимагати виконання умови:

$$M \le \min\left(\frac{18\sqrt{3}}{T^2}(b-a),\ \frac{4}{T}(c-d) \right) \quad (19)$$

Також зрозумілим чином можна отримати оцінку можливих значень величини x_0:

$$x_0 \in \left[a + \frac{T^2}{18\sqrt{3}} M,\ b - \frac{T^2}{18\sqrt{3}} M \right] \quad (20)$$

Сформулюємо остаточні результати.

Теорема 1. Нехай функція $f(t, x, u, y, v)$ неперервна на $[0,T]\times[a,b]\times$ $\times[a,b]\times[c,d]\times[c,d]$, періодична за t з періодом T задовольняє умови а), б), в), причому, константи Ліпшиця та стала M задовольняють умови (17), (19).

Тоді для існування періодичного з періодом T розв'язку $x=\varphi(t,x_0)$ рівняння (1) необхідно і достатньо існування такого значення x_0, яке задовольняє рівняння (10), де $\varphi(t,x_0)$ знаходиться методом послідовних наближень. При цьому x_0 є середнім значенням $\varphi(t,x_0)$ на $[0,T]$ і знаходиться на проміжку, який задовольняє умови (20). Похибка між розв'язком задачі (1)–(4) і її m-м наближенням визначається умовою (18).

ВИСНОВКИ

Традиційно для знаходження періодичних розв'язків звичайного нелінійного диференціального рівняння другого порядку або рівняння із запізненням його зводять до системи першого порядку. Логічно досліджувати саме рівняння безпосередньо. У такому разі періодичний розв'язок інтерпретується як розв'язок періодичної крайової задачі. Оператор другої похідної в лівій частині рівняння, визначений на функціях, що задовольняють періодичні граничні умови є самоспряженим, і для нього будується функція Гріна. Нестандартна ситуація при її побудові полягає в тому, що оператор, обернений до оператора другої похідної, не є визначеним на всьому просторі L_2, а лише на підпросторі корозмірності одиниця, ортогональному до підпростору констант. Отримано оцінку функції Гріна крайової задачі, констант в умові Ліпшиця, яку задовольняє функція в правій частині рівняння, а також її супремуму на області визначення. Визначено умову збіжності ітераційного процесу і оцінено швидкість збіжності методу.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Самойленко А.М.* О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка / А.М. Самойленко // Дифференциальные уравнения. — 1967. — **3**, № 11. — С. 1903–1912.
2. *Ронто Н.И.* Теория численно-аналитического метода, достижения и новые направления развития / Н.И. Ронто, А.М. Самойленко, С.И. Трофимчук // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 2. — С. 225–243.
3. *Самойленко А.М.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. — К.: Наук. думка, 1992. — 280 с.
4. *Митропольский Ю.А.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием / Ю.А. Митропольский, Д.И. Мартынюк. — К.: Вища шк., 1979. — 248 с.
5. *Митропольский Ю.А.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами / Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко, Д.И. Мартынюк. — К.: Наук. думка, 1984. — 213 с.
6. *Бохонов Ю.Є.* Про один підхід до знаходження періодичних розв'язків нелінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку. // Системні дослідження та інформаційні технології. —2012. — № 2. — С. 138–143.
7. *Хорн Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М.: Мир, 1989. — 655 с.

Надійшла 01.06.2016