УДК 004.42:510.69 https://doi.org/10.15407/pp2019.01.003

*М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк, Т.А. Мамедов*

# ПРОПОЗИЦІЙНІ ЛОГІКИ ЧАСТКОВИХ ПРЕДИКАТІВ З КОМПОЗИЦІЄЮ ПРЕДИКАТНОГО ДОПОВНЕННЯ

Досліджено нові програмно-орієнтовані логічні формалізми – логіки часткових предикатів з операцією (композицією) предикатного доповненням, названі LC. Подібні операції використовуються в різних варіантах логік Флойда – Хоара з частковими перед- та після-умовами. В даній роботі вивчаються LC пропозиційного рівня – PLC. Описано пропозиційні композиційні алгебри та мови PLC, запропоновано та досліджено відношення неспростовнісного логічного наслідку за умов невизначеності. На цій основі для PLC однозначних предикатів побудовано числення секвенційного типу.

Ключові слова: логіка, предикат, логічний наслідок, секвенційне числення.

## Вступ

Розроблено багато різноманітних логічних систем, які успішно застосовуються в інформатиці й програмуванні [1]. Проте класична логіка має принципові обмеження, які істотно ускладнюють її використання. В основу цих систем зазвичай покладена класична логіка предикатів та базовані на ній спеціальні логіки (модальні, темпоральні, програмні тощо). Обмеження класичної логіки роблять актуальною проблему побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. В останні роки запропоновано різні підходи до побудови логік, орієнтованих на потреби моделювання, специфікації та верифікації програмних систем [2 – 5]. Перспективним напрямком побудови програмно-орієнтованих логік є спільний для логіки й програмування композиційно-номінативний підхід. Логіки, збудовані на його основі, названо композиційно-номінативними (КНЛ). Різноманітні класи КНЛ описано та досліджено в [6 – 10].

В даній роботі досліджено нові програмно-орієнтовані логічні формалізми – логіки часткових квазіарних предикатів з предикатним доповненням. Такі логіки названі LC. Характерною особливістю LC є наявність спеціальної немонотонної операції (композиції) предикатного доповнення. Подібні операції використовуються в різних варіантах логік Флойда – Хоара з частковими перед- та після-умовами [11]. Основна увага в роботі зосереджена на вивченні LC пропозиційного рівня – PLC. Досліджено властивості композиції предикатного доповнення. Описано пропозиційні композиційні алгебри та мови PLC. Для LC однозначних предикатів запропоновано відношення неспростовнісного логічного наслідку за умов невизначеності. Досліджено властивості цього відношення, на цій семантичній основі для PLC однозначних предикатів побудовано числення секвенційного типу.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі [7, 9]. Для полегшення читання нагадаємо основні визначення.

*V-A*-квазіарний предикат – це часткова неоднозначна, взагалі кажучи, функція вигляду $P: {}^{V}A \to \{T, F\}$. Тут $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень, ${}^{V}A$ – множина всіх *V-A*-іменних множин, тобто множина всіх однозначних функцій вигляду $d: V \to A$. Трактуємо $V$ як множину предметних імен (змінних), $A$ – як множину базових значень.

Множину всіх значень, які неоднозначний предикат $P$ може приймати на аргументі (даному) $d$, будемо позначати $P[d]$.

## 1. Квазіарні предикати реляційного типу

Далі будемо розглядати неоднозначні (недетерміновані) предикати реляційного типу, або *R*-предикати.

Клас *V-A*-квазіарних *R*-предикатів тут позначаємо $Pr^{V\text{–}A}$.

Кожний *V-A*-квазіарний *R*-предикат $P: {}^{V}A \to \{T, F\}$ на даному $d \in {}^{V}A$ може приймати лише значення *T*, лише значення *F*, обидва значення $T$ та $F$, а також може бути невизначеним. Тому для $R$-предиката $P$ множина $P[d]$ може бути однією з множин $\varnothing$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$.

Кожний $R$-предикат $P$ можна однозначно задати за допомогою 2-х множин:

– область істинності, або $T$-область

$$T(P) = \{d \in {}^V\!A \mid T \in P[d]\};$$

– область хибності, або $F$-область

$$F(P) = \{d \in {}^V\!A \mid F \in P[d]\}.$$

Для $R$-предикатів область невизначеності, або $\perp$-область, цілком залежить від $T$-області та $F$-області. $\perp$-область $\perp(P)$ $R$-предиката $P$ визначається $T(P)$ та $F(P)$ так:

$$\perp(P) = \overline{T(P) \cup F(P)} = \overline{T(P)} \cap \overline{F(P)}.$$

$V$-$A$-квазіарний $R$-предикат $P$:

– частковий однозначний або $P$-предикат, якщо $T(P) \cap F(P) = \varnothing$;

– тотальний, або $T$-предикат, якщо $T(P) \cup F(P) = {}^V\!A$; тоді маємо $\perp(P) = \varnothing$.

Для $P$-предикатів пишемо $Q(d)\downarrow$, якщо значення $Q(d)$ визначене, та пишемо $Q(d)\uparrow$, якщо значення $Q(d)$ невизначене.

Таким чином, для $P$-предикатів $T$-область та $F$-область можна визначити так:

$$T(Q) = \{d \in {}^V\!A \mid Q(d)\downarrow = T\},$$

$$F(Q) = \{d \in {}^V\!A \mid Q(d)\downarrow = F\}.$$

Тоді $\perp(Q) = \{d \in {}^V\!A \mid Q(d)\uparrow\}$.

Клас $V$-$A$-квазіарних $P$-предикатів будемо позначати $PrP^{V\text{–}A}$.

Використовуючи області істинності та хибності, можна виділити [9] низку різновидів $R$-предикатів. Зокрема, в класі $R$-предикатів виділено 4 константних:

– тотожно істинний предикат T (маємо $T(\mathrm{T}) = {}^V\!A$ та $F(\mathrm{T}) = \varnothing$, тоді $\perp(\mathrm{T}) = \varnothing$);

– тотожно хибний предикат F (маємо $F(\mathrm{F\ T}) = {}^V\!A$ та $T(\mathrm{F}) = \varnothing$, тоді $\perp(\mathrm{F}) = \varnothing$);

– тотожно невизначений предикат $\perp$ (маємо $T(\perp) = F(\perp) = \varnothing$, тоді $\perp(\perp) = {}^V\!A$);

– тотально амбівалентний предикат $\Upsilon$ (маємо $T(\Upsilon) = F(\Upsilon) = {}^V\!A$, тоді $\perp(\Upsilon) = \varnothing$).

## 2. Пропозиційні композиції *R*-предикатів

На пропозиційному рівні предикати можна трактувати як функції вигляду $P: D \to \{T, F\}$, де $D$ – сукупність абстрактних даних. На гранично абстрактному рівні дані трактуємо як "чорні скриньки", які неможливо відрізнити одне від одного. Тому на пропозиційному рівні предикати можна розглядати як задані на одиничному абстрактному даному. Кожний предикат на цьому даному може приймати певне істиннісне значення або бути невизначеним. Отже, на пропозиційному рівні композиції фактично працюють лише з виробленими предикатами істиннісними значеннями. Традиційно такі композиції називають логічними зв'язками.

Мінімально конкретизувавши рівень розгляду, трактуємо $D$ як сукупність відмінних одне від одного даних, абстрактних в тому розумінні, що їх структура невідома ("чорні скриньки" різної ваги чи форми). Кожний предикат $P: D \to \{T, F\}$ тоді можна трактувати як об'єднання гранично абстрактних предикатів, заданих на одиничних даних – елементах $D$.

Для квазіарних предикатів множину даних $D$ уточнюємо як ${}^V\!A$.

Основними логічними зв'язками є 1-арна композиція заперечення $\neg$ та бінарні композиції диз'юнкція $\vee$, кон'юнкція &, імплікація $\to$, еквіваленція $\leftrightarrow$.

Визначення композицій $\neg$, $\vee$, &, $\to$, $\leftrightarrow$ дамо, задаючи предикати $\neg(P)$, $\vee(P, Q)$, $\&(P, Q)$, $\to(P, Q)$, $\leftrightarrow(P, Q)$. Ці предикати будемо скорочено позначати $\neg P$, $P \vee Q$, $P \& Q$, $P \to Q$, $P \leftrightarrow Q$.

У випадку $R$-предикатів визначення пропозиційних композицій природно дати [7] через області істинності й хибності відповідних предикатів:

$$T(\neg P) = F(P);$$

$$F(\neg P) = T(P);$$

$$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q);$$

$$F(P\vee Q) = F(P)\cap F(Q);$$

$$T(P\&Q) = T(P)\cap T(Q);$$

$$F(P\&Q) = F(P)\cup F(Q);$$

$$T(P\to Q) = F(P)\cup T(Q);$$

$$F(P\to Q) = T(P)\cap F(Q);$$

$$T(P\leftrightarrow Q) = (F(P)\cup T(Q))\cap(F(Q)\cup T(P));$$

$$F(P\leftrightarrow Q) = (T(P)\cap F(Q))\cup(F(P)\cap T(Q)).$$

У випадку $P$-предикатів визначення композицій $\neg$, $\vee$, &, $\to$, $\leftrightarrow$ подібні до визначень відповідних класичних логічних зв'язок [12]. Такі пропозиційні композиції є аналогами відповідних сильних зв'язок Кліні [13], тому їх називають Клінієвими.

Для $P$-предикатів визначення пропозиційних композицій можна дати більш традиційно, через значення відповідних предикатів. Наведемо тут визначення композицій $\neg$, $\vee$, &.

Для довільного $d\in{}^VA$ задаємо:

$$(\neg P)(d)=\begin{cases} T, \text{ якщо } P(d)=F,\\ F, \text{ якщо } P(d)=T,\\ \text{невизначене, якщо } P(d)\uparrow.\end{cases}$$

$$(P\vee Q)(d)=\begin{cases} T, \text{ якщо } P(d)=T \\ \quad \text{або } Q(d)=T,\\ F, \text{ якщо } P(d)=F \\ \quad \text{та } Q(d)=F,\\ \text{невизначене} \\ \quad \text{в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

$$(P\,\&\,Q)(d)=\begin{cases} T, \text{ якщо } P(d)=T \\ \quad \text{та } Q(d)=T,\\ F, \text{ якщо } P(d)=F \\ \quad \text{або } Q(d)=F,\\ \text{невизначене} \\ \quad \text{в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

Для $P$-предикатів визначення пропозиційних композицій через області істинності й хибності еквівалентні їх визначенням через значення відповідних предикатів.

Композиції $\neg$ та $\vee$ назвемо *базовими пропозиційними композиціями.*

Композиції $\to$, &, $\leftrightarrow$ є *похідними*, вони виражаються через базові композиції $\neg$ та $\vee$:

$$P\&Q = \neg(\neg P\vee\neg Q);$$

$$P\to Q = \neg P\vee Q;$$

$$P\leftrightarrow Q = (P\to Q)\&(Q\to P).$$

**Твердження 1.** Для $\perp$-області $R$-предикатів маємо:

$$\perp(\neg Q) = \perp(Q);$$

$$\perp(P\vee Q) = (\perp(P)\cap\overline{T(Q)})\cup(\perp(Q)\cap\overline{T(P)}).$$

Справді, маємо

$$\perp(\neg Q) = \overline{T(\neg Q)\cup F(\neg Q)} =$$

$$= \overline{F(Q)\cup T(Q)} = \perp(Q);$$

$$\perp(P\vee Q) = \overline{T(P\vee Q)\cup F(P\vee Q)} =$$

$$= \overline{T(P)\cup T(Q)\cup(F(P)\cap F(Q)} =$$

$$= \overline{T(P)}\cap\overline{T(Q)}\cap(\overline{F(P)}\cup\overline{F(Q)}) =$$

$$= (\overline{T(P)}\cap\overline{F(P)}\cap\overline{T(Q)})\cup$$

$$\cup(\overline{T(Q)}\cap\overline{F(Q)}\cap\overline{T(P)}) =$$

$$= (\perp(P)\cap\overline{T(Q)})\cup(\perp(Q)\cap\overline{T(P)}).$$

Тут враховано, що

$$\perp(S) = \overline{T(S)}\cap\overline{F(S)}\,).$$

В загальному випадку $R$-предикатів

$$\overline{T(S)} \subseteq \perp(S)\cup F(S).$$

Водночас для $P$-предикатів множини $T(S)$, $F(S)$, $\perp(S)$ – диз'юнктні, звідки

$$\overline{T(S)} = \perp(S)\cup F(S).$$

**Твердження 2.** Для $\perp$-області $P$-предикатів маємо:

$$\perp(P\vee Q) = (\perp(P)\cap\perp(Q))\cup$$

$$\cup(\perp(P)\cap F(Q))\cup(\perp(Q)\cap F(P));$$

$$\perp(P\,\&\,Q) = (\perp(P)\cap\perp(Q))\cup$$

$$\cup(\perp(P)\cap T(Q))\cup(\perp(Q)\cap T(P)).$$

Справді, маємо $\perp(P\vee Q) =$

$$= (\perp(P)\cap\overline{T(Q)})\cup(\perp(Q)\cap\overline{T(P)}) =$$

$$= (\perp(P)\cap(\perp(Q)\cup F(Q)))\cup$$

$$\cup(\perp(Q)\cap(\perp(P)\cup F(P)))=$$

$$=(\perp(P)\cap\perp(Q))\cup(\perp(P)\cap F(Q))\cup.$$

$$\cup(\perp(Q)\cap F(P)).$$

Це означає:

$$(P\vee Q)(d)\uparrow \;\Leftrightarrow\; P(d)\uparrow \text{ та } Q(d)\uparrow \text{ або}$$

$$P(d)\uparrow \text{ та } Q(d)=F \text{ або } P(d)=F \text{ та } Q(d)\uparrow.$$

Подібним чином отримуємо вираз для $\perp(P\,\&\,Q)$.

Зазначимо, що для найзагальнішого класу недетермінованих предикатів – *GND*-предикатів [14] – маємо такі ж подання $\perp(P\vee Q)$ та $\perp(P\&Q)$, як і для *P*-предикатів. Водночас, на відміну від *R*-предикатів, для *GND*-предикатів можливо $\perp(P)\cap T(P)\neq\varnothing$ та $\perp(P)\cap F(P)\neq\varnothing$.

Основні властивості пропозиційних композицій *R*-предикатів аналогічні властивостям відповідних класичних логічних зв'язок [6, 12].

Клас *P*-предикатів замкнений [7, 9] щодо композицій $\neg$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

## 3. Композиція предикатного доповнення

Характерною особливістю LC є наявність спеціальної 1-арної композиції предикатного доповнення $\sim$. Ця композиція задається так:

$$(\sim P)(d)=\begin{cases} T, \text{ якщо } P(d)\uparrow, \\ \text{невизначене, якщо } P(d)\downarrow. \end{cases}$$

Отже, композиція $\sim$ немонотонна.

Композицію $\sim$ можна задати через *T*-область і *F*-область відповідного предиката:

$$T(\sim P)=\perp(P)=\overline{T(P)\cup F(P)}=\overline{T(P)}\cap\overline{F(P)},$$

$$F(\sim P)=\varnothing.$$

Тоді маємо $\perp(\sim P)=T(P)\cup F(P)$.

Класи *P*-предикатів та *R*-предикатів замкнені щодо композиції $\sim$.

Для довільного *R*-предиката *Q* маємо, що $\sim Q$ є *P*-предикатом, тому

*клас T-предикатів незамкнений щодо* $\sim$.

Отже, для *T*-предикатів LC не мають смислу.

Таким чином, можна розглядати загальний клас LC – логіки *R*-предикатів з композицією предикатного доповнення, та їх підклас LPC – логіки *P*-предикатів з композицією предикатного доповнення.

Для LC пропозиційного рівня маємо загальний клас PLC *R*-предикатів та його підклас PLPC – PLC *P*-предикатів.

Композиції $\neg$, $\vee$, $\sim$ – це *базові* композиції PLC.

## 4. Пропозиційні композиційні алгебри та мови LC

Семантичною основою LC є композиційні предикатні системи вигляду $({}^VA, Pr^{V-A}, C_{LC})$, де $C_{LC}$ – множина базових композицій. Така композиційна система задає дві алгебри: алгебру (алгебраїчну систему) даних $({}^VA, Pr^{V-A})$ та композиційну алгебру предикатів $({}^VA, Pr^{V-A}, C_{LC})$.

Композиційну систему вигляду $({}^VA, Pr^{V-A}, C_{PLC})$, де множина композицій $C_{PLC}=\{\neg,\vee,\sim\}$, назвемо *пропозиційною композиційною LC-системою R-предикатів.*

Алгебру $APLC=(Pr^{V-A}, C_{PLC})$ назвемо *пропозиційною композиційною LC-алгеброю R-предикатів*.

Клас *P*-предикатів замкнений щодо композиції $\sim$. Тому можна говорити про те, що в алгебрі *APLC* виділена підалгебра $APLCP=(PrP^{V-A}, C_{PLC})$ – *пропозиційна композиційна LC-алгебра P-предикатів*.

Розглянемо основні властивості композицій PLC.

**Твердження 3.** Із визначень отримуємо такі властивості композиції $\sim$:

$$\sim\neg P=\sim P;$$

$$\sim\sim\sim P=\sim P;$$

$$\sim\sim\sim\sim P=\sim\sim P.$$

Для *P*-предикатів додатково маємо:

$$\sim\sim P=P\vee\neg P.$$

Таким чином, багатократне застосування композиції $\sim$ зводиться до 1-кратного та до 2-кратного її застосування.

Із визначень отримуємо:

$$(\neg^{\sim}P)(d)=\begin{cases} F, \text{ якщо } P(d)\uparrow, \\ \text{невизначене, якщо } P(d)\downarrow \end{cases}$$

Маємо $F(\neg^{\sim}P)=T(^{\sim}P)=\perp(P)$, звідки отримуємо:

$$F(\neg^{\sim}P)=\overline{T(P)\cup F(P)}=\overline{T(P)}\cap\overline{F(P)},$$

$$T(\neg^{\sim}P)=\varnothing.$$

Властивості пропозиційних композицій в LC аналогічні властивостям пропозиційних композицій $R$-предикатів у традиційних логіках квазіарних предикатів [7].

**Твердження 4.** Маємо такі основні властивості композицій $\neg$, $\vee$, & в LC.

1) комутативність $\vee$ та &:

$P\vee Q = Q\vee P$;

$P\&Q = Q\&P$.

2) асоціативність $\vee$ та &:

$(P\vee Q)\vee R = P\vee(Q\vee R)$;

$(P\&Q)\&R = P\&(Q\&R)$.

3) дистрибутивність $\vee$ відносно & та & відносно $\vee$:

$(P\vee Q)\&R = (P\&R)\vee(Q\&R)$;

$(P\&Q)\vee R = (P\vee R)\&(Q\vee R)$.

4) ідемпотентність $\vee$ та &:

$P = P\vee P$;

$P = P\&P$.

5) зняття подвійного заперечення:

$\neg\neg P = P$.

6) закон контрапозиції:

$P\to Q = \neg Q\to\neg P$.

7) закони де Моргана:

$\neg(P\vee Q) = (\neg P)\&(\neg Q)$;

$\neg(P\&Q) = (\neg P)\vee(\neg Q)$.

8) закони поглинання:

$P = P\vee(P\&Q)$;

$P = P\&(P\vee Q)$.

Опишемо мови PLC.

Алфавіт мови:

– множина $V$ предметних імен, або змінних,

– множина $Ps$ предикатних символів,

– множина $Cs_{PLC} = \{\neg, \vee, {}^{\sim}\}$ символів базових композицій.

Множину $Fr$ формул мови визначаємо так.

Маємо $Ps\subseteq Fr$, а далі задаємо індуктивно:

$$\Phi, \Psi\in Fr \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, {}^{\sim}\Phi\in Fr.$$

Інтерпретуємо мову на композиційних системах $({}^{V}\!A, Pr^{V\text{–}A}, C_{PLC})$.

Задаємо тотальне однозначне відображення інтерпретації предикатних символів $I: Ps\to Pr^{V\text{–}A}$, яке далі продовжуємо до відображення інтерпретації формул $I: Fr\to Pr^{V\text{–}A}$:

$$I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi)),$$

$$I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi)),$$

$$I({}^{\sim}\Phi) = {}^{\sim}(I(\Phi)).$$

Нехай $\boldsymbol{J}=(A, I)$ – інтерпретація. Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$ позначаємо $\Phi_J$.

Композиції пропозиційного рівня беруть до уваги лише вироблені предикатами істиннісні значення, тому кожне відображення інтерпретації $I: Ps\to Pr^{V\text{–}A}$ індукує сукупність істиннісних оцінок (взагалі кажучи, часткових) таким чином.

Для кожного $d\in{}^{V}\!A$ задаємо істиннісну оцінку $\upsilon_d: Ps\to\{T, F\}$ так:

$$\upsilon_d(p) = p_J(d).$$

Тоді для кожної $\Phi\in Fr$ маємо

$$\upsilon_d(\Phi) = \Phi_J(d).$$

Зокрема, якщо $\Phi_J(d)\uparrow$, то й $\upsilon_d(\Phi)\uparrow$.

Виділення класів квазіарних предикатів виділяє відповідні класи інтерпретацій. Такі класи інтерпретацій називають [9] семантиками.

Клас $T$-предикатів незамкнений щодо $^{\sim}$, тому для LC змістовними є $R$-семантика та $P$-семантика, будемо їх відповідно позначати $\boldsymbol{R_C}$ та $\boldsymbol{P_C}$.

Фіксуючи пропозиційний рівень, для PLC отримуємо семантики $\boldsymbol{R_{PC}}$ та $\boldsymbol{P_{PC}}$.

Зрозуміло, що наведені вище властивості логічних зв'язок та композиції предикатного доповнення можна подати із використанням формул мови PLC.

## 5. Відношення логічного наслідку за умов невизначеності

На множинах формул LC можна визначити низку відношень логічного наслідку.

В даній роботі введемо та дослідимо відношення *неспростовнісного логічного наслідку за умов невизначеності*. Таке відношення є узагальненням відомого [7, 9] відношення неспростовнісного логічного наслідку для традиційних логік квазіарних предикатів.

Нехай деяка $\Sigma \subseteq Fr$; нехай $\boldsymbol{J}$ – інтерпретація. Далі позначаємо:

$$\bigcap_{\theta\in\Sigma} T(\theta_J) \text{ як } T^{\cap}(\Sigma_J),$$

$$\bigcap_{\theta\in\Sigma} F(\theta_J) \text{ як } F^{\cap}(\Sigma_J),$$

$$\bigcap_{\theta\in\Sigma} \perp(\theta_J) \text{ як } \perp^{\cap}(\Sigma_J).$$

Множина $\Sigma$ може бути порожньою. У випадку, коли $\Sigma = \varnothing$, маємо:

$$T^{\cap}(\Sigma) = T^{\cap}(\varnothing) = F^{\cap}(\Sigma) = F^{\cap}(\varnothing) = \\ = \perp^{\cap}(\Sigma) = \perp^{\cap}(\varnothing) = {}^{V}\!A.$$

Спочатку вводимо відношення *неспростовнісного наслідку за умов невизначеності при певній інтерпретації*.

Нехай $\vartheta, \Phi, \Psi \in Fr$. Неформально те, що $\Psi$ є неспростовнісним наслідком $\Phi$ за умови невизначеності $\vartheta$ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, має означати: "якщо $\vartheta_J$ невизначене, то неможливо, що $\Phi_J$ істинне та $\Psi_J$ хибне". Це можна уточнити так: "для кожного $d\in{}^{V}\!A$ якщо $\vartheta_J(d)\uparrow$, то неможливо $\Phi_J(d) = T$ та $\Psi_J(d) = F$".

Останнє твердження рівносильне такому: "для кожного $d\in{}^{V}\!A$ неправильно $\vartheta_J(d)\uparrow$ або неправильно $\Phi_J(d) = T$ та $\Psi_J(d) = F$". Це в свою чергу рівносильне такому: "для кожного $d\in{}^{V}\!A$ неправильно, що $\vartheta_J(d)\uparrow$, та $\Phi_J(d) = T$ та $\Psi_J(d) = F$".

Таким чином, початкове твердження звелося до рівносильної умови: "не існує $d\in{}^{V}\!A$ таких, що $d\in\perp(\vartheta_J)\cap T(\Phi_J)\cap F(\Psi_J)$", що дає умову $\perp(\vartheta_J)\cap T(\Phi_J)\cap F(\Psi_J)=\varnothing$.

Подібні міркування можна провести для множин формул. Нехай $\Gamma, \mathrm{U}, \Delta \subseteq Fr$. Неформально те, що $\Delta$ є неспростовнісним наслідком $\Gamma$ за умов невизначеності U при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, має означати: "для кожного $d\in{}^{V}\!A$, якщо $\varphi_J(d)\uparrow$ для всіх $\varphi_J\in\mathrm{U}$, то неможливо $\xi_J(d) = T$ для всіх $\xi\in\Gamma$ та $\psi_J(d) = F$ для всіх $\psi\in\Delta$".

Це твердження рівносильне такому: "для кожного $d\in{}^{V}\!A$, якщо $d\in\perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)$, то неможливо $d\in T^{\cap}(\Gamma_J)$ та $d\in F^{\cap}(\Delta_J)$".

Останнє твердження рівносильне такому: "для кожного $d\in{}^{V}\!A$ неправильно, що $d\in\perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)$ та $d\in T^{\cap}(\Gamma_J)\cap F^{\cap}(\Delta_J)$, тобто неправильно, що $d\in\perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)\cap T^{\cap}(\Gamma_J)\cap \cap F^{\cap}(\Delta_J)$".

Отже, те, що $\Delta$ є неспростовнісним наслідком $\Gamma$ за умов невизначеності U, звелося до такої умови: "не існує $d\in{}^{V}\!A$ таких, що $d\in\perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)\cap T^{\cap}(\Gamma_J)\cap F^{\cap}(\Delta_J)$".

Це означає:

$$T^{\cap}(\Gamma_J)\cap\perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)\cap F^{\cap}(\Delta_J)=\varnothing.$$

Той факт, що $\Delta$ є неспростовнісним наслідком $\Gamma$ за умов невизначеності U при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, будемо позначати $\mathrm{U}/\Gamma\ {}_J\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$.

Таким чином, ми прийшли до наступного визначення:

$$\mathrm{U}/\Gamma\ {}_J\!\models_{IR}^{\perp} \Delta, \text{ якщо}$$

$$T^{\cap}(\Gamma_J)\cap\perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)\cap F^{\cap}(\Delta_J)=\varnothing.$$

Зокрема, якщо $\mathrm{U} = \varnothing$, то отримуємо умову $T^{\cap}(\Gamma_J)\cap F^{\cap}(\Delta_J)=\varnothing$ – умову відношення неспростовнісного наслідку $\Gamma\ {}_J\!\models_{IR} \Delta$.

Відношення неспростовнісного логічного наслідку в LC за умов невизначеності визначаємо традиційно.

$\Delta$ є неспростовнісним логічним наслідком $\Gamma$ за умов невизначеності U, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta$, якщо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}_J\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$ для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P_C}$.

Зокрема, якщо $U = \varnothing$, то отримуємо відоме відношення $\Gamma \models_{IR} \Delta$.

## 6. Властивості відношення $\models_{IR}^{\perp}$

Опишемо основні властивості відношення $\models_{IR}^{\perp}$ на пропозиційному рівні.

Із визначень отримуємо властивість монотонності M:

M) нехай $\Gamma \subseteq \Lambda$, $U \subseteq W$, та $\Delta \subseteq \Sigma$; тоді $U / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta \Rightarrow W / \Lambda \models_{IR}^{\perp} \Sigma$.

**Теорема 1.** Маємо такі властивості гарантованої наявності відношення логічного наслідку $\models_{IR}^{\perp}$:

$C$) $U / \Phi, \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi$;

$C_{UL}$) $U, \Phi / \Phi, \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta$;

$C_{UR}$) $U, \Phi / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi$;

$C_{\sim}$) $U / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta, {\sim}\Phi$ .

Доведемо властивість C.

Для $P$-предикатів $T(\Phi_J) \cap F(\Phi_J) = \varnothing$. Тоді для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J}$ маємо $T(\Phi_J) \cap T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(U_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) \cap F(\Phi_J) = \varnothing$, звідки $U / \Phi, \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi$.

Доведемо властивість $C_{UL}$.

Маємо $\perp(\Phi_J) \cap T(\Phi_J) = \varnothing$. Звідси для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J}$ отримуємо $T(\Phi_J) \cap T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(U_J) \cap \perp(\Phi_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$, звідки $U, \Phi / \Phi, \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta$.

Доведемо властивість $C_{UR}$.

Маємо $\perp(\Phi_J) \cap F(\Phi_J) = \varnothing$. Звідси для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J}$ отримуємо $T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(U_J) \cap \perp(\Phi_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) \cap F(\Phi_J) = \varnothing$, звідки $U, \Phi / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi$.

Доведемо властивість $C_{\sim}$. Для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J}$ маємо $F({\sim}\Phi_J) = \varnothing$, тому $T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(U_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) \cap F({\sim}\Phi_J) = \varnothing$, звідки $U / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta, {\sim}\Phi$ .

**Теорема 2.** Для відношення $\models_{IR}^{\perp}$ маємо наступні властивості декомпозиції формул:

$\neg_L$) $U / \neg\Phi, \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta \Leftrightarrow U / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi$.

$\neg_R$) $U / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow U / \Phi, \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta$.

$\vee_L$) $U / \Phi \vee \Psi, \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow U / \Phi, \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta$ та $U / \Psi, \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta$.

$\vee_R$) $U / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow U / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi, \Psi$.

$\neg_U$) $U, \neg\vartheta / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta \Leftrightarrow U, \vartheta / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta$.

$\vee_U$) $U, \Phi \vee \vartheta / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow U, \Phi, \vartheta / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta$ та

$U, \Phi / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \vartheta, \Delta$ та $U, \vartheta / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Phi, \Delta$.

${\sim}_U$) $U, {\sim}\Phi / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow U / \Phi, \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta$ та $U / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi$.

${\sim}_L$) $U / {\sim}\Phi, \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow U, \Phi / \Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta$.

Властивості $\neg_L$, $\neg_R$, $\vee_L$, $\vee_R$ аналогічні відповідним властивостям відношення $\models_{IR}$ [7, 9] та доводяться подібним чином. Новими для LC є специфічні властивості $\neg_U$, $\vee_U$, ${\sim}_L$, ${\sim}_U$.

Доведемо властивість $\neg_U$.

Для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J}$ маємо

$\perp(\neg\vartheta_J) = \perp(\vartheta_J)$, звідки $U, \neg\vartheta / \Gamma \,{}_J\!\models_{IR}^{\perp} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(U_J) \cap \perp(\neg\vartheta_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$

$\Leftrightarrow T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(U_J) \cap \perp(\vartheta_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing \Leftrightarrow$

$U, \vartheta / \Gamma \,{}_J\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$.

Властивість $\vee_U$ випливає з того, що для $P$-предикатів маємо:

$$\perp(\Phi_J \vee \vartheta_J) = (\perp(\Phi_J) \cap \perp(\vartheta_J)) \cup$$

$$\cup (\perp(\Phi_J) \cap F(\vartheta_J)) \cup (F(\Phi_J) \cap \perp(\vartheta_J)).$$

При цьому враховуємо таке теоретико-множинне співвідношення:

$L \cap ((\Phi_{\perp} \cap \vartheta_{\perp}) \cup (\Phi_{\perp} \cap \vartheta_F) \cup (\Phi_F \cap \vartheta_{\perp})) =$

$= (L \cap \Phi_{\perp} \cap \vartheta_{\perp}) \cup (L \cap \Phi_{\perp} \cap \vartheta_F) \cup$

$\cup (L \cap \Phi_F \cap \vartheta_{\perp}) = \varnothing \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow L \cap \Phi_{\perp} \cap \vartheta_{\perp} = \varnothing$

та $L \cap \Phi_{\perp} \cap \vartheta_F = \varnothing$

та $L \cap \Phi_F \cap \vartheta_{\perp} = \varnothing$.

Таким чином, для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J}$ маємо:

$$U, \Phi \vee \vartheta / \Gamma \,{}_J\!\models_{IR}^{\perp} \Delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(U_J) \cap \perp(\Phi \vee \vartheta_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$$

$$\Leftrightarrow\ T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap ((\perp(\Phi_J) \cap \perp(\vartheta_J)) \cup$$

$$\cup(\perp(\Phi_J) \cap F(\vartheta_J)) \cup (F(\Phi_J) \cap \perp(\vartheta_J))) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$$

$$\Leftrightarrow T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap \perp(\Phi_J) \cap \perp(\vartheta_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing,$$

$$\text{та } T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap \perp(\Phi_J) \cap F(\vartheta_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing,$$

$$\text{та } T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap F(\Phi_J) \cap \perp(\vartheta_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{U}, \Phi, \vartheta \,/\, \Gamma\ {}_J|\!=_{IR}{}^{\perp} \Delta \ \text{ та }\ \mathrm{U}, \Phi \,/\, \Gamma\ {}_J|\!=_{IR}{}^{\perp} \vartheta, \Delta$$

$$\text{та }\ \mathrm{U}, \vartheta \,/\, \Gamma\ {}_J|\!=_{IR}{}^{\perp} \Phi, \Delta.$$

Властивість $\sim_{\mathrm{U}}$ випливає із такого:

$$\perp(\tilde{\ }\Phi_J) = T(\Phi_J) \cup F(\Phi_J).$$

При цьому враховуємо наступне теоретико-множинне співвідношення:

$$\mathrm{L} \cap (\mathrm{L}_T \cup \mathrm{L}_F) = (\mathrm{L} \cap \mathrm{L}_T) \cup (\mathrm{L} \cap \mathrm{L}_F) = \varnothing \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{L} \cap \mathrm{L}_T = \varnothing \text{ та } \mathrm{L} \cap \mathrm{L}_F = \varnothing.$$

Таким чином, для кожної інтерпретації ***J*** маємо:

$$\mathrm{U}, \tilde{\ }\Phi \,/\, \Gamma\ {}_J|\!=_{IR}{}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap \perp(\tilde{\ }\Phi_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$$

$$\Leftrightarrow\ T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap (T(\Phi_J) \cup F(\Phi_J)) \cap$$

$$\cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap T(\Phi_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing \ \text{ та}$$

$$T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap F(\Phi_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{U} \,/\, \Phi, \Gamma\ {}_J|\!=_{IR}{}^{\perp} \Delta \ \text{ та }\ \mathrm{U} \,/\, \Gamma\ {}_J|\!=_{IR}{}^{\perp} \Delta, \Phi.$$

Властивість $\sim_{\mathrm{L}}$ випливає із такого:

$$T(\tilde{\ }\Phi_J) = \perp(\Phi_J).$$

Тоді для кожної інтерпретації ***J*** маємо:

$$\mathrm{U} \,/\, \tilde{\ }\Phi, \Gamma\ |\!=_{IR}{}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ T(\tilde{\ }\Phi_J) \cap T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$$

$$\Leftrightarrow\ T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap \perp(\Phi_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{U}, \Phi \,/\, \Gamma\ |\!=_{IR}{}^{\perp} \Delta.$$

## 7. Пропозиційне секвенційне числення для відношення $|\!=_{IR}{}^{\perp}$

Для відношення $|\!=_{IR}{}^{\perp}$ в PLC побудуємо числення секвенційного типу.

Таке числення назвемо $PP_C$.

Секвенції будемо трактувати як множини формул, специфікованих (відмічених) символами $_{|-}$, $_{-|}$, $_{\perp}$.

Формули із Γ (вони відмічені символом $_{|-}$) назвемо *T*-формулами, формули із Δ (вони відмічені символом $_{-|}$) назвемо *F*-формулами, а формули із U (вони відмічені символом $_{\perp}$) – $\perp$-формулами, Це відповідає семантичному трактуванню формул із Γ як істинних, формул із Δ – як хибних. а формул із U – як невизначених.

Позначаємо секвенції як $_{|-}\Gamma\ _{\perp}\mathrm{U}\ _{-|}\Delta$, скорочено як Σ.

*Виведення* в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Такі дерева називають секвенційними.

*Правилами виведення* секвенційних числень є секвенційні форми. Вони є синтаксичними аналогами семантичних властивостей відповідних відношень логічного наслідку.

Секвенційні форми будемо записувати у вигляді $\dfrac{\Sigma}{\Omega}$ або $\dfrac{\Sigma \quad \Lambda}{\Omega}$, або $\dfrac{\Sigma \quad \Lambda \quad \Theta}{\Omega}$.

Секвенції над рискою називають засновками, під рискою – висновками. У нашому випадку засновки – це секвенції, зіставлені правим частинам відповідних семантичних властивостей, висновки – це секвенції, зіставлені їх лівим частинам.

Дамо індуктивне визначення секвенційного дерева.

1. Секвенція Σ утворює *тривіальне* секвенційне дерево з єдиною вершиною Σ, яка є коренем дерева.

2. Нехай α, β, γ – секвенційні дерева, коренями яких є відповідно Σ, Υ, Θ; нехай $\dfrac{\Sigma}{\Omega}$, $\dfrac{\Sigma \quad \Upsilon}{\Omega}$, $\dfrac{\Sigma \quad \Lambda \quad \Theta}{\Omega}$ – секвенційні форми. Тоді $\begin{array}{c}\alpha\\ |\\ \Omega\end{array}$, $\begin{array}{c}\alpha \quad \beta\\ \backslash\,/\\ \Omega\end{array}$, $\begin{array}{c}\alpha \quad \beta \quad \gamma\\ \backslash \ \ | \ \ /\\ \Omega\end{array}$ – секвенційні дерева з коренем Ω.

*Аксіомами* секвенційного числення є замкнені секвенції.

Поняття замкненої секвенції уточнюється так, що має виконуватись умова:

якщо секвенція $_{\vdash}\Gamma\,_{\perp}\mathrm{U}\,_{\dashv}\Delta$ замкнена,

то $\mathrm{U}/\Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta$.

Секвенція $\Sigma$ *вивідна*, або *має виведення*, якщо існує *замкнене секвенційне дерево* з коренем $\Sigma$. Таке дерево називають виведенням секвенції $\Sigma$.

Тривіальне секвенційне дерево замкнене, якщо це замкнена секвенція.

Нетривіальне секвенційне дерево замкнене, якщо кожний його лист (кінцева вершина, відмінна від кореня) – замкнена секвенція.

Секвенційне числення визначається *базовими секвенційними формами* та *умовами замкненості секвенції*.

Наведемо умову замкненості секвенції у численні $PP_C$.

Секвенція $_{\vdash}\Gamma\,_{\perp}\mathrm{U}\,_{\dashv}\Delta$ *замкнена*, якщо виконується умова $C \vee C_{UL} \vee C_{UR} \vee C_{\sim}$.

Тут:

C) існує $\Phi$: $\Phi\in\Gamma$ та $\Phi\in\Delta$;

$C_{UL}$) існує $\Phi$: $\Phi\in\Gamma$ та $\Phi\in\mathrm{U}$;

$C_{UR}$) існує $\Phi$: $\Phi\in\Delta$ та $\Phi\in\mathrm{U}$.

$C_{\sim}$) існує $\Phi$: ${\sim}\Phi\in\Delta$.

Замкненість секвенції $_{\vdash}\Gamma\,_{\perp}\mathrm{U}\,_{\dashv}\Delta$ гарантує наявність логічного наслідку $\mathrm{U}/\Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta$.

Це безпосередньо випливає з властивостей гарантованої наявності логічного наслідку $C$, $C_{UL}$, $C_{UR}$, $C_{\sim}$.

Базові секвенційні форми $PP_C$-числень – це форми декомпозиції, вони індукуються відповідними властивостями декомпозиції формул:

$$_{\vdash}\neg\ \frac{_{\dashv}\Phi,\ \Sigma}{_{\vdash}\neg\Phi,\ \Sigma}; \qquad _{\dashv}\neg\ \frac{_{\vdash}\Phi,\ \Sigma}{_{\dashv}\neg\Phi,\ \Sigma};$$

$$_{\vdash}\vee\ \frac{_{\vdash}\Phi,\ \Sigma \quad _{\vdash}\Psi,\ \Sigma}{_{\vdash}\Phi\vee\Psi,\ \Sigma}; \qquad _{\dashv}\vee\ \frac{_{\dashv}\Phi,\ _{\dashv}\Psi,\ \Sigma}{_{\dashv}\Phi\vee\Psi,\ \Sigma};$$

$$_{\perp}\neg\ \frac{_{\perp}\Phi,\ \Sigma}{_{\perp}\neg\Phi,\ \Sigma};$$

$$_{\perp}\vee\ \frac{_{\perp}\Phi,\ _{\perp}\vartheta,\ \Sigma \quad _{\perp}\Phi,\ _{\dashv}\vartheta,\ \Sigma \quad _{\dashv}\Phi,\ _{\perp}\vartheta,\ \Sigma}{_{\perp}\Phi\vee\vartheta,\ \Sigma};$$

$$_{\perp}{\sim}\ \frac{_{\vdash}\Phi,\ \Sigma \quad _{\dashv}\Phi,\ \Sigma}{_{\perp}{\sim}\Phi,\ \Sigma}; \qquad _{\vdash}{\sim}\ \frac{_{\perp}\Phi,\ \Sigma}{_{\vdash}{\sim}\Phi,\ \Sigma}.$$

Форми декомпозиції індукуються відповідними властивостями декомпозиції формул $\neg_L$, $\neg_R$, $\vee_L$, $\vee_R$, $\neg_U$, $\vee_U$, ${\sim}_U$, ${\sim}_L$.

На базі властивостей відношення $\models_{IR}^{\perp}$ маємо основну властивість секвенційних форм $PP_C$-числень.

**Теорема 3.**

1. Нехай $\dfrac{_{\vdash}\Lambda\,_{\perp}\mathrm{W}\,_{\dashv}\mathrm{K}}{_{\vdash}\Gamma\,_{\perp}\mathrm{U}\,_{\dashv}\Delta}$ – базова секвенційна форма.

Тоді:

a) $\mathrm{U}/\Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W}/\Lambda \models_{IR}^{\perp} \mathrm{K}$;

b) $\mathrm{U}/\Gamma \not\models_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W}/\Lambda \not\models_{IR}^{\perp} \mathrm{K}$;

2. Нехай $\dfrac{_{\vdash}\Lambda\,_{\perp}\mathrm{W}\,_{\dashv}\mathrm{K} \quad _{\vdash}\mathrm{X}\,_{\perp}\mathrm{V}\,_{\dashv}\mathrm{Z}}{_{\vdash}\Gamma\,_{\perp}\mathrm{U}\,_{\dashv}\Delta}$ – базова секвенційна форма. Тоді:

a) $\mathrm{U}/\Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W}/\Lambda \models_{IR}^{\perp} \mathrm{K}$ та $\mathrm{V}/\mathrm{X} \models_{IR}^{\perp} \mathrm{Z}$;

b) $\mathrm{U}/\Gamma \not\models_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W}/\Lambda \not\models_{IR}^{\perp} \mathrm{K}$ або $\mathrm{V}/\mathrm{X} \not\models_{IR}^{\perp} \mathrm{Z}$.

3. Нехай

$\dfrac{_{\vdash}\Lambda\,_{\perp}\mathrm{W}\,_{\dashv}\mathrm{K} \quad _{\vdash}\mathrm{X}\,_{\perp}\mathrm{V}\,_{\dashv}\mathrm{Z} \quad _{\vdash}\mathrm{M}\,_{\perp}\mathrm{Y}\,_{\dashv}\mathrm{N}}{_{\vdash}\Gamma\,_{\perp}\mathrm{U}\,_{\dashv}\Delta}$ – базова секвенційна форма.

Тоді:

a) $\mathrm{U}/\Gamma \models_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W}/\Lambda \models_{IR}^{\perp} \mathrm{K}$ та $\mathrm{V}/\mathrm{X} \models_{IR}^{\perp} \mathrm{Z}$ та $\mathrm{Y}/\mathrm{M} \models_{IR}^{\perp} \mathrm{N}$;

b) $\mathrm{U}/\Gamma \not\models_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W}/\Lambda \not\models_{IR}^{\perp} \mathrm{K}$ або $\mathrm{V}/\mathrm{X} \not\models_{IR}^{\perp} \mathrm{Z}$ або $\mathrm{Y}/\mathrm{M} \not\models_{IR}^{\perp} \mathrm{N}$.

Для побудованого секвенційного числення справджуються теореми коректності та повноти. Доведення цих теорем будуть наведені в наступних статтях.

## Висновки

В роботі досліджено нові програмно-орієнтовані логічні формалізми – логіки часткових квазіарних предикатів з предикатним доповненням. Такі логіки названі LC. Характерною особливістю цих логік є наявність спеціальної немонотонної операції (композиції) предикатного доповнення. Подібні операції використовуються в різних варіантах логік Флойда – Хоара з частковими перед- та після-умовами.

Основна увага в роботі зосереджена на вивченні LC пропозиційного рівня – PLC. Досліджено властивості композиції предикатного доповнення. Описано пропозиційні композиційні алгебри та мови PLC.

Для LC однозначних предикатів запропоновано та досліджено відношення неспростовнісного логічного наслідку за умов невизначеності. На основі властивостей цього відношення для PLC однозначних предикатів побудовано числення секвенційного типу.

## Література


1. Handbook of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. Oxford University Press, Vol. 1–5. 1993–2000.
2. Avron A., Zamansky A. Non-deterministic semantics for logical systems, in Handbook of Philosophical Logic, D.M. Gabbay, F. Guenthner (eds.), 2 nd ed. Vol. 16. (2011). Springer Netherlands. P. 227–304.
3. Gries D., Schneider F.B. Avoiding the undefined by underspecification. Springer Berlin Heidelberg. 1995. P. 366–373.
4. Hähnle R. Many-valued logic, partiality, and abstraction in formal specification languages. Logic Journal of the IGPL. **13** (2005). P. 415–433.
5. Jones C. Reasoning about partial functions in the formal development of programs. In: Proceedings of AVoCS'05. Vol. 145. Elsevier, Electronic Notes in Theoretical Computer Science (2006). P. 3–25.
6. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. К.: ВПЦ Київський університет. 2008. 528 с.
7. Нікітченко М.С. , Шкільняк С.С. Прикладна логіка. К.: ВПЦ Київський університет. 2013. 278 с.
8. Nikitchenko M., Shkilniak S. Semantic Properties of Logics of Quasiary Predicates. Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. Chisinau, Moldova. P. 180–197.
9. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів. *Проблеми програмування*. 2016. № 2–3. С. 73–86.
10. Mykola S. Nikitchenko and Stepan S. Shkilniak. Algebras and logics of partial quasiary predicates. Algebra and Discrete Mathematics, Volume 23 (2017). Number 2, P. 263–278.
11. Ivanov I., Nikitchenko M. On the sequence rule for the Floyd-Hoare logic with partial pre- and post-conditions. In Proceedings of the 14th International Conference on ICT. 2018. Vol. 2104 of CEUR Workshop Proc. P. 716–724.
12. Клини С. Математическая логика. М.: Мир, 1973. 480 с.
13. Kleene S.C. Introductions to Metamathematics. Van Nostrand, Princeton, 1952.
14. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Логіки загальних недетермінованих предикатів: семантичні аспекти. *Проблеми програмування*. 2018. № 2–3. С. 31–45.


## References


1. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T. (editors). (1993–2000). Handbook of Logic in Computer Science Oxford University Press, Vol. 1–5.
2. Avron A. and Zamansky A. (2011). Non-deterministic semantics for logical systems. In Handbook of Philosophical Logic, D.M. Gabbay, F. Guenthner (eds.), 2nd ed., Vol. 16, Springer Netherlands. P. 227–304.
3. Gries D. and Schneider F. (1995). Avoiding the undefined by underspecification. Springer Berlin Heidelberg.
4. Hähnle R. (2005). Many-valued logic, partiality, and abstraction in formal specification languages. In Logic Journal of the IGPL, **13**. P. 415–433.
5. Jones C. (2006). Reasoning about partial functions in the formal development of programs. In Proceedings of AVoCS'05. Vol. 145. Elsevier, Electronic Notes in Theoretical Computer Science. P. 3–25.
6. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2008). Mathematical logic and theory of algorithms. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in ukr).
7. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2013). Applied logic. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in ukr).
8. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2015). Semantic Properties of Logics of Quasiary Predicates. In Workshop on Foundations of

Informatics: Proceedings FOI-2015. Chisinau, Moldova. P. 180–197.

9. Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S. (2016). Pure first-order logics of quasiary predicates. In Problems in Progamming. N 2–3. P. 73–86 (in ukr).
10. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2017). Algebras and logics of partial quasiary predicates. In Algebra and Discrete Mathematics. Vol. 23. N 2. P. 263–278.
11. Ivanov I. and Nikitchenko M. (2018). On the sequence rule for the Floyd-Hoare logic with partial pre- and post-conditions. In Proceedings of the 14th International Conference on ICT. Vol. 2104 of CEUR Workshop Proc. P. 716–724.
12. Kleene S. (1973) Mathematical Logic. Moscow: Mir (in rus).
13. Kleene S. (1952) Introductions to Metamathematics. Van Nostrand, Princeton.
14. Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S. (2018). Logics of general non-deterministic predicates: semantic aspects. In Problems in Progamming. N 2–3. P. 31–45 (in ukr).

Одержано 07.02.2019

***Про авторів:***

*Нікітченко Микола Степанович,*
доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри Теорії
та технології програмування.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – понад 250,
у тому числі у фахових виданнях –
понад 110.
Кількість наукових публікацій в
зарубіжних виданнях – понад 60.
Scopus Author ID: 6602842336.
h-індекс (Google Scholar): 13 (11 з 2014).
http://orcid.org/0000-0002-4078-1062.

*Шкільняк Оксана Степанівна*,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри
інформаційних систем.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – понад 90,
у тому числі у фахових виданнях – 35.
Кількість наукових публікацій в
зарубіжних виданнях – 12.
Scopus Author ID: 57190873266
h-індекс (Google Scholar): 5 (4 з 2014)
http://orcid.org/0000-0003-4139-2525.

*Шкільняк Степан Степанович,*
доктор фізико-математичних наук,
професор, професор кафедри Теорії
та технології програмування.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – понад 240,
у тому числі у фахових виданнях –
понад 100.
Кількість наукових публікацій в
зарубіжних виданнях – 22.
Scopus Author ID: 36646762300
h-індекс (Google Scholar): 7 (5 з 2014).
http://orcid.org/0000-0001-8624-5778.

*Мамедов Тогрул Алірзайович*,
аспірант кафедри Теорії
та технології програмування.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – 9.
http://orcid.org/0000-0002-6049-604X

***Місце роботи авторів*:**

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 05 19.
E-mail: me.oksana@gmail.com