УДК 536.24

М.Г. БЕРДНИК*

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РІШЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛООБМІНУ ПОРОЖНЬОГО ІЗОТРОПНОГО ТІЛА ОБЕРТАННЯ

*Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», м. Дніпро, Україна

Анотація. *У статті вперше побудована узагальнена просторова математична модель розрахунку температурних полів у порожньому ізотропному тілі обертання з відомими рівняннями твірних ліній у циліндричній системі координат, яке обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості розповсюдження тепла у вигляді змішаної крайової задачі для гіперболічного рівняння теплопровідності з початковими і граничними умовами за умови, що теплофізичні властивості тіла є постійними, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура тіла є постійною, а на зовнішній поверхні тіла відомі значення температури і теплового потока, які є неперервні функції координат. Гіперболічне рівняння теплопровідності отримано із узагальненого рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Для вирішення отриманої крайової задачі шукане температурне поле представлено у вигляді комплексного ряду Фур'є. Рішення отриманих крайових задач для коефіцієнтів Фур'є були знайдені з застосуванням інтегральних перетворень Лапласа і побудованого нового інтегрального перетворення для двовимірного кінцевого простору. Власні значення і власні функції для ядра інтегрального перетворення знаходяться за допомогою методів кінцевих елементів і Гальоркіна. При цьому було зроблено розбиття області на симплекс-елементи. У підсумку температурне поле у порожньому ізотропному тілі обертання знайдено у вигляді збіжних рядів за функціями Фур'є. Отримане рішення крайової задачі є двічі неперервно диференційованим за просторовими координатами і один раз за часом. Знайдений розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну ізотропного тіла обертання, яке обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (супутники, сортопрокатні валки, ротори енергетичних агрегатів, дискові гальма та ін.).*

Ключові слова: *крайова задача, криволінійний інтеграл, узагальнене рівняння переносу енергії, інтегральне перетворення Лапласа, час релаксації.*

Аннотация. *В статье впервые построена обобщенная пространственная математическая модель расчета температурных полей в полом изотропном теле вращения с известными уравнениями образующих линий в цилиндрической системе координат, которое вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси OZ, с учетом конечной скорости распространения тепла в виде смешанной краевой задачи для гиперболического уравнения теплопроводности с начальными и граничными условиями при условии, что теплофизические свойства тела являются постоянными, а внутренние источники тепла отсутствуют. В начальный момент времени температура тела является постоянной, а на наружной поверхности тела известны значения температуры и теплового потока, которые являются непрерывными функциями координат. Гиперболическое уравнение теплопроводности получено из обобщенного уравнения переноса энергии для движущегося элемента сплошной среды с учетом конечности величины скорости распространения тепла. Для решения полученной краевой задачи искомое температурное поле представлено в виде комплексного ряда Фурье. Решение полученных краевых задач для коэффициентов Фурье были найдены с применением интегральных преобразований Лапласа и построенного нового интегрального преобразования для двумерного конечного пространства. Собственные значения и собственные функции для ядра интегрального преобразования находятся с помощью методов конечных элементов и Галеркина. При этом было сделано разбиение области на симплекс-элементы. В результате температурное поле в полом изотропном теле вращения найдено в виде сходящихся рядов по функциям Фурье. Полученное решение краевой задачи является дважды непрерывно дифференцированным по пространственным координатам и один раз по времени. Найденное решение обобщенной краевой задачи теплообмена полого изотропного тела вращения, которое вращается, с учетом*

конечности величины скорости распространения тепла может найти применение при моделировании температурных полей, возникающих во многих технических системах (спутники, сортопрокатные валки, роторы энергетических агрегатов, дисковые тормоза и др.).
Ключевые слова: *краевая задача, криволинейный интеграл, обобщенное уравнение переноса энергии, интегральное преобразование Лапласа, время релаксации.*

Abstract. *In the article for the first time a generalized spatial mathematical model for calculating temperature fields in an empty isotropic body of rotation with known equations of generating lines in a cylindrical coordinate system is constructed. It rotates with a constant angular velocity around the OZ axis, taking into account the final rate of heat propagation in the form of a mixed boundary problem for the hyperbolic equation of heat conduction with initial and boundary conditions, provided that the thermophysical properties of the body are constant, and internal sources of heat are absent. At the initial moment, the temperature of the body is constant, and on the outside of the body are known values of temperature and heat flux which are continuous coordinate functions. The hyperbolic heat equation is derived from a generalized energy transfer equation for a moving element of a continuous medium, taking into account the finiteness of the velocity distribution of heat. To solve the boundary-value problem, the desired temperature field is represented as a complex Fourier series. The solutions of the boundary value problems obtained for Fourier coefficients were found using integral Laplace transforms and constructed a new integral transform for a two-dimensional finite space. Own values and their own functions for the integral transformation core are found using finite element and Galerkin methods. In this case, the division of the area into simplex elements was made. As a result, the temperature field in an empty isotropic body of rotation is found in the form of convergent series in Fourier functions. The obtained solution of the boundary value problem is twice continuously differentiated by spatial coordinates and once per time. The solution of the generalized boundary-value heat transfer problem for an isotropic rotating body that rotates, taking into account the finiteness of the velocity of heat propagation, can be found in the modulation of temperature fields that occur in a number of technical systems (satellites, rollers, rotors of power generating units, disk brakes, etc.).*
Keywords: *boundary value problem, curvilinear integral, generalized equation of transfer of energy, integral Laplace transform, relaxation time.*

1. Вступ. Постановка проблеми, аналіз останніх досліджень і публікацій

Диски складної форми, які обертаються, є найважливішим елементом багатьох машин. Можливість отримання високих параметрів роботи таких машин визначається міцністю і довговічністю дисків. У більшості сучасних турбомашин диски працюють в умовах підвищеної навантаженості, що призводить до виникнення пластичних деформацій, де необхідно враховувати вплив високих температур і виникнення температурних напружень. Великий вплив на величину температурних напружень дає закон зміни температури по радіусу диска. Відомо, що заміна лінійного закону зміни температури по радіусу квадратичним законом може призвести до істотного зростання окружних напружень. Тому достатня точність визначення температурного поля в розрахунках на міцність має принципове значення. Крім того, при великих швидкостях обертання вплив скінченності величини швидкості поширення тепла на теплообмін стає помітним [1–2]. Ось чому до числа проблем, які представляють великий теоретичний і практичний інтерес, відноситься проблема вивчення температурного поля в тілах обертання, які обертаються навколо своєї осі, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла.

Як показує огляд літератури, теплообмін у тілах, які обертаються, вивчений на даний час ще недостатньо [1]. Показано, що чисельні методи дослідження нестаціонарних неосесиметричних задач теплообміну циліндрів, які обертаються, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання.

Так, доводиться в [1], що умови стійкості обчислень у методі скінченних елементів і методі кінцевих різниць, що застосовуються до розрахунку нестаціонарних неосесиметричних температурних полів циліндрів, які обертаються, визначаються аналогічними характеристиками. Ці умови мають такий вигляд:

$$1-\frac{\Delta F_0}{\Delta\varphi^2}\geq 0 \quad \text{і} \quad \frac{1}{\Delta\varphi}-\frac{Pd}{2}\geq 0\,.$$

Якщо $Pd=10^5$, що відповідає кутовій швидкості обертання металевого циліндра $\omega=1{,}671\,сек^{-1}$ радіусом 100 мм, змінні $\Delta\varphi$ и ΔF_o повинні бути підпорядковані таким умовам:

$$\Delta\varphi\leq 2\cdot 10^{-5} \quad \text{і} \quad \Delta F_o\leq 2\cdot 10^{-10}.$$

Для рівномірно охолоджуваного циліндра за умови Bi=5 час, необхідний для того, щоб температура досягла 90% стаціонарного стану, дорівнює $Fo\approx\ 0{,}025$ [1]. Це означає, що потрібно принаймні здійснити $1{,}3\cdot 10^8$ операцій по годині для того, щоб було досягнуто стаціонарний розподіл температури.

Більше того, потрібно відзначити, що протягом одного циклу обчислень потрібно здійснити $3{,}14\cdot 10^5$ обчислень, так як внутрішній стан у кільці характеризується $3{,}14\cdot 10^5$ точками. У результаті видно, що число обчислень, необхідних для отримання чисельного результату, видається нереальним.

Тому, для вирішення крайових задач, які виникають при математичному моделюванні тривимірних нестаціонарних процесів теплообміну в тілах, які обертаються, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

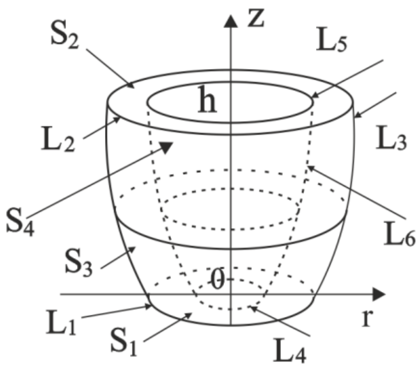

Рисунок 1 – Тіло обертання з твірними лініями $r=\xi(z), r=\xi_1(z)$

Постановка задачі. Розглянемо розрахунок температурного поля тіла обертання (рис. 1) з твірними лініями L_3, L_6, рівняння яких $r=\xi(z), r=\xi_1(z)$ відповідно у циліндричній системі координат (ρ,φ,z). Тіло обертання обмежене двома торцями S_1 $(z=0)$, S_2 $(z=h)$ і бічними поверхнями обертання S_3, S_4. Бічні поверхні обертання S_3, S_4 перетинаються з поверхнями S_j уздовж ліній L_j, $j=1{,}2$, і L_k, $k=4{,}5$ відповідно.

Тіло обертається навколо осі OZ з постійною кутовою швидкістю ω, а швидкість поширення тепла є відомою величиною. Теплофізичні властивості тіла не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура тіла постійна G_0, а на зовнішній и внутрішній бічних поверхнях тіла відоме значення температури $V(\varphi,z)$ і $V_1(\varphi,z)$ відповідно. На торцях відомі значення теплового потоку $G_1(r,\varphi)$ і $G_2(r,\varphi)$ при $z=0$ і $z=h$ відповідно.

2. Розв’язок задачі

В [1] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно з [1], узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, приймає вигляд

$$\gamma\, c\left\{\frac{\partial T}{\partial t}+\omega\frac{\partial T}{\partial\varphi}+\tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\omega\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial t}\right]\right\}=\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right], \quad (1)$$

де γ – щільність середовища, c – питома теплоємність, λ – коефіцієнт теплопровідності, $T(\rho,\varphi,z,t)$ – температура середовища, t – час, τ_r – час релаксації.

Математично задача визначення температурного поля циліндра складається в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (1) в області

$$D=\{(\rho,\varphi,z,t)|\rho\in(\varsigma_1(z),\varsigma(z)),\varphi\in(0,2\pi),z\in(0,h),t\in(0,\infty)\},$$

що, з урахуванням прийнятих допущень, запишеться у виді:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\omega\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}+\tau_r\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\tau_r\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi\partial t}=\frac{a}{R^2}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right] \quad (2)$$

з початковими умовами

$$\theta(\rho,\phi,z,0)=0, \qquad \frac{\partial\theta(\rho,\phi,z,0)}{\partial t}=0 \quad (3)$$

і граничними умовами

$$\theta(\varsigma_1(z),\varphi,z,t)=\Psi(\varphi,z),\ \theta(\varsigma(z),\varphi,z,t)=G(\varphi,z)\ , \quad (4)$$

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^t\left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=0}e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}d\zeta=\Theta(\rho,\varphi),\\[2ex] \displaystyle\int_0^t\left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=1}e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}d\zeta=\Lambda(\rho,\varphi),\end{cases} \quad (5)$$

де $\theta=\dfrac{T(\rho,\varphi,z,t)-G_0}{T_{\max}-G_0}$ – відносна температура тіла, $a=\dfrac{\lambda}{c\gamma}$ – коефіцієнт температуропровідності, $T_{\max}=\max\limits_{r,\phi,z}\{V(\phi,z),V_1(\phi,z)\}$, $R=\max\limits_{z}\{\xi(z)\}$, $\rho=\dfrac{r}{R}$, $\varsigma(z)=\dfrac{\xi(z)}{R}$, $\varsigma_1(z)=\dfrac{\xi_1(z)}{R}$, $\Theta(\rho,\varphi)=\dfrac{G_1(\rho,\varphi)\tau_r h}{\lambda(T_{\max}-G_0)}$, $\Lambda(\rho,\varphi)=\dfrac{G_2(\rho,\varphi)\tau_r h}{\lambda(T_{\max}-G_0)}$, $\Psi(\varphi,z),G(\varphi,z),\Theta(\rho,\varphi)$, $\Lambda(\rho,\varphi)\in C(0,2\pi)$.

Тоді рішення крайової задачі (2)–(5) $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ є двічі неперервно диференційованим по ρ і φ, z, один раз по t в області D і неперервним на $\overline{D}$ [3], тобто $\theta(\rho,\varphi,z,t)\in C^{2,1}(D)\cap C(\overline{D})$, а функції $G(\varphi,z),\Psi(\varphi,z),\Theta(\rho,\varphi)$, $\Lambda(\rho,\varphi)$, $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [3]:

$$\begin{Bmatrix}\theta(\rho,\varphi,z,t)\\ G(\varphi,z)\\ \Psi(\varphi,z)\\ \Theta(\rho,\varphi)\\ \Lambda(\rho,\varphi)\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}\theta_n(\rho,z,t)\\ G_n(z)\\ \Psi_n(z)\\ \Theta_n(\rho)\\ \Lambda_n(\rho)\end{Bmatrix}\cdot\exp(in\varphi), \quad (6)$$

де $$\begin{Bmatrix} \theta_n(\rho,z,t) \\ G_n(z) \\ \Psi_n(z) \\ \Theta_n(\rho) \\ \Lambda_n(\rho) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \theta(\rho,\varphi,z,t) \\ G(\varphi,z) \\ \Psi(\varphi,z) \\ \Theta(\rho,\varphi) \\ \Lambda(\rho,\phi) \end{Bmatrix} \cdot \exp(-in\phi)d\varphi,$$

$\theta_n(\rho,z,t) = \theta_n^{(1)}(\rho,z,t) + i\theta_n^{(2)}(\rho,z,t)$, $\mathrm{G}_n(z) = G_n^{(1)}(z) + iG_n^{(2)}(z)$, $\Psi_n(z) = \Psi_n^{(1)}(z) + i\Psi_n^{(2)}(z)$, $\Theta_n(\rho) = \Theta_n^{(1)}(\rho) + i\Theta_n^{(2)}(\rho)$, $\Lambda_n(\rho) = \Lambda_n^{(1)}(\rho) + i\Lambda_n^{(2)}(\rho)$.

З огляду на те, що $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ функція дійсна, надалі обмежимося розглядом $\theta_n(\rho,z,t)$ для $n = 0,1,2,\ldots$, тому що $\theta_n(\rho,z,t)$ і $\theta_{-n}(\rho,z,t)$ будуть комплексно спряженими [3]. Підставляючи значення функцій з (6) у (2)–(5), у результаті одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial t} + \vartheta_n^{(i)}\theta_n^{(m_i)} + \tau_r\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial t^2} + \tau_r\vartheta_n^{(i)}\frac{\partial\theta_n^{(m_i)}}{\partial t} = \frac{a}{R^2}\left[\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}\theta_n^{(i)} + \frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial z^2}\right] \tag{7}$$

з початковими умовами

$$\theta_n^{(i)}(\rho,z,0) = 0, \quad \frac{\partial\theta_n^{(i)}(\rho,z,0)}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

і граничними умовами

$$\theta_n^{(i)}(\varsigma_1(z),z,t) = \Psi_n^{(i)}(z), \quad \theta_n^{(i)}(\varsigma(z),z,t) = G_n^{(i)}(z), \tag{9}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t \left.\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial\rho}\right|_{z=0} e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}\,d\zeta = \Theta_n^{(i)}(\rho), \\ \displaystyle\int_0^t \left.\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial\rho}\right|_{z=1} e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}\,d\zeta = \Lambda_n^{(i)}(\rho), \end{cases} \tag{10}$$

де $\vartheta_n^{(1)} = -\omega n,\ \vartheta_n^2 = \omega n,\ m_1 = 2,\ m_2 = 1,\ i = 1, 2$.

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (7) з умовами (8)–(10) інтегральне перетворення Лапласа [3]:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$

У результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$s\tilde{\theta}_n^{(i)} + \vartheta_n^{(i)}\left(\tilde{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r s\tilde{\theta}_n^{(m_i)}\right) + \tau_r s^2\tilde{\theta}_n^{(i)} = \frac{a}{R^2}\left[\frac{\partial^2\tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}\tilde{\theta}_n^{(i)} + \frac{\partial^2\tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z^2}\right] \tag{11}$$

з граничними умовами

$$\tilde{\theta}_n^{(i)}\Big|_{\rho=\varsigma_1(z)} = \tilde{\Psi}_n^{(i)}(z), \quad \tilde{\theta}_n^{(i)}\Big|_{\rho=\varsigma(z)} = \tilde{G}_n^{(i)}(z), \tag{12}$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z}\Bigg|_{z=0} = \tilde{\Theta}_n^{(i)}(\rho), \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z}\Bigg|_{z=1} = \tilde{\Lambda}_n^{(i)}(\rho), \tag{13}$$

де $\tilde{\Theta}_n^{(i)}(\rho) = \Theta_n^{(i)}(\rho)\cdot\left(1+\frac{1}{s\tau_r}\right); \tilde{\Lambda}_n^{(i)}(z) = \Lambda_n^{(i)}(z)\cdot\left(1+\frac{1}{s\tau_r}\right).\ (i=1,\,2)$.

Для розв'язання крайової задачі (11)–(13) застосовуємо інтегральне перетворення:

$$\bar{f}\left(\mu_{n,k}\right) = \iint\limits_{D} \varphi\left(\rho, z, \mu_{n,k}\right)\cdot\rho\cdot \mathrm{f}\left(\rho, z\right) d\sigma, \tag{14}$$

де $\phi\left(\rho, z, \mu_{n,k}\right)$, $\mu_{n,k}$ – власні функції і власні значення.

Класична проблема власних значень і власних функцій формулюється як задача про визначення значень числових параметрів (власні значення) $\mu_{n,k}$ і функцій (власні функції) $\phi\left(x, y, \mu_{n,k}\right)$, які тотожньо нерівні нулю в області $\Xi = \left\{(x,y)\mid \mathrm{y}\in(0,\mathrm{h}),\, x\in\left(\varsigma_1(z), \varsigma(z)\right)\right\}$ та задовольняють рівнянню

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{n^2}{x^2}\phi + \mu_{n,k}\cdot\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \tag{15}$$

і допоміжним умовам

$$\phi\left(\varsigma_1(z), \mathrm{y}, \mu_{n,k}\right) = 0, \qquad \phi\left(\varsigma(z), y, \mu_{n,k}\right) = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\Bigg|_{y=0} = 0, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y}\Bigg|_{y=1} = 0, \tag{17}$$

де $\phi\left(x, y, \mu_n\right) \subset C^2(\Xi) = \left\{u(x,y)\in C(\Xi) : \partial_\alpha u(x,y)\in C(\Xi),\ \forall\alpha,\ |\alpha|\le 2\right\}$, $\partial_\alpha u(x,y) = \dfrac{\partial^{|\alpha|}u(x,y)}{\partial x^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}}$, $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2$ – мультиіндекс, компоненти якого є цілі невід'ємні числа.

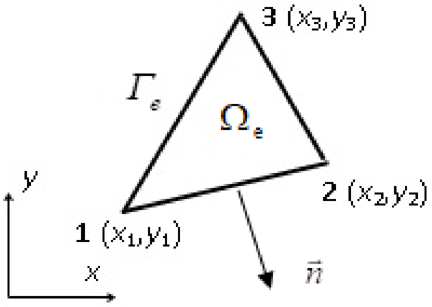

Рисунок 2 – Трикутний елемент першого порядку

Знайдемо власні значення $\mu_{n,k}$ і власні функції $\phi\left(x, y, \mu_{n,k}\right)$ із розв'язку задачі (15)–(17) за допомогою методів кінцевих елементів і Гальоркіна. Для цього зробимо розбиття області на симплекс-елементи (рис. 2).

Тоді функція $\phi(x,y)$ в середині симплекс-елемента виражається через функції форми N_1, N_2 і N_3 із відомими значеннями ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 у вершинах трикутника:

$$\phi_e(x,y) = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 = \left[N_e\right]^T\left\{\phi_e\right\}, \tag{18}$$

де $[N_e] = [N_1, N_2, N_3]^T$; $\left\{\phi_e\right\} = \left\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\right\}^T$, нижній індекс (e) означає довільний симплекс-елемент.

Для i-го вузла $(i = 1, 2, 3)$ функції форми мають вигляд

$$N_i(x,y)=\frac{1}{d}(a_i+b_ix+c_iy),$$

де $a_i=x_jy_k-x_ky_j$; $b_i=y_j-y_k$; $c_i=x_k-x_j$, $d=x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3+x_1y_2-x_2y_1$, i, j, k – послідовна нумерація вузлів симплекс-елемента при обході їх проти годинникової стрілки.

Для визначення функцій форми N_1, N_2, N_3 зручно використовувати L_i координати в середині симплекс-елемента, які визначаються відношенням площі трикутника, утвореного точкою і стороною, протилежною вершині i, до загальної площі трикутника:

$$L_1=\frac{1}{d}\cdot\left[(y_2-y_3)(x-x_2)+(x_3-x_2)(y-y_2)\right],$$

$$L_2=\frac{1}{d}\cdot\left[(y_3-y_1)(x-x_3)+(x_1-x_3)(y-y_3)\right],$$

$$L_3=\frac{1}{d}\left[(y_1-y_2)(x-x_1)+(x_2-x_1)(y-y_1)\right].$$

У разі лінійного симплекс-елемента, що містить три вершини, функції форми збігаються з відповідними L_i координатами

$$N_1=L_1,\ N_2=L_2,\ N_3=L_3.$$

Підставимо в рівняння (15) наближений розв’язок (18), тоді отримаємо рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)[N_e]^T\{\phi_e\}+\left(\mu_{n,k}-\frac{n^2}{x^2}\right)[N_e]^T\{\phi_e\}=0. \tag{19}$$

Множення лівої частини рівняння (19) на функцію форми $[N_e]$ і інтегрування по елементу *e* дає

$$\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2=\{0\},$$

де $I_1=\iint\limits_{\Omega_e}[N_e]\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)[N_e]^T dxdy\{\phi_e\}; I_2=\iint\limits_{\Omega_e}\left(\mu_{n,k}-\frac{n^2}{x^2}\right)[N_e][N_e]^T dxdy\{\phi_e\}.$

Інтегруючи I_1 по x і y, отримаємо

$$I_1=I_3-I_4,$$

$$I_3=\left[\int\limits_{\Gamma_e}[N_e]\frac{\partial\,[N_e]^T}{\partial x}dy+\int\limits_{\Gamma_e}[N_e]\frac{\partial\,[N_e]^T}{\partial y}dx\right]\{\varphi_e\},$$

$$I_4=\iint\limits_{\Omega_e}\left\{\frac{\partial\,[N_e]}{\partial x}\frac{\partial\,[N_e]^T}{\partial x}+\frac{\partial\,[N_e]}{\partial y}\frac{\partial\,[N_e]^T}{\partial y}-\frac{[N_e]}{x}\frac{\partial\,[N_e]^T}{\partial x}\right\}dxdy\{\varphi_e\}.$$

Враховуючи тотожне співвідношення

$$\int\limits_{\Gamma}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy+\int\limits_{\Gamma}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx=\int\limits_{\Gamma}\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx\right)=\int\limits_{\Gamma}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\Gamma,$$

одержуємо

$$I_3 = \left[\int_{\Gamma_e} [N_e] \frac{\partial [N_e]^T}{\partial n} d\Gamma \right] \{\phi_e\},$$

де $\partial / \partial n$ – похідна по зовнішній нормалі, $\int_\Gamma d\Gamma$ – криволінійний інтеграл по межі.

Сумування по всіх елементах дає

$$\sum_e \left[\int_{\Gamma_e} [N_e] \frac{\partial\, [N_e]^T}{\partial n} d\Gamma \right] \{\varphi_e\} \;+\; \sum_e \iint_{\Omega_e} \left(\mu_{n,k} - \frac{n^2}{x^2} \right) [N_e][N_e]^T dxdy \{\varphi_e\} \;- \\ -\sum_e \iint_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial\, [N_e]}{\partial x} \frac{\partial\, [N_e]^T}{\partial x} + \frac{\partial\, [N_e]}{\partial y} \frac{\partial\, [N_e]^T}{\partial y} - \frac{[N_e]}{x} \frac{\partial\, [N_e]^T}{\partial x} \right\} dxdy \{\varphi_e\} = \{0\}. \qquad (20)$$

Помноживши перший доданок (20) на вираз $\{\phi_e\}\{\phi_e\}^T$, одержуємо

$$I_3 = \sum_e \varphi_e\}^T \left[\int_{\Gamma_e} [N_e] \frac{\partial\, [N_e]^T}{\partial n} d\Gamma \right] \{\varphi_e\} = \sum_e \left[\int_{\Gamma_e} \left(\{\varphi_e\}^T [N_e] \right) \cdot \frac{\partial \left([N_e]^T \{\varphi_e\} \right)}{\partial n} d\Gamma \right] = \\ = \sum_e \left[\int_{\Gamma_e} \varphi_e \frac{\partial\ \varphi_e}{\partial n} d\Gamma \right].$$

Враховуючи граничну умову, можна знехтувати першим доданком у (20). Тоді (20) приймає вигляд

$$[K] + \mu_{n,k} \cdot [M] \; = \{0\}, \qquad (21)$$

де

$$[K] = \sum_e \left\{ -\iint_e \left(\frac{\partial [N_e]}{\partial x} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial x} + \frac{\partial [N_e]}{\partial y} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial y} - \frac{[N_e]}{x} \frac{\partial\, [N_e]^T}{\partial x} \right) dxdy - \frac{n^2}{x^2} \iint_e [N_e][N_e]^T dxdy \right\} \phi_e,$$

$$[M] = \sum_e \iint_e [N_e][N_e]^T dxdy \cdot \{\phi_e\}.$$

Таким чином, власні функції $\phi(x, y, \mu_{n,k})$ і власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із (21), а формула оберненого перетворення має вигляд

$$\mathrm{f}(\rho, z) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\phi(\rho, z, \mu_{n,k})}{\left\| \phi(\rho, z, \mu_{n,k}) \right\|^2} \bar{f}(\mu_{n,k}). \qquad (22)$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (11) з граничними умовами (12)–(13) інтегральне перетворення [14]. У результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\bar{\bar{\theta}}_n^{(i)}$:

$$s\tilde{\bar{\bar{\theta}}}_n^{(i)} + \vartheta_n^{(i)} \left(\tilde{\bar{\bar{\theta}}}_n^{(m_i)} + \tau_r s \tilde{\bar{\bar{\theta}}}_n^{(m_i)} \right) + \tau_r s^2 \tilde{\bar{\bar{\theta}}}_n^{(i)} = q_{n,k} \left(\frac{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}}{\mu_{n,k}} - \bar{\bar{\theta}}_n^{(i)} \right), \qquad (23)$$

де

$$\tilde{\Omega}^{(i)}_{n,k} = \int_0^h \left[\varsigma_1(z)\cdot \left.\frac{\partial\phi(\mu_n,\rho,z)}{\partial\rho}\right|_{\rho=\varsigma_1(z)} \cdot \tilde{\Psi}^{(i)}_n(z) - \cdot\varsigma(z)\cdot \left.\frac{\partial\phi(\mu_{n,k},\rho,z)}{\partial\rho}\right|_{\rho=\varsigma(z)}\cdot \tilde{G}^{(i)}_n(z)\right]\cdot dz +$$

$$\chi\oint_L \rho\left(Q(\mu_{n,k},\rho,z)\frac{\partial\tilde{\theta}^{(i)}_n}{\partial z} - \tilde{\theta}^{(i)}_n \frac{\partial Q(\mu_{n,k},\rho,z)}{\partial z}\right)d\rho;\quad q_{n,k} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{R}^2}\,\mu_{n,k};\, \mathrm{i}=1,2.$$

Криволінійний інтеграл обчислюється по замкненому додатно орієнтованому контуру ADCB (рис. 3).

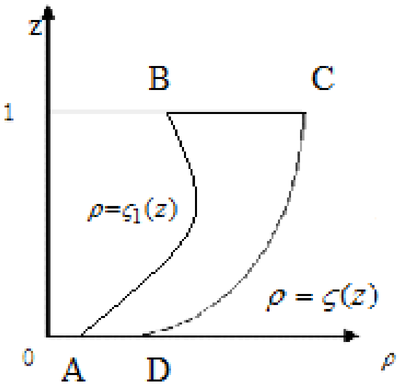

Рисунок 3 – Замкнутий контур з твірними лініями
$\rho=\varsigma_1(z)$, $\rho=\varsigma(z)$

Розв’язавши систему рівнянь (23), одержуємо

$$\bar{\tilde{\theta}}^{(i)}_n = \alpha_{n,k}\frac{\tilde{\Omega}^{(i)}_{n,k}\left(\tau_r s^2+s+q_{n,k}\right) + (-1)^{i+1}\omega n\tilde{\Omega}^{(m_i)}_{n,k}(1+s\tau_r)}{\left(\tau_r s^2+s+q_{n,k}\right)^2+\omega^2 n^2(1+s\tau_r)^2}, \qquad (24)$$

де $\alpha_{n,k} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{R}^2}$, $(i=1,2)$.

Застосовуючи до зображення функцій (24) формули оберненого перетворення Лапласа [4], одержуємо оригінали функцій:

$$\bar{\theta}^{(1)}_n(\mu_{n,k},t) = \sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\left\{\tilde{\Omega}^{(1)}_{n,k}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)+\tau_r\omega n i\right]+\tilde{\Omega}^{(2)}_{n,k}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n-(2\tau_r s_j+1)i\right]\right\}\cdot$$
$$\left(e^{s_j t}-1\right) + \sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{\tilde{\Omega}^{(1)}_{n,k}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)-\tau_r\omega n i\right]+\tilde{\Omega}^{(2)}_{n,k}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n+(2\tau_r s_j+1)i\right]\right\},$$
$$\cdot\left(e^{s_j t}-1\right), \qquad (25)$$

$$\bar{\theta}^{(2)}_n(\mu_{n,k},t) = \sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{\tilde{\Omega}^{(2)}_{n,k}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)+\tau_r\omega n i\right]-\tilde{\Omega}^{(1)}_{n,k}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n-(2\tau_r s_j+1)i\right]\right\}\cdot$$
$$\left(e^{s_j t}-1\right) + \sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{\tilde{\Omega}^{(2)}_{n,k}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)-\tau_r\omega n i\right]-\tilde{\Omega}^{(1)}_{n,k}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n+(2\tau_r s_j+1)i\right]\right\}$$
$$\left(e^{s_j t}-1\right), \qquad (26)$$

де $\zeta_{n,k}(s_j) = \dfrac{0.5 s_j^{-1} \alpha_{n,k}}{(2\tau_r s_j + 1)^2 + (\tau_r \omega n)^2}$, а значення s_j для $j = 1, 2, 3, 4$ визначаються за формулами

$$s_{1,2} = \frac{(\tau_r \omega n i - 1) \pm \sqrt{(1 + \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}, \; s_{3,4} = \frac{(\tau_r \omega n i + 1) \pm \sqrt{(1 - \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень (6) і (17) одержуємо температурне поле тіла обертання, яке обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(\rho, \varphi, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t) + i \cdot \bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t) \right] \frac{Q(\mu_{n,k}, \rho, z)}{\left\| Q(\mu_{n,k}, \rho, z) \right\|^2} \right\} \cdot \exp(in\varphi),$$

де значення $\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t)$ і $\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t)$ визначаються за формулами (25), (26).

3. Висновки

Вперше побудована математична модель розрахунку полів температури у порожньому ізотропному тілі обертання, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, яке обертається, у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічних рівнянь теплопровідності зі змішаними граничними умовами. Побудоване інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого знайдено температурне поле у порожньому ізотропному тілі обертання у вигляді збіжних рядів за функціями Фур'є. Знайдений розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну ізотропного тіла обертання, яке обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла може знайти застосування при моделюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (супутники, сортопрокатні валки, ротори енергетичних агрегатів, дискові гальма та ін.).

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бердник М.Г. Математичне моделювання просторової узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну циліндра, який обертається. *Искусственный интеллект*. 2015. № 1–2. С. 134–139.
2. Конет І.М., Ленюк М.П. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях. Львів, 2011. 48 с. (Препр. / НАН України Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 01.11).
3. Маркович Б.М. Рівняння математичної фізики. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. 384 с.
4. Лопушанська Г.П., Лопушанський А.О., М'яус О.М. Перетворення Фур'є, Лапласа: узагальнення та застосування. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. 152 с.

Стаття надійшла до редакції 26.12.2018