

УДК 523.45

**Ю. В. Александров, А. В. Портянкина**

Научно-исследовательский институт астрономии Харьковского национального университета  
61022, Харьков, ул. Сумская 35

### **Применение задачи двух неподвижных центров к описанию динамики двойных астероидов**

*Обсуждается возможность применения задачи двух неподвижных центров к описанию динамики двойных астероидов. В качестве примера рассмотрена задача о сравнении двух описаний прецессионного движения спутника астероида: описание, даваемое в первом приближении формулами для вековых возмущений элементов орбиты под действием второй зональной гармоники гравитационного потенциала, и описание при помощи задачи двух неподвижных центров.*

*ЗАСТОСУВАННЯ ЗАДАЧІ ДВОХ НЕРУХОМИХ ЦЕНТРІВ ДО ОПИСУ ДИНАМІКИ ПОДВІЙНИХ АСТЕРОЇДІВ, Александров Ю. В., Портянкина А. В. — Обговорюється можливість застосування задачі двох нерухомих центрів до опису динаміки подвійних астероїдів. Як приклад розглянута задача про порівняння двох описів прецесійного руху супутника астероїда: опису, що дається в першому наближенні формулами для вікових збурень елементів орбіти під дією другої зональної гармоніки гравітаційного потенціалу та опису за допомогою задачі двох нерухомих центрів.*

*APPLICATION OF THE PROBLEM OF TWO FIXED CENTERS TO THE BINARY ASTEROID DYNAMICS, by Alexandrov U. V., Portyankina A. V. — The application of the problem of two fixed centers to the binary asteroid dynamics is discussed. As an example, we consider the comparison between two different descriptions of the precession motion of asteroid satellite: the description given by the equations for secular perturbations of the orbital elements under the influence of the second harmonic of gravitational potential and the description in the problem of two fixed centers.*

28 августа 1993 г. с борта КА «Галилео» была получена фотография астероида 243 Ида, на которой был виден естественный спутник астероида, получивший впоследствии имя Дактиль [8]. Имеющиеся данные позволяют говорить о том, что двойственность астероидов не исключительное явление в Солнечной системе: двойными с той или иной степенью достоверности считаются 15 астероидов, в том числе 2 Паллада, 9 Метида, 45 Евгения, 216 Клеопатра, 243 Ида, 624 Гектор, 4179 Тоутатис, 4769 Касталия [7].

При изучении динамики таких двойных систем нужно учитывать то, что астероиды имеют неправильную форму, в большинстве случаев характеризующуюся сильным сжатием. Использование при описании движения в

системах двойных астероидов разложения гравитационного потенциала центрального тела в ряд по шаровым функциям (как это обычно делается для больших планет) при расстояниях до спутника, сравнимых с размером центрального тела, может быть лишь грубым приближением, недостаточным для количественного анализа динамики двойных систем астероидов. А именно этот случай (размер орбиты спутника сравним с размером центрального тела) и рассматривается ниже.

В работе предполагается, что типичная форма астероида — это трехосный эллипсоид с соотношением осей, близким к отношению  $a_1:b_1:c_1 = 2:\sqrt{2}:1$ . Такое соотношение было получено в результате экспериментов по дроблению тел при их столкновениях [9]. В его пользу свидетельствует также оценка величины  $a_1 \sin i$  по среднему значению амплитуды кривых блеска астероидов [6], где  $i$  — угол между осью астероида и лучом зрения. С другой стороны, астероиды (кроме самых крупных) можно считать однородными телами, это упрощает задачу описания их гравитационного поля.

В свете сказанного выше задача двух неподвижных центров представляется подходящим инструментарием для исследования динамики двойных систем астероидов по следующим двум причинам: во-первых, в задаче возможно описание гравитационного поля сильно сжатого тела, и во-вторых, уравнения движения в этой задаче интегрируются в эллиптических квадратурах.

В приближении задачи двух неподвижных центров сжатое центральное тело представляется двумя материальными точками с массами  $m_1$  и  $m_2$ , зафиксированными на комплексных расстояниях  $d_1$  и  $d_2$  от центра масс тела, что и позволяет учесть сжатие центрального тела. Эта система может быть названа гравитационным диполем по аналогии с электрическим, хотя аналогия не является полной. В электрическом диполе заряды имеют противоположные знаки, тогда как масса отрицательной быть не может. Для характеристики сжатия тела при этом можно воспользоваться параметром диполя  $d$  (если тело симметрично относительно экватора, то  $d_1 = di$ ,  $d_2 = -di$ ;  $d = \sqrt{J_2}R$ , где  $R$  — характерный размер центрального тела, в случае эллипсоида  $R = a_1$ , т. е. большая полуось, а  $J_2$  — коэффициент второй зональной гармоники).

Общее решение задачи двух неподвижных центров получается в эллиптических координатах  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $w$ , связанных с прямоугольными координатами следующими соотношениями [1]:

$$\begin{aligned} x &= d\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} \cos w, \\ y &= d\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} \sin w, \\ z &= d\sigma + d\lambda\mu. \end{aligned}$$

Оно имеет вид

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{2(1+\lambda^2)(hd^2\lambda^2 + fmd\lambda + \alpha_2) + \alpha_3^2}} = \tau - \tau_0, \quad (1)$$

$$\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{2(1-\mu^2)(hd^2\mu^2 - a_2) - a_3^2}} = \tau - \tau_0, \quad (2)$$

$$w = w_0 + a_3 \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{(\lambda^2 + \mu^2)d\tau}{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}, \quad (3)$$

$$t = t_0 + d^2 \int_{\tau_0}^{\tau} (\lambda^2 + \mu^2)d\tau. \quad (4)$$

где  $h$ ,  $a_1$  — произвольные постоянные интегрирования,  $f$  — гравитационная постоянная,  $m$  — масса тела.

Способ обращения этих эллиптических интегралов, а вследствие этого и явный вид общего решения, выраженного через эллиптические функции Якоби, существенно зависит от характера корней полиномов, стоящих в знаменателях выражений (1) и (2), коэффициенты которых, в свою очередь, зависят от начальных условий.

Представим подкоренные выражения следующим образом:

$$L(\lambda) = 2hd^2\lambda^4 + 2fmd\lambda^3 + 2(hd^2 + \alpha_2)\lambda^2 + 2fmd\lambda + (2\alpha_2 + \alpha_3^2), \quad (5)$$

$$M(\mu) = -2hd^2\mu^4 + 2(hd^2 + \alpha_2)\mu^2 - (2\alpha_2 + \alpha_3^2). \quad (6)$$

Мы рассматривали начальные условия, соответствующие определенным круговым и эллиптическим орбитам с наклоном, не превышающим  $45^\circ$  (это связано с точностью аппроксимации трехосного эллипсоида гравитационным диполем, см. ниже). При этом в случае интеграла (2) для всех орбит, исследованных нами, потребовался только один способ обращения (для вышеуказанных начальных условий  $h < 0$ ,  $2\alpha_2 + \alpha_3^2 < 0$ , а следовательно, оба корня  $\mu_1^2$ ,  $\mu_2^2$  многочлена (6), рассматриваемого как квадратный, положительны, и тогда

$$M(\mu) = -2hd^2(\mu_1^2 - \mu^2)(\mu_2^2 - \mu^2).$$

Следовательно, уравнение, определяющее координату  $\mu$ , можно записать в конечном виде для любой из перечисленных орбит:

$$\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu_1^2 - \mu^2)(\mu_2^2 - \mu^2)}} = \sqrt{-2hd^2}(\tau - \tau_0),$$

Делая здесь подстановку  $\mu = \mu_2 u$ , получим

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \mu_1 \sqrt{-2hd^2}(\tau - \tau_0) + C, \quad (7)$$

где положено

$$k = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad C = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad u_0 = \frac{\mu_0}{\mu_2}.$$

Обращая интеграл в равенстве (7) [3], получаем  $u$  как эллиптический синус с модулем  $k$ , после чего находим

$$\mu = \mu_2 \operatorname{sn}[\mu_1 \sqrt{-2hd^2}(\tau - \tau_0) + C].$$

В случае интеграла (1) в исследуемую область начальных значений попадают два варианта соотношений постоянных интегрирования  $h$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ , поэтому рассматривать приходится два способа обращения эллиптических интегралов. Обозначим через  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  корни многочлена (5).

1. Пусть все корни многочлена действительны, положительны и  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$ . Делая подстановку [3]:

$$\lambda = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \cdot \frac{(n' + n'')u + n' - n''}{(n' - n'')u + n' + n''}, \quad (8)$$

где  $n' = \sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)}$ ,  $n'' = \sqrt{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)}$ , мы получим вместо (1)

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = a^2 \sqrt{-2hd^2}(\tau - \tau_0),$$

где положено также

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} + \sqrt{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}, \\ b &= \sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} - \sqrt{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}, \\ k &= b/a. \end{aligned}$$

Величина  $u_0$  определяется через  $\lambda_0$  из формулы (8).

Обращая теперь интеграл, будем иметь

$$u = \operatorname{sn}[a^2\sqrt{-2hd^2}(\tau - \tau_0) + C_1],$$

причем

$$C_1 = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Подставляя затем найденное выражение для  $u$  в (8), получим также величину  $\lambda$  в функции от  $\tau$ .

2. Пусть два корня многочлена  $\lambda_1, \lambda_2$  — вещественные числа ( $\lambda_2 < \lambda_1$ ), а два других  $\lambda_3 = b_1 + ic_1, \lambda_4 = b_2 - ic_2$  — комплексные сопряженные.

В этом случае подстановка имеет вид [4]

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \cdot \frac{\nu - \cos\varphi}{1 - \nu\cos\varphi}. \quad (9)$$

Вместо выражения (1) получается

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2(\varphi))}} = \frac{1}{b}\sqrt{-2hd^2}(\tau - \tau_0),$$

где

$$\begin{aligned} b &= -\frac{\sqrt{\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)}}{c_1}, \\ k^2 &= \sin^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right), \quad \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\lambda_1 - b_1}{c_1}, \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{\lambda_2 - b_1}{c_1}, \\ \nu &= \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}\right). \end{aligned}$$

Величина  $\varphi_0$  определяется из формулы

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0}{2} = \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_2}.$$

Обращая интеграл, будем иметь

$$\varphi = \operatorname{am}\left[\frac{1}{b}\sqrt{-2hd^2}(\tau - \tau_0) + C_1\right],$$

причем

$$C_1 = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}.$$

После того как обращением эллиптических интегралов находятся  $\lambda$  и  $\mu$  как эллиптические функции вспомогательной переменной  $\tau$ , уже простыми квадратурами можно получить величины  $w$  и  $t$  как функции переменной  $\tau$  (3), (4).

Естественным образом встает вопрос об ошибках, возникающих в процессе аппроксимации поля трехосного эллипсоида полем гравитационно-

го диполя. Нужно отметить, что приближение гравитационного диполя применимо только к осесимметричным телам, тогда как трехосный эллипсоид — тело неосесимметричное. Поэтому при такой аппроксимации для перехода к осесимметричному полю на временах, значительно больших периода осевого обращения астероида ( $\gg 10^6$ ) необходимо усреднение поля тяготения астероида по всем ориентациям, возникающим в процессе его осевого вращения. Как показано в работе [2], относительная погрешность аппроксимации усредненного по периоду вращения поля трехосного эллипсоида, определяемая на поверхности эллипсоида на его экваторе (где она максимальна) при эксцентриситетах полярного сечения  $e < 0.9$  не превышает 10 %. Погрешность аппроксимации поля эллипсоида вращения полем гравитационного диполя до значения  $e = 0.5$  весьма мала, но при  $e > 0.5$  начинает нелинейно увеличиваться, оставаясь меньше 10 % при значениях  $e < 0.9$ . При еще больших эксцентриситетах значительные величины погрешностей связаны с тем, что при увеличении  $e$  значения параметра диполя  $d$  и величины малой полуоси  $c$  становятся близкими. При этом резко увеличивается различие между значениями поля эллипсоида и поля гравитационного диполя на полюсе тела. Погрешность аппроксимации в среднем можно уменьшить, если ограничиться рассмотрением некоторой широтной зоны. К примеру, в зоне  $\pm 45^\circ$  погрешность не превышает 10 % [2].

Как пример применения задачи двух неподвижных центров к описанию динамики двойных астероидов рассмотрим задачу о прецессионном движении спутника астероида.

При исследовании прецессионного движения спутника несферического тела наиболее часто используется описание движения, даваемое в первом приближении формулами для вековых возмущений элементов орбиты под действием второй зональной гармоники гравитационного потенциала:

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{de}{dt} = 0, \quad \frac{di}{dt} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3}{2}nJ_2\left(\frac{a}{p}\right)^2 \cos i, \quad (11)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4}nJ_2\left(\frac{a}{p}\right)^2 (1 - 5\cos^2 i). \quad (12)$$

Поскольку задача двух неподвижных центров дает более точное решение, в работе была поставлена задача исследовать, насколько отличается описание (10)—(12) от даваемого задачей двух неподвижных центров при условии, что центральное тело может иметь большое сжатие.

С помощью задачи двух неподвижных центров вычислялась орбита спутника при некоторых начальных условиях, т. е. определялись его эллиптические координаты, по ним — прямоугольные координаты в системе координат, связанной с экваториальной плоскостью центрального тела при следующих условиях нормировки:  $fm = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $T = 1$  (здесь  $a_1$  — главная полуось эллипсоида, аппроксимирующего форму астероида;  $T$  — период невозмущенного кеплеровского движения при тех же начальных условиях). Затем по прямоугольным координатам вычислялись оскулирующие кеплеровские элементы орбиты спутника.

Нужно отметить, что в этом случае изменениям подвержены все кеплеровские элементы орбиты. Найденные значения сравнивались с вычисленными на те же моменты времени с помощью формул (10)—(12). Согласно выражениям (10)—(12) возмущения под влиянием второй гармоники гравитационного потенциала сводятся к прецессии линии узлов и линии аписид, тогда как  $p$ ,  $e$ ,  $i$  в среднем не изменяются. Поэтому проводить

сравнение имеет смысл только для возмущений долготы узла  $\Omega$  и перицентрального расстояния  $\omega$ .

На рис. 1—2 представлены зависимости прецессии линии апсид и линии узлов от времени при различных начальных условиях и различных сжатиях центрального тела. Кривые соответствуют величине прецессии в задаче двух неподвижных центров, прямые — формулам (11)—(12). В последнем случае отсутствуют периодические возмущения долготы узла  $\Omega$  и перицентрального расстояния  $\omega$ , при использовании же задачи двух неподвижных центров информация о периодических возмущениях сохраняется.

Вычисления были проведены для орбит с начальным значением большой полуоси от  $1.5a_1$  до  $3.5a_1$ . Естественно, что чем больше начальная полуось орбиты, тем меньше возмущения в орбиту спутника вносятся сжатием центрального тела. Сравнение показывает, что на расстояниях более  $3.5a_1$  формулы (10)—(12) и задача двух неподвижных центров дают приемлемые по точности значения  $\Omega$  и  $\omega$  при всех величинах сжатия центрального тела. Для меньших же расстояний есть некоторая критическая величина сжатия, при которой различие между этими описаниями становится ощутимо больше амплитуды изменения  $\Omega$  и  $\omega$  (см. рис. 1, *a*). При еще больших величинах сжатия становится невозможным само представление возмущенного движения спутника в виде разложения на прецессию линии узлов и линии апсид. Такие критические величины сжатия, полученные для различных начальных условий, представлены на рис. 3, их совокупность делит плоскость на две области: область 1, где допустимо использование формул (10)—(12), и область 2, где они неприменимы.

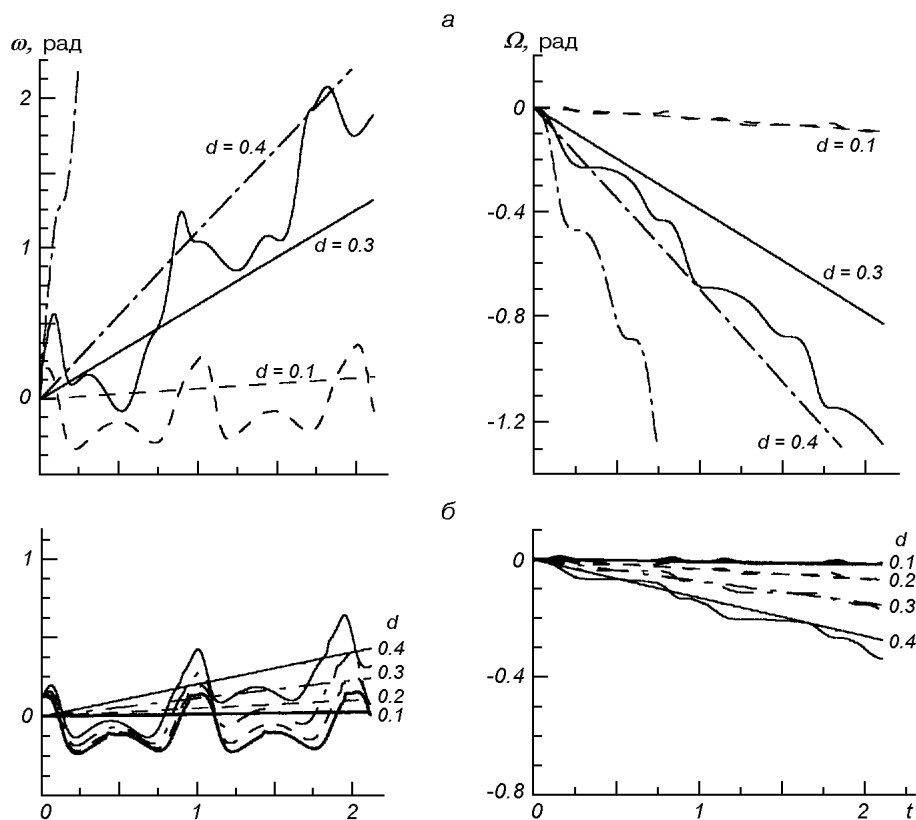


Рис. 1. Влияние сжатия  $d$  центрального тела на прецессионное движение спутника астероида при  $i = 30^\circ$ ,  $e = 0.3$  (*a* — для начального значения главной полуоси орбиты спутника  $a = 1.5a_1$ , *б* — для  $a = 3.5a_1$ )

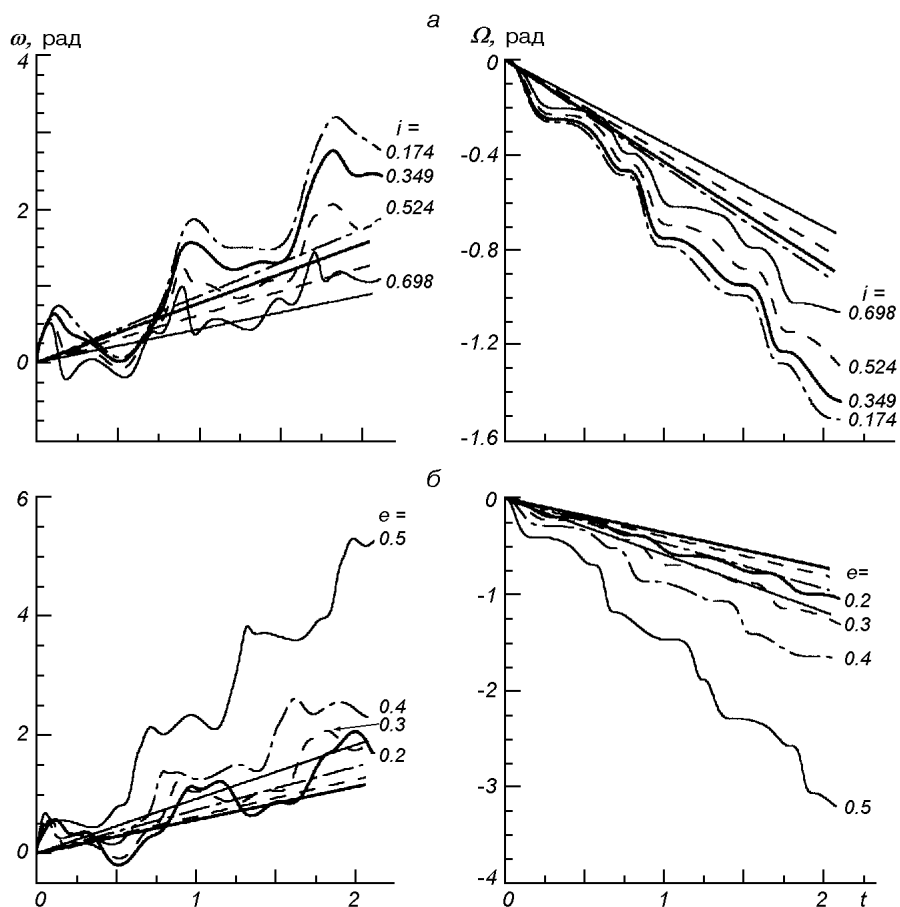


Рис. 2. Зависимость прецессионного движения спутника астероида: *a* — от начального значения *i* наклона орбиты (при  $a = 1.5a_1$ ,  $e = 0.3$ ,  $d = 0.3$ ), *б* — от начального значения эксцентриситета орбиты (при  $a = 1.5a_1$ ,  $i = 30^\circ$ ,  $d = 0.3$ )

Поскольку влияние несферичности центрального тела проявляется сильнее при небольших значениях большой полуоси орбиты спутника, на рис. 1, *a* и 2 представлены результаты вычислений для  $a = 1.5a_1$ . Рис. 2 позволяет оценить влияние начальных значений наклона орбиты и ее эксцентриситета на эволюцию прецессионного движения.

Тенденция к уменьшению возмущающего влияния с увеличением угла наклона сохраняется в обоих приближениях, несмотря на то что и величины прецессий, и темпы их изменений при переходе к большим наклонам различны. К тому же, чем больше начальное наклонение орбиты спутника, тем меньшие периодические возмущения она испытывает. На рис. 2 представлены кривые для значений начального наклона орбиты вплоть до  $40^\circ$ . Смысла в рассмотрении больших значений наклона нет, ибо, как говорилось выше, при аппроксимации поля эллипсоида полем гравитационного диполя погрешность сильно увеличивается вблизи полюсов, а это сказывается на точности построения орбит именно с большими значениями *i* (более  $45^\circ$ ).

Полученные результаты свидетельствуют, что задача двух неподвижных центров — более приемлемый аппарат (особенно по сравнению с методом описания прецессионного движения в терминах прецессии линии узлов и линии апсид) при исследованиях динамики двойных систем, в

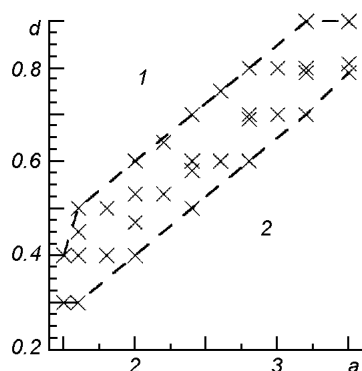


Рис. 3. Критические значения сжатия центрального тела

которых центральное тело обладает существенным сжатием, в частности двойных астероидов или системы астероид — его искусственный спутник. Конечно, при наличии достаточно полных данных о форме астероида и необходимых вычислительных мощностей эту же задачу можно решить, используя численное интегрирование уравнений движения, и построить орбиту спутника такого астероида с учетом более детальной информации о его форме и с необходимой точностью. Такая детальная информация о формах астероидов может быть получена либо в результате космических миссий («Галилео», NEAR) либо при специальных наблюдениях, требующих соответствующих технических средств. Поэтому данные о форме преобладающего большинства астероидов до сих пор весьма ограничены, а наземные исследования остаются основным их источником [5]. К тому же при решении задач анализа кривых блеска астероидов (например, с целью выявления двойных и кратных систем) нужно находить приемлемый баланс между объемами вычислений и требуемой точностью. Именно в таких случаях, на наш взгляд, задача двух неподвижных центров может служить хорошим приближением к описанию реального движения спутника сжатого астероида.

1. Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г. Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения спутников Земли // *Астрон. журн.*—1963.—40, № 2.—С. 363—372.
2. Александров Ю. В., Портянкина А. В. Аппроксимация полей тяготения астероидов полем гравитационного диполя // *Вісник астрономічної школи.*—2000.—1, № 2.—С. 47—50.
3. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. — М.: Изд-во АН СССР, 1941.—451 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974.—382 с.
5. Лупишко Д. Ф. Физические свойства астероидов // *Вісник астрономічної школи.*—2000.—1, № 2.—С. 63—77.
6. Мухамед Р. А. Вращение, форма и кривые блеска астероидов: Дисс.: канд. физ.-мат. наук. — Харьков, 1995.—234 с.—Машинопись.
7. Чурюмов К. И. Спутники малых планет // *Астрономічний календар 2000.* — Київ, 1999.—С. 204—206.
8. Chapman C. R. et al. Discovery and physical properties of Dactyl, a satellite of asteroid 243 Ida // *Letters to Nature.*—1995.—374.—P. 783—785.
9. Fujiwara A., Cerroni P., Davis D. R., et al. Experiments and scaling laws on catastrophic collision // *Asteroids II* / Eds R. Binzel, T. Gehrels, M. Matthews. — Tucson: Univ. of Arizona Press, 1989.—P. 240—265.

Поступила в редакцию 13.12.01