УДК 681.513

О.О. БРОВАРЕЦЬ[*]

ЗАЛЕЖНІСТЬ ЯКОСТІ ВИКОНАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОПЕРАЦІЙ ВІД ГРАНИЧНОЇ ШВИДКОДІЇ ІНФОРМАЦІЙНО-ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ ЛОКАЛЬНОГО ОПЕРАТИВНОГО МОНІТОРИНГУ СТАНУ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ УГІДЬ

[*]Київський кооперативний інститут бізнесу і права, м. Київ, Україна

Анотація. *Існуючі способи керування агробіологічним станом ґрунтового середовища за наявними методиками не враховують варіабельності їх параметрів по площі сільськогосподарських угідь. Найбільш ефективним способом оперативного моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь є вимірювання електропровідних характеристик ґрунтового середовища. Електропровідні властивості ґрунтового середовища є комплексним показником його агробіологічного стану, який враховує твердість, вологість, вміст поживних речовин у ґрунті, тощо. Високий вміст вологи, солей та поживних речовин у ґрунті сприяє підвищенню показників електропровідності ґрунтового середовища у межах одного поля, які реєструються інформаційно-технічною системою локального оперативного моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь. Така інформація дозволяє виділяти зони варіабельності ґрунтового середовища та здійснювати ефективне керування агробіологічним станом сільськогосподарських угідь. Інформаційно-технічну систему локального оперативного моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь використовують перед виконанням технологічної операції, одночасно з виконанням технологічної операції (сівба, внесення мінеральних добрив тощо), протягом вегетації та після збирання врожаю. Запропонована математична модель для визначення залежності якості виконання технологічних операцій від граничної швидкодії інформаційно-технічних систем локального оперативного моніторингу стану сільськогосподарських угідь. Дана модель дає можливість забезпечити ефективне керування якістю виконання технологічних операцій. Це відкриває нові перспективи до ведення органічного землеробства з використанням таких «розумних» сільськогосподарських машин.*
Ключові слова: *математична модель, технічна система оперативного моніторингу.*

Аннотация. *Существующие способы управления агробиологическим состоянием почвенной среды по имеющимся методикам не учитывают вариабельности их параметров по площади сельскохозяйственных угодий. Наиболее эффективным способом оперативного мониторинга агробиологического состояния сельскохозяйственных угодий является измерение электропроводящих характеристик почвенной среды. Электропроводящие свойства почвенной среды являются комплексным показателем его агробиологического состояния, учитывающим твердость, влажность, содержание питательных веществ в почве и тому подобное. Высокое содержание влаги, солей и питательных веществ в почве способствует повышению показателей электропроводности почвенной среды в пределах одного поля, регистрируется информационно-технической системой локального оперативного мониторинга агробиологического состояния сельскохозяйственных угодий. Такая информация позволяет выделять зоны вариабельности почвенной среды и осуществлять эффективное управление агробиологическим состоянием сельскохозяйственных угодий. Информационно-техническую систему локального оперативного мониторинга агробиологического состояния сельскохозяйственных угодий используют перед выполнением технологической операции, одновременно с выполнением технологической операции (сев, внесение минеральных удобрений и т.п.), в течение вегетации и после уборки урожая. Предложена математическая модель для определения зависимости качества выполнения технологических операций от предельной быстрой информационно-технической системы локального оперативного мониторинга состояния сельскохозяйственных угодий. Данная модель дает возможность обеспечить эффективное управление качеством исполнения технологических операций. Это открывает новые перспективы для ведения органического земледелия с использованием таких «умных» сельскохозяйственных машин.*
Ключевые слова: *математическая модель, техническая система оперативного мониторинга.*

Abstract. *The existing methods of controlling the agrobiological state of the soil environment according to available methods do not take into account the variability of their parameters over the area of farmland. The most effective way to monitor the agrobiological state of agricultural land quickly is to measure the electrical conductivity of the soil environment. The electroconductive properties of the soil medium are a complex indicator of its agrobiological state, taking into account the hardness, humidity, nutrient content in the soil, etc. High content of moisture, salts and nutrients in the soil contribute to increase in the electrical conductivity of the soil medium within a single field, recorded by the information and technical system of local operational monitoring of the agrobiological state of farmland. Such information makes it possible to identify zones of soil environment variability and to effectively manage the agrobiological state of farmland. The information and technical system of local operational monitoring of agrobiological state of farmland is used before the technological operation, simultaneously with the implementation of the technological operation (sowing, mineral fertilization, etc.), during the growing season and after harvesting. It is offered a mathematical model for dependence definition on quality performance of technological operations from limiting rapid information and technical systems of local operative monitoring of farmland condition. This model makes it possible to provide effective control over the quality of execution of technological operations. It opens new prospects for organic farming using such "smart" agricultural machines.*
Keywords: *mathematical model, technical operation monitoring system.*

1. Вступ. Постановка проблеми

Сучасні високі вимоги до економічної ефективності виробництва сільськогосподарської продукції з урахуванням економічних особливостей природно-кліматичних зон України диктують необхідність проведення докорінної перебудови підходів до технологій агропромислового виробництва, зокрема, використання новітніх ефективних інформаційно-технічних систем локального оперативного моніторингу ґрунтового середовища сільськогосподарських угідь, побудованих на новітніх технологіях з використанням технічних систем оперативного моніторингу, які розміщуються на модернових машинно-тракторних агрегатах [1–15].

Головною вимогою до таких агрегатів є забезпечення належної якості керування виконанням технологічних операцій. Це вимагає використання сучасних інформаційно-технічних мехатронних та робототехнічних систем керування, пов'язаних з технічними системами оперативного моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь, датчиками контролю якості виконання технологічних операцій, які у сучасному контексті їх розвитку отримали назву «розумних» або «смарт» машин (Smart machinery) [13–15].

Такі «розумні» машини з датчиками оперативного моніторингу стану сільськогосподарських угідь повинні широко використовуватися на всіх стадіях виробництва сільськогосподарської продукції рослинництва: основного обробітку, сівби (садіння), на етапі догляду за посівами у період вегетації та при збиранні врожаю. Це дає можливість забезпечити належну якість виконання технологічних операцій при оптимізації витрат на їх виробництво. Фактично «розумні» машини повинні адаптуватися до агробіологічного стану ґрунтового середовища [13–15].

Виконання зазначених задач передбачає як дообладнання/переобладнання існуючих, так і використання нових сільськогосподарських машинно-тракторних агрегатів [13–15].

Слід відмітити, що важливість та доцільність використання зазначених машинно-тракторних агрегатів особливо високі на етапі сівби (садіння), оскільки дана технологічна операція фактично є «фундаментом» майбутнього врожаю [13–15].

Аналіз досліджень і публікацій показує, що традиційні фактори підвищення ефективності сільськогосподарського виробництва за рахунок оптимізації механіко-конструктивних матеріалів, використання новітніх машинобудівних матеріалів (надміцного пластику, сплавів металу тощо) на сучасному етапі розвитку техніки не дають суттєвого підвищення ефективності.

Одним із перспективних напрямів є забезпечення необхідної якості виконання технологічних процесів за рахунок одержання більш високого (у порівнянні з фізіологічними можливостями людини) рівня інформації та оперативного керування робочими процесами машин і на основі цього перехід до нових прогресивних технологій з використанням «розумних» сільськогосподарських машин. Тому виникає необхідність у їх розробці та використанні.

Очевидно, що за таких умов виникає необхідність у принципово нових підходах до ведення агропромислового виробництва, що полягає у забезпеченні належної якості виконання технологічних операцій. Якість виконання технологічних операцій є інтегральним показником ефективності виробництва сільськогосподарської продукції в межах агробіологічного поля. Необхідна якість виконання основних технологічних процесів у рослинництві забезпечується за рахунок інтегрованих інформаційно-технічних систем локального оперативного моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь [13–15].

Мета статті – описання математичної моделі граничної швидкодії інформаційно-технічних систем локального оперативного моніторингу стану сільськогосподарських угідь при виконанні технологічної операції для забезпечення належної якості їх виконання.

2. Виклад основного змісту дослідження

При використанні інформаційно-технічних систем локального оперативного моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь одночасно з виконанням технологічної операції виникає необхідність у вирішенні задач граничної швидкодії виконавчих робочих органів. Важливість даної задачі визначається її технічним завданням.

При постановці завдання щодо граничної швидкодії виконавчих робочих органів сільськогосподарських агрегатів на основі даних, отриманих від інформаційно-технічної системи локального оперативного моніторингу стану сільськогосподарських угідь, передбачається, що проміжок часу $t_\alpha \le t \le t_\beta$, протягом якого система повинна бути переведена з одного стану $x(t_\alpha) = x^\alpha$ в інший $x(t_\beta) = x^\beta$, визначено заздалегідь. Однак не виключена ситуація, коли момент $t = t_\beta$ закінчення процесу не заданий, але визначається у процесі виконання технологічної операції по ходу рішення проблеми. Наприклад, однією з таких умов може бути вимога здійснити процес управління в найкоротший термін. При цьому, природно, доводиться враховувати обмеження на ресурси органів управління, що реалізовують дії та управляють (обмежений запас енергії, неприпустимість застосування керуючих сил, що перевищують певні безпечні кордони, і т.п.). Якщо трактувати подібне обмеження як вимогу обмеженості і відповідним чином підібрано інтенсивність $x[u]$ управління $u(t)t_\alpha \le t \le t_\beta$, то задача про граничну швидкодію може бути сформульована так.

Припустимо, що рівняння руху інформаційно-технічної системи локального оперативного моніторингу ґрунтового середовища сільськогосподарських угідь при виконанні технологічної операції задано рівнянням руху керованої системи:

$$x = \mathrm{A}(t)x + \mathrm{B}(t)u + \omega(t)\,, \tag{1}$$

початкове x^α і кінцеве x^β значення фазового вектора $x(t)$ та обумовлено обмеження на обрану інтенсивність x управління $u(t)$:

$$x[u] \le \mu\,. \tag{2}$$

Потрібно знайти момент часу $t = t_\beta^o$ і відповідне йому можливе управління $u^o(t)\left(t_\alpha \le t \le t_\beta^o\right)$, що задовольняє такі умови:

1) управління $u^o(t)$ вирішує про управління при $\left(t_\alpha \le t \le t_\beta^o\right)$;

2) виконується нерівність

$$x\left[u^o\right] \le \mu\,; \tag{3}$$

3) який не був би момент часу $t = t_\beta$ і можливе управління $u(t) t_\alpha \le t \le t_\beta$, для вирішення завдання про граничне управління рівнянням (2) повинна виконуватися нерівність $t_\beta^o \le t_\beta$.

Умови (2) та (3) мають потребу в деякому поясненні. Справа в тому, що вираз для визначення величини $x[u]$ може залежати від значення t_β, яке саме підлягає визначенню. Наприклад, воно може бути подане у вигляді

$$x[u] = \left\{ \underset{t_\alpha}{\overset{t_\beta}{J}} \| u(\tau) \|^2 \, d\tau \right\}^{1/2} .$$

У такому випадку слід позначити інтенсивність $x[u]$, наприклад, символом $x[u(\tau), t_\alpha \le \tau \le t_\beta]$, а обмеження виразу (2) можна записувати у вигляді

$$x[u(\tau), t_\alpha \le \tau \le t_\beta] \le \mu\,. \tag{4}$$

Однак для скорочення індекси t_α і t_β у позначенні для інтенсивності *x* будуть опускатися. Зокрема, домовимося у подальшому в завданні про граничну швидкодію записувати обмеження на $u(t)$ у формулі (2), розуміючи цей запис у сенсі формули (4).

Якщо керована система описується узагальненим лінійним рівнянням

$$dx = \mathrm{A}(t)\,xdt + \mathrm{B}(t)\,dU + dW, \tag{5}$$

то для такої системи завдання щодо граничної швидкодії може бути сформульоване виразом (1). Отже, потрібний вираз для управління $dU^0(t)(t_\alpha \le t \le t_\beta^0)$ слід шукати у класі можливих узагальнених управлінь.

Рівняння керування $u^0(t)$ та $dU^0(t)(t_\alpha \le t \le t_\beta^0)$, граничні умови щодо граничної швидкодії для системи (1) й (5) будемо називати оптимальними за швидкодією, а число $\mathrm{T}^0 = t_\beta^0 - t_\alpha$, рівне найкоротшому часу переходу системи з початкового стану xa в кінцеве *зP*, назвемо оптимальним часом перехідного процесу.

При розв'язанні задач для дослідження граничної швидкодії інформаційно-технічних систем локального оперативного моніторингу агробіологічного стану ґрунтового середовища сільськогосподарських угідь приймаємо такий апарат функціонального аналізу:

1) інтенсивність управління $x[u]$ як норма $p^*[u]$ функції $u(t)(t_\alpha \le t \le t_\beta^0)$ в деякому функціональному просторі $\mathrm{B}^*\{u(\tau)\}$. Тоді формула (1) і відповідна її модифікація для системи (5) переформулюється для класів допустимих меж управлінь в (t) і узагальнених допустимих управлінь $dU(t)$.

Оскільки перехід здійснюється таким же шляхом оптимального управління, тому слід мати на увазі, що всюди в подальшому ми обмежимося тільки такими величинами $x[u(\tau),(t_\alpha \le \tau \le t_\beta)] = \rho^*[u(\tau),(t_\alpha \le \tau \le t_\beta)]$, для яких виконується рівність $\rho^*[u(\tau),t_\alpha \le \tau \le \sigma] = \rho^*[u(\tau),t_\alpha \le \tau \le \vartheta]$ для всіх функцій $u[\tau]$, які б відповідали умовам $u(\tau)=0$ при $\tau \ge \vartheta$. Тут ϑ та σ – будь – які, пов'язані нерівністю $\vartheta < \sigma$.

Надалі ми розглянемо випадок, коли момент $t = t_\alpha$ буде змінюватися. Тоді символи $\rho^*[u(\tau),\tau \ge t_\alpha]$ будуть позначати величини $\rho^*[u(\tau),t_\alpha \le \tau \le \vartheta]$ при будь – якому ϑ, яке може виявитися моментом закінчення процесу.

Накладемо обмеження:

$$\rho^*[u(\tau),\tau \ge t_\alpha] \le \mu . \tag{6}$$

Дані обмеження будуть означати, що у процесі управління можуть використовуватися будь-які функції $u(\tau)(\tau \ge t_\alpha)$, що задовольняють умову $\rho^*[u(\tau),t_\alpha \le \tau \le \vartheta] \le \mu$ (при будь – якому $\vartheta > t_\alpha$). Саме в цьому сенсі слід розуміти також і запис обмеження формулою (6) в будь-якій явній конкретній формі, наприклад, у вигляді

$$\left[\int_{t_\alpha}^{\infty} \left\| u(\tau) \right\|^2 d\tau \right]^{1/2} \le \mu . \tag{7}$$

Формула (7) може охопити велику кількість реальних обмежень.

Часто в задачах максимальної швидкодії обмеження на $u(\tau)$ має такий несиметричний вигляд $a_j \le u_j \le b_j$, причому $a_j \ne -b_j$. Однак у цьому випадку заміною змінних u_j на v_j можна звести рівняння (7) до обмеження виду $\rho^*[v] \le \mu$. Для цього досить виконати, наприклад, перетворення

$$v_j = \left(u_j - \frac{a_j + b_j}{2} \right) \frac{2\mu}{b_j - a_j} \tag{8}$$

і припустити $\rho^*\left[v\right] = \max\limits_j \sup\limits_\tau \left\{ \left| v_j\left(\tau\right) \right| \right\}$.

Символ ∞ вибирається при цьому як верхня межа інтеграла у формулі (7) з тією метою, щоб підкреслити, що момент $t = t_\beta > t_\alpha$, коли закінчиться процес управління, нам може бути невідомий і ми протягом часу $t \ge t_\alpha$ володіємо ресурсом управління, рівним $\mu(t_\alpha)$. Аналогічне зауваження слід мати на увазі в тих випадках, коли для запису оцінки управління $u(\tau)$ при $t \ge t_\alpha$ буде використовуватися загальний символ інтенсивності $x[u(\tau),\tau \ge t_\alpha]$.

Зауважимо, що завдання щодо граничної швидкодії може бути поставлене і у тому випадку, коли систему (1) або (5) потрібно перевести в найкоротший термін з заданого стану $x(t_\alpha) = x^\alpha$ у заздалегідь визначену точку x^β фазового простору, а не в деяку область Q кінцевого стану x^β. Слід також мати на увазі, що вектор x^β за умовами завдання може залежати від t_β. Ця ситуація виникає, коли потрібно розрахувати граничну швидкодію об'єкта, який рухається, $x(t)$ не в нерухомій точці $x = x^\beta$, але потрібно визначити його в заданий момент руху $x = x^\beta(t)$.

3. Рішення завдання щодо граничної швидкодії інформаційно-технічних систем локального оперативного моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь

Для вирішення поставленої задачі потрібно знайти закон управління $u^0(t)$, який переводить систему (1) зі стану $x(t_\alpha) = x^\alpha$ у стан $x(t_b) = x^b$ за короткий час $\mathrm{T}^0 = t_b^0 - t_a$ при заданому обмеженні

$$x[u] \le \mu. \tag{11}$$

Беручи до уваги правило мінімакса, можна вказати такий шлях вирішення завдання щодо граничної швидкодії.

Нехай $t_\beta > t_\alpha$ – деякий фіксований момент часу. Тоді може бути представлене рішення для оптимального впливу $u_\mathrm{T}(t)$, переводячи систему (1) зі стану $x(t_\alpha) = x^\alpha$ у положення $x(t_b) = x^b$ за час $\mathrm{T} = t_\beta - t_a$. Отже, маємо при цьому найменшу можливу норму $\rho^*[u_\mathrm{T}] = x[u_\mathrm{T}] = \min$. Якщо тепер ми будемо змінювати момент часу t_β, то:

1) отримаємо, що всякому $t_\beta > t_\alpha$, а значить, кожному числу $\mathrm{T} > 0$ будуть відповідати певне оптимальне управління $u_\mathrm{T}(t)$ і певна його інтенсивність $x[u_\mathrm{T}]$, яка є функцією від T.

2) або, у всякому разі, можливо розв'язати при значеннях t_β з деякої безлічі T. Зміни, потрібні тоді в міркуваннях, очевидні.

Позначимо $x[u_\mathrm{T}] = x_\mathrm{T}$ і розглянемо нерівність

$$x_\mathrm{T} \le \mu. \tag{12}$$

Очевидно, що оптимальним часом перехідного процесу T^0 при обмеженні (11) буде найменше з позитивних чисел T і відповідало б умовам (12). Накладаючі на цю обставину правило мінімакса, отримуємо такий результат.

Нехай $h_\mathrm{T}^0(\tau)$ $(t_\alpha \le \tau \le t_\beta = t_\alpha + \mathrm{T})$ – мінімальна функція, знайдена згідно з правилом мінімакса. Тоді

$$\rho[h_\mathrm{T}^0(\tau)] = \frac{\min}{{}^s\mathrm{T}} \rho[\mathrm{B}' s_\mathrm{T}(\tau)] = \rho_\mathrm{T}, \tag{13}$$

де $s_\mathrm{T}(t)$ – рух, пов'язаний системою (13), яка задовольняє крайовій умові $s't$ (t_β) з $(T) = 1$. Тоді найменше із чисел $\mathrm{T} = t_\beta - t_a$ задовольняє співвідношення

$$\rho_\mathrm{T} \ge \frac{1}{\mu} \tag{14}$$

і буде оптимальним часом перехідного процесу T^0, а відповідно у цей час оптимальне управління буде описане таким рівнянням: $u_\mathrm{T}^0(t) = u^0(t)$ $(t_\alpha \le t \le t_\beta^0 = t_\alpha + \mathrm{T}^0)$, оптимальним за швидкодією управлінням. При цьому, як випливає з правила мінімакса, оптимальне за швидкодією управління буде мати вигляд $\rho^*[u^0(\tau)(\tau)] = 1/\rho_{\mathrm{T}^0}$ і буде виділятися серед усіх допустимих управлінь $u(\tau)$ $(t_\alpha \le t \le t_\beta^0)$ з нормою $\rho^*[u(\tau)] = 1/\rho_{\mathrm{T}^0}$ властивістю максимуму на мінімальній функції $h_{\mathrm{T}^0}^0(\tau)$.

Сформульований спосіб вирішення завдання щодо граничної швидкодії полягає в побудові моделі, що дозволяє визначити найменше з позитивних чисел T, яке відповідає умові (14). При цьому процес знаходження найоптимальнішого за швидкодією управління слід визначити властивістю максимуму, що міститься у правилі мінімакса. Якщо величина ρ_{T} є безперервною функцією T (а це, дійсно, має місце в широкому класі випадків), то для відшукання величини T^0 замість умови (4) зручно користуватися рівнянням

$$\rho_{\mathrm{T}} = \frac{\min}{{}^{s}\mathrm{T}}\left[\mathrm{B}'(\tau)s_{\mathrm{T}}(\tau) = \frac{1}{\mu}\right] \text{ при } s_{\mathrm{T}}^{'}(t_{\beta})c(T) = 1. \tag{15}$$

Найменший позитивний корінь цього рівняння і дасть оптимальний час перехідного процесу T^0.

Враховуючи, що вираз $\rho[\mathrm{B}'s_{\mathrm{T}}(\tau)]$ однорідний по вектору $l = s(t_{\beta})$, тому нерівність (14) або рівняння (15) разом з умовою $s_{\mathrm{T}}^{'}(t_{\beta})c(T) = 1$ можна замінити нерівністю

$$\min_{\|s_{\mathrm{T}}\|=1}\left\{-s_{\mathrm{T}}^{'}\left(t_{\beta}\right)c\left(\mathrm{T}\right) + \mu\rho\left[\mathrm{B}^{'}\left(\tau\right)s_{\mathrm{T}}\left(\tau\right)\right]\right\} \geq 0$$

або, відповідно, рівнянням

$$\min_{\|s_{\mathrm{T}}\|=1}\left\{\mu\rho\left[\mathrm{B}^{'}\left(\tau\right)s_{\mathrm{T}}\left(\tau\right)\right] - s_{\mathrm{T}}^{'}\left(t_{\beta}\right)c\left(\mathrm{T}\right)\right\} = 0,$$

що часом може виявитися більш зручним для роботи з цими співвідношеннями. Далі рівняння (15) можна замінити співвідношенням, що не містить $\rho[h(\tau)]$,

$$\min_{\|s_{\mathrm{T}}\|=1}\left[\max_{x[u(\tau)]\leq\mu}\int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}}\mathrm{B}^{'}\left(\tau\right)s_{\mathrm{T}}\left(\tau\right)u\left(\tau\right)d\tau - s_{\mathrm{T}}^{'}\left(t_{\beta}\right)c\left(\mathrm{T}\right)\right] = 0.$$

Запропонований спосіб у вигляді обчислювального алгоритму не має проблем з розрахунком за допомогою використання чисельних методів, як, наприклад, питання про вибір початкового наближення або питання про швидкість збіжності обчислювального процесу. При розгляді певних обмежень (11), а тим більше при вирішенні конкретних завдань ці загальні труднощі можуть бути так чи інакше подолані.

Припустимо, наприклад, що потрібно вирішити задачу граничного керування інформаційно-технічної системи локального оперативного моніторингу ґрунтового середовища сільськогосподарських угідь (1) при обмеженні на енергію керуючого впливу, тобто за умови

$$x[u] = \left[\int_{t_{\alpha}}^{\infty}\left\|u\left(\tau\right)\right\|^{2}d\tau\right]^{1/2} \leq \mu. \tag{16}$$

У цьому випадку завдання щодо граничної швидкодії виконавчих робочих органів інформаційно-технічної системи локального оперативного моніторингу ґрунтового середовища сільськогосподарських угідь вирішується з найменшими труднощами. Справа в тому, що оптимальне управління за умови мінімуму енергії знаходиться в замкнутій формі і тому вдається, виключивши $l_i^0\left(\mathrm{T}\right)$ із співвідношень (3), записати інтенсивність x_{T} оптимального управління, а отже, і величину $\rho_{\mathrm{T}} = 1/x_{\mathrm{T}}$, у вигляді явної функції часу T. Дійсно, беручи до уваги рівняння (11), одержуємо, що

$$x_{\mathrm{T}} = \left[\int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}}\left\|u^{0}\left(\tau\right)\right\|^{2}d\tau\right]^{1/2} = \left[\frac{\sum_{i,k=1}^{n}c_{i}c_{k}D_{ik}}{D}\right]^{1/2}, \tag{17}$$

де $c = c(T) = \{c_i(T)\}$ – вектор (15.2).

Неважко встановити, що x_{T} (7) є безперервною функцією Т, якщо тільки $D \neq 0$. Але остання умова виконується у всякому разі, якщо система (1) цілком керована. Тоді величина $\rho_{\mathrm{T}} = 1/x_{\mathrm{T}}$ буде також функцією безперервною і для визначення T^0 можна скористатися рівнянням (15), яке набуде вигляду

$$\sum_{i,k=1}^{n} c_i(T) c_k(T) D_{ik}(T) - \mu^2 D(T) = 0. \tag{18}$$

Таким чином, у даному випадку завдання щодо граничної швидкодії зводиться до знаходження найменшого позитивного кореня T^0 рівняння (18). Саме ж оптимальне за швидкодією управління $u^0(t)$ визначається за формулами (18), в яких замість t_β підставлено $t_\beta^0 = t_\alpha + \mathrm{T}^0$.

Нехай матеріальну точку, рух якої описується вже системою диференціальних рівнянь (18), потрібно перевести з положення $x_\alpha = \{-1, 0, 1, 0\}$ при $t_\alpha = 0$ в положення $x^\beta = \{0, 0, 0, 0\}$ найшвидшим чином. При цьому має задовольнятися нерівність

$$\int_{t_\alpha}^{\infty} [u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau)] d\tau \le \mu^2. \tag{19}$$

Згідно з обраним вище загальним шляхом вирішення завдання, знаходимо функцію ρ_{T}. Спираючись на рівність (17), отримаємо

$$\rho_{\mathrm{T}} = \frac{1}{x_{\mathrm{T}}} = \left[g^2 \mathrm{T} + \frac{24}{\mathrm{T}^3} \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{20}$$

і, відповідно, рівняння (18) записується так:

$$g^2 \mathrm{T}^4 - \mu^2 \mathrm{T}^3 + 24 = 0. \tag{21}$$

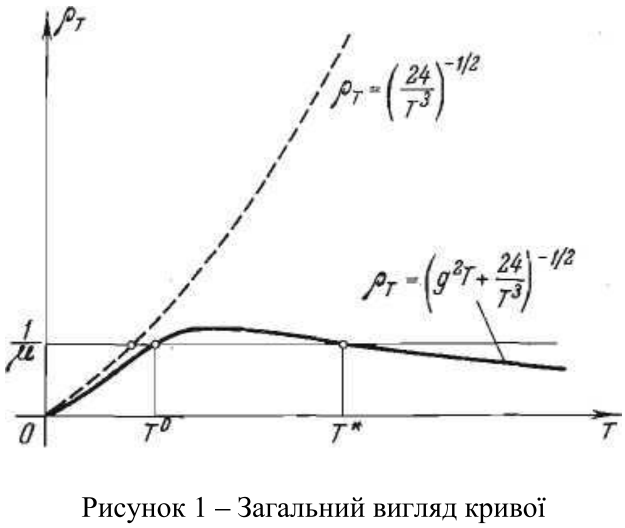

Рисунок 1 – Загальний вигляд кривої

На рис. 1 зображено графік функції ρ_{T} (20). Як видно з цього графіка, для того, щоб рівняння (1) мало хоча б один позитивний корінь, число μ повинно бути в міру великим, в іншому випадку бажане положення $x^\beta = \{0, 0, 0, 0\}$ взагалі виявляється недосяжним ні при якому Т, що ясно з фізичних міркувань. Неважко встановити, що величина μ^2 повинна бути не менше, ніж $96g\sqrt{|g|}(72)^{3/4}$. Якщо μ^2 буде більше зазначеного значення, то рівняння (21) буде мати два позитивних кореня.

Нехай T^0 – найменший із цих коренів, тоді, згідно з формулою (18), оптимальне за швидкодією управління визначається співвідношеннями

$$u_2^0(t) = \frac{6}{[\mathrm{T}^0]^3} (\mathrm{T}^0 - 2t),$$

$$u_2^0(t)=\frac{6}{[\mathrm{T}^0]^3}(\mathrm{T}^0-2t)+g(0\le t\le \mathrm{T}^0)\,,$$

з яких випливає, що найшвидший спуск з точки {-1, 0, 1, 0} в точку {0, 0, 0, 0} здійснюється по прямій.

Наведений приклад показує, що функція ρ_{T} не має властивості монотонності, яка може бути корисною для чисельного визначення T^0 з рівняння (25). Однак, якщо в представленому прикладі відкинути g, то функція $\rho_{\mathrm{T}}=(\mathrm{T}^3/24)^{1/2}$ буде строго монотонно зростаючою (рис. 1), і тоді при кожному $\mu>0$ рівняння (21) матиме єдиний позитивний корінь, який і доставляє оптимальний час перехідного процесу T^0. Виявляється, що зазначена властивість монотонності функції ρ_{T} не є специфічним лише для розглянутого прикладу і при відповідних припущеннях ця властивість має місце в досить загальному випадку обмежень (21) на інтенсивність керуючого впливу. А саме, нехай у рівнянні (21) $\omega(t)\equiv 0$ та $x^{\beta}=0$. Тоді можна показати, що функція ρ_{T} є монотонно не спадною функцією Т. Для доказу цього факту нагадаємо, що величину ρ_{T} можна шукати з умови

$$\rho_{\mathrm{T}}=\min\rho[\mathrm{B}'(\tau)s(\tau)]=\min\rho[\mathrm{B}'(\tau)S[\tau,t_{\alpha}]l] \tag{22}$$

при $s'(t_{\alpha})x^{\alpha}=l'$ $x^{\alpha}=-1$. Припустимо, що для кожного $T>0$ знайдено числа $l_i^0(T)=s_i^0(t_{\alpha})$ з умови (22). Тоді, беручи до уваги цю умову, отримаємо очевидну нерівність

$$\rho_{\mathrm{T}}+\Delta\mathrm{T}=\rho\left[\mathrm{B}'(\tau)S\left[\tau,t_{\alpha}\right]l^0(\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T}),\right.$$

$$t_{\alpha}\le\tau\le t_{\alpha}+\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T}]\ge\rho\left[\mathrm{B}'(\tau)S\left[\tau,t_{\alpha}\right]l^0(\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T}),\right.$$

$$t_{\alpha}\le\tau\le t_{\alpha}+T]\ge\min_{l}\rho\left[\mathrm{B}'(\tau)S\left[\tau,t_{\alpha}\right]l,\right.$$

$$t_{\alpha}\le\tau\le t_{\alpha}+T]=\rho_{\mathrm{T}},(\Delta\mathrm{T}>0). \tag{23}$$

Таким чином, ми бачимо, що, дійсно, змінна є монотонною, а не спадною функцією величини Т. Важливо підкреслити, що в багатьох випадках вибору інтенсивності $x[u]$ за умови повної керованості системи (21) у співвідношенні (23) буде виконуватися сувора нерівність, тобто функція ρ_{T} буде строго монотонно зростаючою функцією Т. Так, наприклад, у розглянутому вище випадку обмеження на енергію управління (23) відповідно до (2) і (23) буде

$$\rho^2_{\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T}}-\rho^2_{\mathrm{T}}\ge\int\limits_{t_{\beta}}^{t_{\beta}+\Delta\mathrm{T}}\left\|\mathrm{B}'(\tau)S[\tau,t_{\alpha}]l^0(\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T})\right\|^2d\tau, \tag{24}$$

Права частина нерівності (24) строго позитивна, якщо тільки система (1) цілком керована, оскільки тоді вектор-функції $h^{[i]}(\tau)$ – стовпці матриці $\mathrm{B}'(\tau)S[\tau,\ \ t_{\alpha}]$ – лінійно незалежні. При обмеженні на максимум керуючої сили (21) маємо

$$\rho_{\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T}}-\rho_{\mathrm{T}}\ge\int\limits_{t_{\beta}}^{t_{\beta}+\Delta\mathrm{T}}\gamma\left\{\mathrm{B}'(\tau)S[\tau,t_{\alpha}]l^0(\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T})\right\}d\tau \tag{25}$$

і права частина цієї нерівності за умови повної керованості системи знову буде строго позитивною.

У разі обмеження на імпульс керуючого впливу (25) величина різниці $\rho_{\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T}} - \rho_{\mathrm{T}}$ є лише невід'ємною і тому відповідає функції

$$\rho_{\mathrm{T}} = \min_{l} \quad \sup_{\tau} \gamma[\mathrm{B}^{'}(\tau) S[\tau, t_\alpha] l] \text{ при } l^{'} x^{\alpha} = -1.$$

Тобто лише неспадна функція Т.

Безперервність функцій, що описує технологічний процес, перевіряється без особливих зусиль за умов $\omega(t) \equiv 0, x^{\beta} = 0$ для широкого кола величин $x[u]$, наприклад, у разі відповідального обмеження на енергію управління або на максимум керуючої сили, якщо система цілком керована.

Властивості суворої монотонності і безперервності функції ρ_{T} виявляються важливими для вирішення завдання щодо граничної швидкодії з таких причин. Нехай існує хоча б одне число T^1, для якого серед управлінь знайдеться управління $u^{(1)}(t)$, що переводить систему з положення x^{α} в положення x^{β} за час $t_{\beta}^{(1)} - t_{\alpha} = \mathrm{T}_1$ за умови $\rho^{*}\left[u^{(1)}\right] = x\left[u^{(1)}\right] \le \mu$. Тоді буде справедлива нерівність $\rho_{\mathrm{T}1} \ge 1/\mu$. Якщо функція ρ_{T} є безперервною і якщо справедливо співвідношення:

1) lim $\rho_{\mathrm{T}} = 0$ при $\mathrm{T} \to 0$, то можна стверджувати, що існує найменше позитивне число T^0, при якому виконується рівність $\rho_{\mathrm{T}^0} = 1/\mu$.

Якщо до того ж функція ρ_{T} строго монотонна, то таке число T^0 буде єдиним, тобто при зроблених вище припущеннях, що забезпечують строгу монотонність безперервної функції ρ_{T}, рівняння (25) має єдиний позитивний корінь $\mathrm{T} = \mathrm{T}^0$, який і визначає оптимальний час перехідного процесу. Крім того, спираючись на теореми про неявні функції, неважко перевірити, що за умови суворої монотонності змінної ρ_{T} величина T^0 – корінь рівняння (25) – залежить безперервно від координат x_i^{α} і від параметрів системи. Особливо корисні зазначені властивості при вирішенні задачі в тих випадках, коли завдання про оптимальне управління за умови мінімуму відповідної інтенсивності не описується в замкнутій формі.

Якщо потрібно знайти оптимальне за швидкодією управління при обмеженні на інтенсивність керованого впливу, маємо рівняння виду

$$x[u] = \sup \quad \max\left(\left|u_j(\tau)\right|\right) \le \mu \quad (j = 1, ..., r, \tau \ge t_\alpha). \tag{26}$$

Це співвідношення знову-таки виконується з очевидністю в разі обмеження на енергію або на максимум керуючого впливу і може не мати місця при обмеженні на імпульс керуючої сили. В останньому випадку може виявитися $\mathrm{T}^0 = 0$.

Рівняння (25) для визначення T^0 приймає вигляд

$$\rho_{\mathrm{T}} = \int_{t_\alpha}^{t_\alpha+\mathrm{T}} \left(\sum_{j=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} l_i^0(\mathrm{T}) h_{ij}(t_\alpha + \mathrm{T}, \tau) \right| \right) d\tau = \frac{1}{\mu}, \tag{27}$$

де $h_{ij}(t_\beta, \tau)$ – елементи імпульсної перехідної матриці, $H[t_{\beta,}\tau] = S^{'}[\tau, t_\beta]\mathrm{B}(\tau)$, а $l_i^0(\mathrm{T})$ – числа, що дають рішення задачі:

$$\min\left[\int_{t_\alpha}^{t_\alpha+\mathrm{T}} \left(\sum_{j=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} l_i \, h_{ij}(t_\alpha + \mathrm{T}, \tau) \right| \right) d\tau \right] = \rho_{\mathrm{T}} \tag{28}$$

при умові $\sum_{i=1}^{n} l_i c_i(\mathrm{T}) = 1$.

Як нам вже відомо, завдання (28) в загальному випадку не вирішується в замкнутій формі. Тому, визначаючи T^0 з рівняння (28) яким-небудь чисельним способом, ми змушені на кожному кроці чисельно знаходити нові значення величин $l_i^0(\mathrm{T})$. Якщо встановлено, що функція ρ_{T} неперервна і має властивість суворої монотонності, то для відшукання T^0 можна запропонувати таку схему рахунку, що реалізує найпростіший процес послідовного наближення. Вибираючи з розумних міркувань деяке число T^1, визначимо мінімальну функцію $h_{\mathrm{T}}^0(\tau)$; якщо виявиться, що $\rho\left[h_{\mathrm{T}_1}^0(\tau)\right] = \rho_{\mathrm{T}_1} > 1/\mu$, то візьмемо T^2, рівне $\mathrm{T}^{1/2}$, а якщо виконується нерівність протилежного змісту $\rho_{\mathrm{T}_1} < 1/\mu$, то слід покласти $\mathrm{T}^2 = 2T^1$. Отже, нехай T^2 визначилося. Якщо для початкового наближення Т1 було $\rho_{\mathrm{T}_1} > 1/\mu$ і виявилося $\rho_{\mathrm{T}_2} > 1/\mu$, то вважаємо знову $\mathrm{T}^3 = \mathrm{T}^{2/2}$, і таким чином до тих пір, поки не прийдемо до нерівності $\rho_{\mathrm{T}_j} < 1/\mu$. Тим самим шукане число T^0 виявляється захопленим у вилку $\mathrm{T}_j < \mathrm{T}^0 < \mathrm{T}_{j-1}$. Далі зрозумілим чином складаємо послідовність обмежуючих відрізків, що містять T^0. Якщо ж було $\rho_{\mathrm{T}_j} < 1/\mu$ і знову отримали $\rho_{\mathrm{T}_2} < 1/\mu$, то вибираємо $\mathrm{T}_3 = 2T_2$, і так чинимо до тих пір, поки не вийде $\rho_{\mathrm{T}_j} > 1/\mu$. Тоді T^0 знову потрапляє в вилку $\mathrm{T}_{j-1} < \mathrm{T}^0 < \mathrm{T}_j$ і т.д. Зазначений процес продовжимо до тих пір, поки не буде виконана з заданою точністю рівність $\rho\left[h_{\mathrm{T}_m}^0(\tau)\right] = 1/\mu$. В результаті побудується послідовність чисел T^1, T^2, ..., T^m, ..., що сходиться до T^0. Ця збіжність легко доводиться, якщо тільки завдання має рішення, тобто, якщо lim $\rho_{\mathrm{T}} > 1/\mu$ при $\mathrm{T} \to \infty$. Після того, як T^0 визначено, саме оптимальне за швидкодією управління в разі (26) запишеться згідно з (22) формулою

$$u_i^0(t) = \mu \operatorname{sgn} h_{\mathrm{T},i}^0(t) \quad \left(t_\alpha \le t \le t_\alpha + \mathrm{T}^0, i = 1,\dots,r\right). \tag{29}$$

Зрозуміло, що для знаходження потрібного нам кореня рівняння (25), крім описаної найпростішої схеми розрахунку, можуть бути застосовані й інші обчислювальні процеси, які ефективно вирішують цю задачу. Припустимо, наприклад, що на j-му кроці процесу послідовних наближень при $\mathrm{T} = \mathrm{T}_j$ реалізувалася нерівність $\rho\left[h_{\mathrm{T}_j}^0(\tau),\quad t_\alpha \le \tau \le t_\alpha + \mathrm{T}_j\right] = \rho_{\mathrm{T}_j} < 1/\mu$. Якщо наступне наближення T_{j+1} підбирати з умови $\rho\left[h_{\mathrm{T}_j}^0(\tau),\quad t_\alpha \le \tau \le t_\alpha + \mathrm{T}_{j+1}\right] = 1/\mu$, то T_{j+1}, будучи більше T_j, не перевищить шуканої величини T, оскільки

$$\rho\left[h_{\mathrm{T}_{j+1}}^0(\tau),\quad t_\alpha \le \tau \le t_\alpha + \mathrm{T}_{j+1}\right] = \rho_{\mathrm{T}_{j+1}} \le \rho\left[h_{\mathrm{T}_j}^0(\tau),\quad t_\alpha \le \tau \le t_\alpha + \mathrm{T}_{j+1}\right] = \frac{1}{\mu}.$$

4. Висновки

Забезпечення необхідної якості виконання технологічних процесів можливе за рахунок техніки нового покоління з використанням інформаційно-технічних систем локального оперативного моніторингу ґрунтового середовища з використанням засобів оперативного контролю технічного стану і робочих процесів машин (коефіцієнт вагомості 0,22–0,73), точності водіння мобільних агрегатів (0,08–0,32), оперативного керування робочими органами машин за раціональним алгоритмом (0,37–0,51).

Подальше зростання ефективності механізації рослинництва пов'язане з підвищенням якості виконання технологічних процесів у першу чергу за рахунок оперативного контролю технічного стану і робочих процесів машин, точності водіння мобільних агрегатів, оперативного керування робочими органами машин за раціональним алгоритмом.

Розроблені зразки техніки нового покоління з керованою якістю виконання технологічних процесів дозволяють забезпечити збільшення продуктивності праці до 20%, зменшення витрат палива і технологічних матеріалів на 15–20%, одержати економічний ефект понад 1700 грн/га та зменшити шкідливий антропогенний вплив техніки на навколишнє середовище.

Значимість вказаної роботи для економіки, продовольчої забезпеченості та екологічної безпеки України при підтримці її зацікавленими відомствами та виробниками – запорука безумовного впровадження у рослинництво України передових інформаційних технологій на основі досягнень вітчизняної аграрної науки та розробок засобів управління.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Гарам В.П., Пашко А.О. Сучасне управління агротехнологічним процесом у рослинництві. *Наука та інновації*. 2005. Т. 1, № 2. С. 110–116.

2. Жук З.Я., Победоносцев А.Ю. Концепция и возможные направления развития технологий и техники сельскохозяйственного будущего. *Тракторы и сельскохозяйственные машины*. 1992. № 1. С. 1–6.

3. Луценко Е.В., Лойко В.И. Семантические информационные модели управления агропромышленным комплексом. Краснодар: КубГАУ, 2005. С. 15–20.

3. Улезько А.В., Денисов Я.И., Тютюнников А.А. Информационное обеспечение адаптивного управления в аграрных формированиях. Воронеж: Истоки, 2008. 106 с.

4. Адамчук В.В., Мойсеєнко В.К., Кравчук В.І., Войтюк Д.Г. Техніка для землеробства майбутнього. *Механізація та електрифікація сільського господарства.* Глеваха: ННЦ „ІМЕСГ", 2002. Вип. 86. С. 20–32.

5. Сучасні тенденції розвитку конструкцій сільськогосподарської техніки / за ред. В.І. Кравчука, М.І. Грицишина, С.М. Коваля. К.: Аграрна наука, 2004. 398 с.

6. Ормаджи К.С. Контроль качества полевых работ. М.: Росагропромиздат, 1991. 191с.

7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

8. Бурачек В.Г., Железняк О.О., Зацерковний В.І. Геоінформаційний аналіз просторових даних: монографія. Ніжин: ТОВ Видавництво «Аспект-Поліграф», 2011. 440 с.

9. Масло І.П., Мироненко В.Г. Автоматизована система локально-дозованого внесення добрив і хімічних засобів захисту рослин. УААН: Розробки-виробництву. К.: Аграрна наука, 1999. С. 348–349.

10. Гуков Я.С., Линник Н.К., Мироненко В.Г. Автоматизированная система локально-дозированного внесения удобрений, мелиорантов и средств защиты растений. *Труды 2-й МНПК по проблемам дифференциального применения удобрений в системе координатного земледелия*. Рязань, 2001. С. 48–50.

11. Мироненко В.Г. Технічні засоби забезпечення якості виконання технологічних процесів у рослинництві: монографія. К., 2005. 271 с.

12. Пастушенко С.И. Оптимизация сельскохозяйственных технических систем. *Техніка АПК*. 1999. № 8. С. 12–15.

13. Броварець О. Від безплужного до глобального розумного землеробства. *Техніка і технології АПК.* 2016. № 9 (84). С. 19–23.

14. Броварець О. Від безплужного до глобального розумного землеробства. *Техніка і технології АПК*. 2016. № 10 (85). С. 28–30.

15. Броварець О. Розумні машини для розумних господарів. *Зерно*. 2016. № 9 (81). С. 262–266.

Стаття надійшла до редакції 19.02.2018