

УДК 519.657:004.021

Л.П. ВАКАЛ\*, Є.С. ВАКАЛ\*\*

**ЗНАХОДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ ЕМПІРИЧНИХ ФОРМУЛ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ЕВОЛЮЦІЙНИХ АЛГОРИТМІВ**

\*Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, м. Київ, Україна

\*\*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ, Україна

**Анотація.** Розглянуто задачу побудови емпіричних формул декількох змінних для наближеного представлення експериментальних даних. Для знаходження оптимальних значень параметрів емпіричних формул запропоновано адаптувати алгоритм диференціальної еволюції. Це один із кращих еволюційних алгоритмів, який стабільно знаходить глобальний оптимум функції за мінімальний час. Еволюційний процес в алгоритмі починається з генерації популяції випадкових векторів, координати яких представляють собою можливі значення шуканих параметрів. Далі з використанням операторів схрещування, мутації та селекції вектори постійно модифікуються з метою зменшення похибки наближення експериментальних даних емпіричною формулою. Алгоритм завершується, якщо вичерпано максимальне число поколінь популяції або відбувається стагнація еволюційного процесу. Запропонований алгоритм дозволяє знаходити оптимальні значення параметрів емпіричних формул різних типів (лінійних і нелінійних відносно параметрів) з використанням різних норм: квадратичної, рівномірної та ін. Визначено найкращі значення параметрів налаштування алгоритму: розміру популяції, сили мутації, ймовірності схрещування. Розглянуто приклади побудови лінійної емпіричної формули чотирьох змінних для обчислення вмісту оксиду заліза за показниками рентгенівського емісійного датчика та нелінійної емпіричної формули двох змінних для наближеного подання експериментальних даних щодо густини розбавленого сольового розчину в залежності від температури і концентрації солі. Отримані результати наближення експериментальних даних з різних областей науки і техніки дозволили зробити висновок про ефективність запропонованого алгоритму. Крім того, він простий у реалізації та використанні (містить мало параметрів, що потребують налаштування).

**Ключові слова:** емпірична формула декількох змінних, експериментальні дані, диференціальна еволюція, квадратичне наближення, рівномірне наближення.

**Аннотация.** Рассмотрена задача построения эмпирических формул нескольких переменных для приближенного представления экспериментальных данных. Для нахождения оптимальных значений параметров эмпирических формул предложено адаптировать алгоритм дифференциальной эволюции. Это один из лучших эволюционных алгоритмов, стабильно находящий глобальный оптимум функции за минимальное время. Эволюционный процесс в алгоритме начинается с генерации популяции случайных векторов, координаты которых представляют собой возможные значения искомого параметра. Далее с использованием операторов скрещивания, мутации и селекции векторы постоянно модифицируются в целях уменьшения погрешности приближения экспериментальных данных эмпирической формулой. Алгоритм заканчивается, если исчерпано максимальное число поколений или происходит стагнация эволюционного процесса. Предложенный алгоритм позволяет находить оптимальные значения параметров эмпирических формул разных типов (линейных и нелинейных относительно параметров) с использованием различных норм: квадратичной, равномерной и др. Определены наилучшие значения параметров настройки алгоритма дифференциальной эволюции: размера популяции, силы мутации, вероятности скрещивания. Рассмотрены примеры построения линейной эмпирической формулы четырех переменных для вычисления содержания оксида железа по показаниям рентгеновского эмиссионного датчика и нелинейной эмпирической формулы двух переменных для приближенного представления экспериментальных данных о плотности разбавленного солевого раствора в зависимости от температуры и концентрации соли. Полученные результаты приближений экспериментальных данных из разных областей науки и техники позволили сделать вывод об эффективности предложенного алгоритма.

Кроме того, он прост в реализации и использовании (содержит мало параметров, требующих настройки).

**Ключевые слова:** эмпирическая формула нескольких переменных, экспериментальные данные, дифференциальная эволюция, квадратичное приближение, равномерное приближение.

**Abstract.** The problem of constructing empirical formulas of several variables for experimental data approximation is considered. It is proposed to adapt a differential evolution algorithm for finding optimal parameters of the empirical formulas. It is one of the best evolutionary algorithms stably finding function global optimum in minimum time. In the algorithm the evolutionary process begins with a generation of random vectors population. Coordinates of the vectors are the possible values of the required parameters. Further, the vectors are constantly modified using operators of crossover, mutation and selection in order to decrease an approximation error of experimental data by an empirical formula. The algorithm is ended if maximum number of population generations is exhausted or the evolutionary process stagnates. The algorithm permits to find optimal values of parameters for linear and nonlinear (with respect to the parameters) empirical formulas using different norms: quadratic, uniform, etc. The best values of setting parameters of the differential evolution algorithm such as a population size, a mutation force, a crossing probability are determined. Two examples of constructing a linear empirical formula of four variables for calculating the iron oxide content from indications of an X-ray emission sensor and constructing a nonlinear empirical formula of two variables for approximation of experimental data on density of dilute solution as a function of temperature and salt concentration are considered. The obtained results of approximations for experimental data from different fields of science and technology permit to conclude that the proposed algorithm is effective. It is already simple for programming and using (it contains few setting parameters requiring customization).

**Keywords:** empirical formula of several variables, experimental data, differential evolution, quadratic approximation, uniform approximation.

## 1. Вступ

Сучасний рівень розвитку науки передбачає проведення широкомасштабних експериментів з метою вивчення закономірностей різних фізичних явищ. При експериментальному вивченні функціональної залежності величини  $y$  від  $x_1, \dots, x_s$  виконують серію з  $m$  вимірювань  $y$  при різних значеннях величин  $x_1, \dots, x_s$ . Отримані результати, як правило, подаються у вигляді таблиці або графічно. Точна функціональна залежність  $y$  від  $x_1, \dots, x_s$  невідома і через обмежену кількість значень, а також наявність випадкових помилок, однозначно відтворити її на основі експериментальних даних неможливо. Тому намагаються побудувати емпіричну формулу (функцію, модель), яка б достатньо добре наближала значення  $y_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  [1–5]. Велика кількість формул, що застосовуються в науці та техніці, є емпіричними. Відомо багато прикладів того, як отримання вдалої емпіричної функції стало важливою віхою на шляху до великих наукових відкриттів [2, 3].

Емпірична формула містить низку параметрів, які підлягають визначенню. Знаходження оптимальних значень параметрів формули декількох змінних, особливо в нелінійному відносно невідомих параметрів випадку, досить непроста задача. Її розв'язання потребує застосування чисельних методів і громіздких алгоритмів. Тому актуальним є створення ефективних і водночас нескладних алгоритмів для розв'язання вказаної задачі.

Мета роботи – розробити ефективний і водночас нескладний у реалізації алгоритм знаходження оптимальних параметрів лінійних і нелінійних емпіричних формул декількох змінних для наближеного представлення експериментальних даних з використанням різних норм наближення (квадратичної, рівномірної та ін.).

З цієї точки зору перспективним є підхід, що ґрунтується на використанні еволюційних алгоритмів (ЕА) – новітнього ефективного інструменту розв'язання оптимізаційних задач [6–10]. До групи ЕА належать генетичні алгоритми, еволюційні стратегії, алгоритм оптимізації мурашиної колонії, диференціальна еволюція тощо. У статті для знаходження

оптимальних значень параметрів емпіричних формул пропонується адаптувати один із кра-щих ЕА – алгоритм диференціальної еволюції (ДЕ) [11], який стабільно знаходить опти-мум функції за мінімальний час. Крім того, він простий у реалізації та використанні (міс-тить мало параметрів, що потребують налаштування).

## 2. Постановка задачі та аналіз методів її розв’язання

Нехай при експериментальному вивченні невідомої функціональної залежності  $y$  від  $x_1, \dots, x_s$  у результаті  $m$  вимірювань отримано таблицю відповідних значень  $x_{1k}, \dots, x_{sk}, y_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Задача побудови емпіричної формули для наближеного представлення екс-периментальних даних  $x_{1k}, \dots, x_{sk}, y_k$  полягає у знаходженні формули

$$y = f(x_1, \dots, x_s; a_1, \dots, a_n), \quad (1)$$

значення якої при  $x_1 = x_{1k}, \dots, x_s = x_{sk}$  якомога менше відрізнялися б від  $y_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Невідомі величини  $a_1, \dots, a_n$  називаються параметрами (коефіцієнтами) емпіричної форму-ли. Побудова емпіричної формули складається з двох етапів: вибору типу формули та ви-значення найкращих значень її параметрів. Будемо вважати, що на основі теоретичних мі-ркувань щодо характеру досліджуваної функціональної залежності або за допомогою спе-ціальних прийомів [2, 3, 5] тип формули вибрано, і перейдемо до другого етапу – знахо-дження найкращих значень параметрів  $a_1, \dots, a_n$ .

Позначимо через  $\varepsilon_k$  відхилення  $y_k$  від значень, обчислених за формулою (1)

$$\varepsilon_k(a_1, \dots, a_n) = w(x_{1k}, \dots, x_{sk}) \cdot [y_k - f(x_{1k}, \dots, x_{sk}; a_1, \dots, a_n)], \quad k = 1, \dots, m, \quad (2)$$

де  $w(x_1, \dots, x_s) \neq 0$  – деяка задана вагова функція. При  $w(x_1, \dots, x_s) \equiv 1$  маємо абсолютне відхилення, при  $w(x_{1k}, \dots, x_{sk}) = 1/y_k$  – відносне відхилення. Найкращими або оптималь-ними називаються такі значення параметрів  $a_1, \dots, a_n$ , для яких вибрана норма відхилення буде мінімальною. На практиці найчастіше використовуються такі норми:

– квадратична

$$\Delta_2(a_1, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k^2; \quad (3)$$

– рівномірна або чебишовська

$$\Delta_C(a_1, \dots, a_n) = \max_{1 \leq k \leq m} |\varepsilon_k|; \quad (4)$$

– норма  $l_1$

$$\Delta_1(a_1, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^m |\varepsilon_k|. \quad (5)$$

Оскільки реальні фізичні процеси здебільшого мають нелінійний характер, то для адекватного їх представлення доцільно використовувати нелінійні емпіричні формули. Ро-зрізняють два типи нелінійних формул. До першого відносяться формули, нелінійні відно-сно змінних  $x_1, \dots, x_s$ , але лінійні відносно шуканих параметрів  $a_1, \dots, a_n$ . Такі формули на-зиваються суттєво лінійними і можуть записуватися у вигляді

$$f(x_1, \dots, x_s; a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x_1, \dots, x_s), \quad (6)$$

де  $\varphi_i$  – нелінійні функції змінних  $x_1, \dots, x_s$ . До другого типу належать емпіричні формули, нелінійні відносно параметрів  $a_1, \dots, a_n$ . Вони називаються суттєво нелінійними. Серед них можна виділити формули, які відповідним перетворенням змінних зводяться до лінійних відносно параметрів формул. Ці нелінійні емпіричні формули разом із суттєво лінійними називаються внутрішньо лінійними формулами. Суттєво нелінійні емпіричні формули, які до лінійного відносно параметрів вигляду не приводяться, називаються внутрішньо нелінійними.

У випадку квадратичної норми (3) параметри внутрішньо лінійних формул знаходяться за методом найменших квадратів досить просто з нормальної системи лінійних рівнянь. Однак слід пам'ятати, що у загальному випадку перетворення змінних порушує принцип найменших квадратів, тобто після повернення до старих змінних можна прийти до неадекватної формули. Оптимальні параметри суттєво нелінійних емпіричних формул можуть визначатися ітераційними методами з системи нелінійних рівнянь. Оскільки така система часто має декілька розв'язків, то при невдалому виборі початкових значень можна взагалі не отримати задовільний за точністю результат.

У випадку рівномірної норми (4) знайти параметри емпіричної формули складніше, ніж у методі найменших квадратів. Зокрема, для знаходження параметрів емпіричної формули виду (6) можна застосовувати алгоритми найкращої рівномірної апроксимації функції декількох змінних узагальненим многочленом, які здебільшого зводяться до розв'язання задачі лінійного програмування модифікованим симплекс-методом [1, 4, 12, 13]. Слід зазначити, що використання норми (4) в задачах наближення експериментальних даних має важливе значення з методологічної точки зору. Ще Лаплас писав, що тільки наближення за критерієм найкращої рівномірної апроксимації дозволяють строго ставити і вирішувати питання про те, чи вкладаються отримані експериментальні дані в емпіричну формулу того або іншого типу [14, с. 11].

Далі описується алгоритм ДЕ, який дозволяє знаходити оптимальні значення параметрів як внутрішньо лінійних, так і внутрішньо нелінійних емпіричних формул декількох змінних. Алгоритм простий у реалізації та не потребує використання чисельних методів.

### 3. Алгоритм

В алгоритмі ДЕ моделюються базові процеси біологічної еволюції: схрещування, мутація, відбір [11]. Еволюційний процес починається з генерації популяції випадкових векторів, координати яких представляють собою можливі значення параметрів  $a_1, \dots, a_n$  емпіричної формули (1). Далі для кожного вектора покоління, який називається базовим, створюється мутантний вектор. Над останнім виконується операція схрещування, в ході якої деякі його координати заміщуються координатами базового вектора. Отриманий після схрещування вектор називається пробним. Якщо він виявляється кращим за базовий, тобто його значення цільової функції (критерію оптимізації) менше, то в новому поколінні базовий вектор замінюється на пробний, у протилежному випадку в новому поколінні зберігається базовий вектор. Такий оператор відбору гарантує, що найменше значення цільової функції не буде пропущено, що приводить до швидкої збіжності алгоритму. Еволюційний процес в алгоритмі ДЕ завершується, якщо виконується одна з термінальних умов (вичерпано максимальне число популяцій та ін. [11]).

Далі наводиться покроковий опис алгоритму ДЕ для знаходження оптимальних значень параметрів емпіричної формули декількох змінних.

1. Генерується початкове покоління векторів  $V_i = (v_{1i}, \dots, v_{ni})$ ,  $i = 1, \dots, NP$ , де  $NP$  – розмір популяції. Координати  $v_{ji}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) вектора  $V_i$  – випадкові числа з інтервалу

$[-1,1]$ . Слід зазначити, що межі цього інтервалу мають значення лише на кроці початкової генерації, в подальшій еволюції простір пошуку, у принципі, є необмеженим.

2. Для базового вектора  $V_i$  ( $i=1, \dots, NP$ ) з поточного покоління вибираються три випадкових вектори  $V_b, V_c, V_d$  ( $b \neq c \neq d \neq i$ ) і створюється мутантний вектор  $\tilde{V}_b$ :

$$\tilde{V}_b = V_b + FM(V_c - V_d),$$

де  $FM$  – деяка додатна дійсна константа з проміжку  $[0, 2]$ , яка називається коефіцієнтом або силою мутації і визначає амплітуду збурень, що вносяться в вектор  $V_b$ .

3. Обчислюються координати пробного вектора  $U_i$ :

$$u_{ji} = \begin{cases} \tilde{v}_{jb}, & \text{якщо } \text{rand}(0,1) \leq CR \vee j = j_{rand} \\ v_{ji}, & \text{якщо } \text{rand}(0,1) > CR \wedge j \neq j_{rand} \end{cases},$$

де  $\text{rand}(0,1)$  – випадкове число з інтервалу  $(0,1)$ ,  $CR$  – задана ймовірність схрещування.

4. Для включення в нове покоління вибирається той із векторів  $U_i$  і  $V_i$ , значення цільової функції якого менше. Цільова функція  $F$  обчислюється за формулою

$$F(V_i) = \Delta(V_i),$$

де  $\Delta(V_i)$  визначається з формул (2) і (3) у випадку квадратичної норми, з формул (2) і (4) – для чебишовської норми та з формул (2) і (5) – у випадку норми  $l_1$ . Чим ближче значення цільової функції вектора до нуля, тим ближче закодовані у цьому векторі значення параметрів до оптимальних.

5. Алгоритм ДЕ завершує роботу, якщо виконується одна з умов:

- 1) вичерпано максимальне число поколінь  $p_{\max}$  (за умовчанням  $p_{\max} = 200$ );
- 2) відбувається стагнація еволюційного процесу, тобто відносний розкид значень цільової функції в популяції менше заданої величини  $\delta$  (за умовчанням  $\delta = 10^{-3}$ ):

$$\max_{i=1, \dots, NP} F(V_i) - \min_{i=1, \dots, NP} F(V_i) < \delta \min_{i=1, \dots, NP} F(V_i).$$

Якщо жодна з цих умов не виконується, то відбувається перехід до п. 2.

Розмір популяції  $NP$ , сила мутації  $FM$  та ймовірність схрещування  $CR$  є параметрами налаштування алгоритму ДЕ. За результатами тестування рекомендується вибирати значення вказаних параметрів у таких діапазонах:  $5n \leq NP \leq 10n$ ,  $0,4 \leq FM \leq 0,6$ ,  $0,8 \leq CR \leq 1$ . Зазначимо також, що через стохастичний характер алгоритму ДЕ для отримання прийняттого результату потрібно зробити декілька його запусків.

#### 4. Результати обчислювальних експериментів

Виконано серію обчислювальних експериментів по наближенню експериментальних даних з різних областей науки і техніки емпіричними формулами декількох змінних з використанням алгоритму ДЕ. Отримані результати підтвердили ефективність цього алгоритму для знаходження оптимальних значень параметрів як суттєво лінійних, так і суттєво нелінійних (у тому числі, внутрішньо нелінійних) емпіричних формул, побудованих з використанням різних норм наближення. Нижче наведено декілька прикладів.

*Приклад 1.* Рентгенівський емісійний датчик має чотири канали для вимірювання у досліджуваному матеріалі оксидів кремнію, алюмінію, заліза та кальцію, при цьому присутність одного компонента впливає на покази датчика, пов'язані з іншими компонентами. В ході експерименту знімалися покази кожного з чотирьох каналів по низці спроб, після чого

шляхом хімічного аналізу проб у мокрому вигляді встановлювався «справжній вміст» цих компонентів. За наведеними у табл. 1 даними експерименту щодо вмісту оксиду заліза  $Fe_2O_3$  [15] потрібно знайти коефіцієнти лінійної емпіричної формули:

$$y = a_1 + a_2x_1 + a_3x_2 + a_4x_3 + a_5x_4,$$

де  $y$  – «справжній вміст» оксиду заліза ( $y$  %),  $x_1, x_2, x_3, x_4$  – покази чотирьох каналів рентгенівського емісійного датчика (в імпульсах за секунду).

Таблиця 1 – Дані експерименту і результати розрахунків щодо вмісту оксиду заліза

Спроба	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y$	$\tilde{y}_{обч}$	$ y - \tilde{y}_{обч} $	$\bar{y}_{обч}$	$ y - \bar{y}_{обч} $
1	598,95	37,45	335,65	7185,3	0,53	0,479	0,051	0,487	0,044
2	1051,10	15,20	211,20	5739,8	0,38	0,378	0,002	0,423	0,043
3	115,50	8,68	105,50	8547,0	0,18	0,187	0,007	0,165	0,015
4	28,40	8,50	155,60	7598,5	0,23	0,244	0,014	0,274	0,044
5	910,60	183,70	738,45	5205,5	1,05	1,045	0,005	1,041	0,009
6	1102,50	205,58	999,90	4680,3	1,31	1,336	0,026	1,354	0,044
7	577,80	41,15	301,35	7317,8	0,45	0,446	0,004	0,443	0,007
8	611,50	149,85	644,85	5830,3	0,95	0,901	0,049	0,906	0,044
9	366,25	82,90	358,35	7729,5	0,52	0,524	0,004	0,488	0,032
10	605,40	96,75	472,35	6576,8	0,63	0,674	0,044	0,674	0,044
11	617,75	20,55	204,35	6965,3	0,32	0,339	0,019	0,354	0,034
12	519,20	100,02	457,45	6750,5	0,68	0,656	0,024	0,649	0,031
13	589,90	112,00	496,70	6626,0	0,69	0,711	0,021	0,699	0,009

За допомогою алгоритму ДЕ знайдено оптимальні значення невідомих коефіцієнтів  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  для випадків застосування квадратичної та чебишовської норм. У першому випадку отримано емпіричну формулу

$$\tilde{y} = 0,1813 + 0,00004914x_1 + 0,000922x_2 + 0,0009709x_3 - 0,00001288x_4,$$

у другому – формулу

$$\bar{y} = 0,5248 - 0,00001356x_1 + 0,00008615x_2 + 0,001085x_3 - 0,00005534x_4,$$

абсолютна похибка якої не перевищує 0,044. Як показують наведені у табл. 1 результати розрахунків, обидві емпіричні формули цілком задовільно описують дані хімічного аналізу щодо процентного вмісту оксиду заліза.

*Приклад 2.* В експерименті досліджувалась залежність густини  $B$  (в умовних одиницях) від температури  $t$  (в  $^{\circ}C$ ) і концентрації  $C$  (в г/л) солі у розбавлених розчинах [16]. Отримані експериментальні дані наведені в табл. 2.

Необхідно знайти такі значення параметрів  $a_1, a_2, a_3$  і  $a_4$  емпіричної формули

$$B^2 = a_1C^{a_2} + (a_3 - a_4C)t, \tag{7}$$

щоб сума модулів відносних відхилень експериментальних даних від значень, обчислених за формулою (7), була мінімальною. Зазначимо, що (7) – внутрішньо нелінійна відносно невідомих параметрів формула.

При використанні норми (5) за алгоритмом ДЕ отримано емпіричну формулу

$$B^2 = 0,02694C^{1,731} + (0,0375 - 0,00709C)t. \tag{8}$$

Таблиця 2 – Дані експерименту і результати розрахунків щодо густини розчину

<i>C</i>	<i>t</i>	<i>B</i>	<i>B</i> <sub>обч.</sub>	$\varepsilon$ , %	<i>C</i>	<i>t</i>	<i>B</i>	<i>B</i> <sub>обч.</sub>	$\varepsilon$ , %
35,97	20,8	2,957	2,961	0,1	23,97	20,4	1,98	1,970	0,5
	24,9	2,800	2,807	0,2		24,5	1,80	1,827	1,5
	29,0	2,643	2,643	0,0		28,0	1,70	1,696	0,2
	33,7	2,429	2,442	0,5		32,0	1,51	1,531	1,4
	38,0	2,243	2,2423	0,04		37,0	1,28	1,297	1,3
	41,0	2,086	2,091	0,3		40,9	1,08	1,080	0,0
29,96	21,0	2,457	2,452	0,2	17,97	20,5	1,46	1,468	0,6
	24,0	2,343	2,343	0,0		24,0	1,36	1,357	0,2
	28,0	2,200	2,189	0,5		27,1	1,23	1,249	1,6
	31,1	2,071	2,059	0,6		32,9	1,02	1,020	0,0
	36,0	1,843	1,841	0,1		38,7	0,70	0,720	2,8
	39,4	1,700	1,672	1,7		40,4	0,615	0,605	1,6

Як видно з табл. 2, дані експерименту та значення густини, обчислені за формулою (8), збігаються цілком задовільно: відносне відхилення не перевищує 2,8%. Для порівняння зазначимо, що наведена в [16] формула

$$B^2 = 0,02644C^{1,736} + (0,0352 - 0,006999C)t$$

наближає експериментальні дані з похибкою 7%.

Алгоритм також успішно використовувався для побудови нелінійних формул більшого числа змінних, зокрема, формул для обчислення кута взаємного повороту двох блоків залізобетонного елемента, відокремлених нормальною тріщиною. Цей кут залежно від форми перерізу елемента (тавр, двотавр та ін.) є функцією від чотирьох до семи змінних [17]. Визначення кута повороту є одним із основних моментів у розрахунках крутильної жорсткості елементів у залізобетонних плитно-ребристих системах (мости, перекриття тощо).

## 5. Висновки

У статті представлено алгоритм диференціальної еволюції, адаптований для знаходження оптимальних значень параметрів емпіричних формул декількох змінних. Його основними перевагами є універсальність (дозволяє знаходити оптимальні параметри як лінійних, так і нелінійних емпіричних формул з використанням різних норм наближення), простота реалізації та використання. Результати обчислювальних експериментів дають підстави вважати, що запропонований алгоритм є ефективним засобом наближення експериментальних даних.

## СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Вакал Л.П., Каленчук-Порханова А.О. Аналітична обробка даних на основі чебишовської апроксимації. *Математичні машини і системи*. 2006. № 2. С. 15–24.
2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Наука, 1967. 368 с.
3. Вакал Л.П. Програмні засоби для наближення дослідних даних емпіричними формулами. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2009. № 8. С. 35–44.
4. Каленчук-Порханова А.О., Вакал Л.П. Застосування найкращої чебишовської апроксимації для моделювання деяких фізичних процесів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Технічні науки*. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет, 2010. Вип. 4. С. 111–118.
5. Вакал Л.П. Построение наилучших нелинейных эмпирических формул. *Праці міжнар. симп. «Питання оптимізації обчислень (ПОО–XXXV)»*. К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2009. Т. 1. С. 99–103.

6. Вакал Л.П. Генетичні алгоритми для чебишовської апроксимації. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2013. № 12. С. 20–26.
7. Vakal L.P. Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. *Journal of Automation and Information Sciences*. New York, 2016. Vol. 48, N 6. P. 49–59.
8. Gorbiychuk M.I. Medvedchuk V.M., Lazoriv A.N. Analysis of parallel algorithm of empirical models synthesis on principles of genetic algorithms. *Journal of Automation and Information Sciences*. New York, 2016. Vol. 48, N 2. P. 54–73.
9. Вакал Л.П. Апроксимація функцій багатьох змінних із застосуванням алгоритму диференціальної еволюції. *Математичні машини і системи*. 2017. № 1. С. 90–96.
10. Вакал Л.П., Вакал Є.С. Розв'язання перевизначеної системи трансцендентних рівнянь з використанням диференціальної еволюції. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Технічні науки*. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет, 2017. Вип. 15. С. 24–30.
11. Storn R., Price K. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*. Dordrecht, 1997. Vol. 11. P. 341–359.
12. Каленчук-Порханова А.О., Вакал Л.П. Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних. *Комп'ютерні засоби, мережі і системи*. 2007. № 6. С. 141–148.
13. Каленчук-Порханова А.А., Вакал Л.П. Аппарат аппроксимации в составе программного обеспечения суперкомпьютера с кластерной архитектурой. *Искусственный интеллект*. 2009. № 1. С. 158–165.
14. Ремез Е.Я. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Киев: Изд-во АН УССР, 1957. 454 с.
15. Lee T.H., Adams G.E., Gaines W.M. Computer process control: modeling and optimization. New York: Wiley, 1968. 386 p.
16. Батунер Л.П., Позин М.Е. Математические методы в химической технике. Л.: Химия, 1968. 823 с.
17. Azizov T.N., Melnyk A.S., Vakal L.P., Kalenchuk-Porkhanova A.A., Orlova O.M. According to the calculation of reinforced concrete ceilings taking into account the change in torsional stiffness of prefabricated plates against the formation of normal cracks. *Theoretical & Applied Science*. Philadelphia, 2017. Vol. 49, N 5. P. 180–189.

*Стаття надійшла до редакції 23.05.2018*