КОСМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ том 16 № 2 2000

УДК 52-64

Альтернативный метод решения кинетического уравнения переноса в стационарном случае

Б. А. Шахов

Главная астрономическая обсерватория Национальной академии наук Украины
03680, Киев 127, Голосиив

В отличие от метода решения стационарного кинетического уравнения переноса, основанного на разложении функции распределения частиц в ряд по сингулярным функциям Кейза, предлагается метод, основанный на преобразовании Фурье. Полученные математические соотношения позволяют провести до конца обратное преобразование Фурье и получить точное аналитическое решение кинетического уравнения переноса в стационарном случае, которое содержит только элементарные функции и интегралы от них.

АЛЬТЕРНАТИВНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ КІНЕТИЧНОГО РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ У СТАЦІОНАРНОМУ ВИПАДКУ, Шахов Б. О. — На відміну від методу розв'язання стаціонарного кінетичного рівняння переносу, що базується на розкладі функції розподілу часток у ряд за сингулярними функціями Кейза, пропонується метод, що базується на перетворенні Фур'є. Отримані математичні співвідношення дозволяють довести до завершення обернене перетворення Фур'є та отримати точний аналітичний розв'язок кінетичного рівняння переносу у стаціонарному випадку, який складається лише з елементарних функцій та інтегралів від них.

AN ALTERNATIVE METHOD FOR SOLVING THE KINETIC TRANSPORT EQUATION IN THE STATIONARY CASE, by Shakhov B. A. — In contrast to the method of the stationary kinetic transport equation based on the expansion of the distribution function of particles in terms of singular Case functions, we propose a method based on the Fourier transformation. The mathematical relations derived in this paper allow one to bring the inverse Fourier transformation to completion and to receive an exact analytical solution of the kinetic transport equation in a stationary case which contains only elementary functions and definite integrals of them.

Рассмотрим рассеяние легких частиц на тяжелых неподвижных рассеивателях. Рассеяние будем считать абсолютно упругим. Основным параметром, характеризующим рассеяние частиц, является средняя длина свободного пробега λ, которую в дальнейшем будем считать величиной постоянной. Так как при упругих столкновениях легких частиц с тяжелыми модуль скорости легких частиц не изменяется, то $v = |\mathbf{v}| = \text{const}$, где $\mathbf{v}$ — вектор скорости легких частиц. Основной характеристикой, описывающей поведение легких частиц в заданной модели рассеяния, является функция распределения частиц $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ [2].

В стационарном случае она является только функцией переменных $\mathbf{r}$ (где $\mathbf{r}$ — координата частицы) и $\mathbf{v}$. Эта функция удовлетворяет стационарному кинетическому уравнению переноса

$$\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{v}{\lambda} f = \frac{cv}{4\pi\lambda}\int f d\Omega + S(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \tag{1}$$

Здесь Ω — единичный вектор направления скорости $\mathbf{v}$ ($\omega = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$), c — коэффициент поглощения частиц, $S(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — функция источника частиц.

В монографии [2] рассматриваются различные частные случаи уравнения (1). В том случае, когда функция распределения частиц зависит только от одной пространственной переменной, уравнение (1) с плоским мононаправленным источником имеет вид

$$v\mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{v}{\lambda} f = \frac{cv}{2\lambda}\int_{-1}^{1} f d\mu + \frac{\delta(x)\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi}. \tag{2}$$

Здесь x — координата, $\mu = \cos\theta$ — косинус угла θ между направлением скорости $\mathbf{v}$ и осью x, $\mu_0 = \cos\theta_0$, θ_0 — угол, под которым испускаются частицы по отношению к оси x, $\delta(a)$ — дельта-функция Дирака. В работе [2] получено решение уравнения (2) в виде разложения в ряд по сингулярным функциям Кейза и интеграла от них. Этот метод возник, в частности, как альтернатива использования метода преобразования Фурье. В самом деле (см. [1]), применим преобразование Фурье

$$\bar{f}(k, \mu, \mu_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iky) f(f(y, \mu, \mu_0) dy$$

к уравнению

$$\mu\frac{\partial f}{\partial y} + f = \frac{c}{2}\int_{-1}^{1} f d\mu + \frac{1}{2\pi v}\delta(y)\delta(\mu - \mu_0) \tag{3}$$

(уравнение (3) есть форма уравнения (2), записанная в безразмерной переменной $y = x/\lambda$) и получим

$$ik\mu\bar{f} + \bar{f} = \frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\bar{f} d\mu + \frac{1}{2\pi v}\delta(\mu - \mu_0). \tag{4}$$

Решая интегральное уравнение (4), получим Фурье-образ:

$$\bar{f}(k, \mu, \mu_0) = \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi v(1 + ik\mu)} + \\ + \frac{c}{4\pi v(1 + ik\mu)(1 + ik\mu_0)\left(1 - \frac{c}{k}\operatorname{arctg} k\right)}. \tag{5}$$

Основная трудность получения функции $f(y, \mu, \mu_0)$ состояла в обратном преобразовании Фурье выражения $\left(1 - \frac{c}{k}\operatorname{arctg} k\right)^{-1}$. Однако обратное преобразование Фурье выражения (5) можно провести до конца, используя неизвестное ранее соотношение. Это соотношение имеет вид

$$\frac{1}{1-\frac{c}{k}\operatorname{arctg}k} = 1 + \frac{k^2}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\eta}{1-ik\eta}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{k+\frac{ci}{2}\left(\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}+i\pi\right)} - \frac{1}{k+\frac{ci}{2}\left(\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}-i\pi\right)}\right]+$$
$$+\frac{k^2}{c\sin^2\frac{k}{c}\left(1-k\operatorname{ctg}\frac{k}{c}\right)}\left[\theta\left(\frac{k}{c}+\frac{\pi}{2}\right)-\theta\left(\frac{k}{c}-\frac{\pi}{2}\right)\right], \qquad (6)$$

где $\theta(a)$ — функция скачка, i — мнимая единица. Выражение (6) является частным случаем более общего выражения

$$\frac{1}{1-\frac{c}{k}\operatorname{arctg}\frac{k}{\omega}} = 1 + \frac{k^2}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\eta}{\omega-ik\eta}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{k+\frac{ci}{2}\left(\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}+i\pi\right)} - \frac{1}{k+\frac{ci}{2}\left(\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}-i\pi\right)}\right]+$$
$$+\frac{k^2}{c\sin^2\frac{k}{c}\left(\omega-k\operatorname{ctg}\frac{k}{c}\right)}\left[\theta\left(\frac{k}{c}+\frac{\pi}{2}\right)-\theta\left(\frac{k}{c}-\frac{\pi}{2}\right)\right]. \qquad (7)$$

Выражение (7) справедливо при $\operatorname{Re}\omega \geq 1$, где $\operatorname{Re}\omega$ — действительная часть комплексной величины ω. Оно проверяется взятием интеграла в правой части равенства, при этом получается тождество. Здесь нет необходимости брать этот интеграл, потому что почти шаг за шагом эта процедура совпадает с получением формулы (31) в работе [3] (эта формула является частным случаем формулы (7) при $c = 1$). При $\omega = 1$ выражение (7) переходит в (6).

Запишем теперь формулу для $\bar{f}(k, \mu, \mu_0)$, используя (5) и (6).

$$\bar{f}(k,\mu,\mu_0) = \frac{\delta(\mu-\mu_0)}{2\pi v(1+ik\mu)} + \frac{c}{4\pi v(1+ik\mu)(1+ik\mu_0)}+$$
$$+\int_{-1}^{1}\frac{c}{4\pi v}d\eta\left\{\frac{k^2}{(1+ik\mu)(1+ik\mu_0)(1-ik\eta)\left[k+\frac{ci}{2}\left(\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}+i\pi\right)\right]}-\right.$$
$$-\frac{k^2}{(1+ik\mu)(1+ik\mu_0)(1-ik\eta)\left[k+\frac{ci}{2}\left(\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}+i\pi\right)\right]}+$$
$$+\frac{k^2}{(1+ik\mu)(1+ik\mu_0)\left(1-k\operatorname{ctg}\frac{k}{c}\right)}\cdot\frac{1}{4\pi v\sin^2\frac{k}{c}}\times$$
$$\left.\times\left[\theta\left(\frac{k}{c}+\frac{\pi}{2}\right)-\theta\left(\frac{k}{c}-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}. \qquad (8)$$

Проведем обратное преобразование Фурье

$$f(y,\mu,\mu_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(iky)\bar{f}(k,\mu,\mu_0)dk,$$

где $\bar{f}(k,\mu,\mu_0)$ определяется выражением (8). Интеграл (8) берется при помощи методов контурного интегрирования. Особые точки функции $f(k, \mu, \mu_0)$ комплексного переменного k являются полюсами первого порядка. Выбор контура в зависимости от параметров μ и μ_0 аналогичен проведенному при выводе формулы (40) в работе [3]. Выполнив интегрирование, получим следующее выражение:

$$
\begin{aligned}
f(y, \mu, \mu_0) &= \frac{1}{2\pi}\delta(\mu - \mu_0)e^{-y/\mu}S(y, 1/\mu) + \\
&+ \frac{c}{4\pi v(\mu - \mu_0)}\left[e^{-y/\mu}S(y, 1/\mu) - e^{-y/\mu_0}S(y, 1/\mu_0)\right] + \\
&+ \frac{c^2}{8\pi v(\mu - \mu_0)}\int_{-1}^{1} d\eta \left[\frac{\mu e^{-y/\mu}S(y, 1/\mu)}{(\mu + \eta)D(\mu, \eta))} - \frac{\mu_0 e^{-y/\mu_0}S(y, 1/\mu_0)}{(\mu_0 + \eta)D(\mu_0, \eta))}\right] - \\
&- \frac{c^2}{8\pi v}\int_{-1}^{1} d\eta \frac{\eta e^{y/\eta}S(y, -1/\eta)}{(\eta + \mu)(\eta + \mu_0)D(-\eta, \eta)} + \frac{c^3}{16\pi^2 v}\int_{-1}^{1} d\eta \left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^{cy/2} \times \\
&\times \frac{S(y, -1/\eta)}{D(\mu, \eta)D(\mu_0, \eta)D(-\eta, \eta)} \times \left[A(\mu, \mu_0, \eta)\sin\frac{\pi c y}{2} + B(\mu, \mu_0, \eta)\cos\frac{\pi c y}{2}\right] + \\
&+ \frac{c^3}{4\pi^2 v}\int_{0}^{\pi/2} d\xi \, \frac{\xi^2(1 - \xi^2 c^2 \mu\mu_0)\cos c\xi y + c\xi^3(\mu + \mu_0)\sin c\xi y}{\sin^2\xi(1 - c\xi \operatorname{ctg}\xi)(1 + c^2\mu^2\xi^2)(1 + c^2\mu_0^2\xi^2)},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $S(a, b)$ — знаковая функция

$$S(a, b) = \theta(a)\theta(b) - \theta(-a)\theta(-b), \tag{10}$$

или

$$
S(a, b) = \begin{cases} 1, & a > 0, \ b > 0; \\ 0, & a > 0, \ b < 0; \\ 0, & a < 0, \ b > 0; \\ -1, & a < 0, \ b < 0, \end{cases}
\tag{11}
$$

$$D(a, b) = M^2(a, b) + \frac{\pi^2 c^2 a^2}{4}, \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
A(\mu, \mu_0, \eta) &= \Big\{M(\mu, \eta)M(\mu_0, \eta)M(-\eta, \eta)K(\eta) - \frac{\pi^2\mu\mu_0 c^2}{4}M(-\eta, \eta)K(\eta) - \\
&- \pi^2 \eta c \ln\frac{1+\eta}{1-\eta} M(\mu, \eta)M(\mu_0, \eta) + \frac{\pi^4\mu\mu_0\eta c^3}{4}\ln\frac{1+\eta}{1-\eta} + \\
&+ \frac{\pi^2 c^2}{2}\left(\mu + \mu_0 + \mu\mu_0 \ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)\left[2\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\cdot M(-\eta, \eta) + \frac{\eta c}{2}K(\eta)\right]\Big\},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
B(\mu, \mu_0, \eta) &= \pi\Big\{\left[M(\mu, \eta)M(\mu_0, \eta) - \frac{\pi^2\mu\mu_0 c^2}{4}\right] \times \\
&\times \left[2\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\cdot M(-\eta, \eta) + \frac{\eta c}{2}K(\eta)\right] - \\
&- \frac{c}{2}\left(\mu + \mu_0 + \mu\mu_0\, c \ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)\left[K(\eta)M(-\eta, \eta) - \pi^2\eta c \ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right]\Big\},
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$M(a, b) = 1 + \frac{ac}{2}\ln\frac{1+b}{1-b}, \tag{15}$$

$$K(\eta) = \ln^2\frac{1+\eta}{1-\eta} - \pi^2. \tag{16}$$

Перейдя от безразмерной переменной y к размерной x, получим решение уравнения (2).

Рассмотрим первое слагаемое выражения (9). В силу свойств δ-функции и функции $S(y, 1/\mu)$ оно будет отличным от нуля для частиц $\mu = \mu_0$, при этом частицы с $\mu_0 > 0$ должны рассматриваться в положительном полупространстве ($x > 0$), а с $\mu_0 < 0$, соответственно, — в отрицательном ($x < 0$). Физически это означает, что это слагаемое описывает нерассеяные частицы, интенсивность которых от источника ослабевает как $(1/\mu_0)e^{-x/\mu_0}$, остальные слагаемые описывают рассеяние частицы.

В отличие от используемых функций Кейза [2] для получения решения уравнения (2), решение (9) содержит в явном виде параметр $c \leq 1$, который можно произвольно изменять. Так, при $c = 0$ (случай полного поглощения частиц) остаются только нерассеяные частицы. При $c = 1$ (только упругое рассеяние без поглощения) интеграл в шестом слагаемом формулы (9) расходится. Это соответствует известному факту, что при $c = 1$ стационарного решения уравнения (2) не существует. Кроме того, наличие решения (9) позволяет получить новые соотношения для функций Кейза.

Полученное решение может быть использовано в тех областях, где применимо уравнение (2), а именно в теориях переноса излучения, переноса нейтронов, рассеяния радиоволн на случайных неоднородностях и т. д.

Автор выражает благодарность Э. Г. Яновицкому за постоянный интерес к работе и полезные дискуссии.

1. *Дэвисон Б.* Теория переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1960.—512 с.
2. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. — М.: Мир, 1972.—381 с.
3. *Шахов Б. А.* Нестационарная функция Грина кинетического уравнения переноса для изотропного источника // Кинематика и физика небес. тел.—1995.—**11**, № 1.—С. 49—67.

Поступила в редакцию 04.11.99