

УДК 533.951

**С. О. Черемных, И. Т. Жук**

Институт космических исследований Национальной академии наук Украины  
и Государственного космического агентства Украины  
Проспект Академика Глушкова 40, корп. 4/1, Киев 187, ГСП 03680  
ikdcheremnykh@gmail.com, zhukigor@gmail.com

### **Дискретные УНЧ-моды в магнитосфере Земли вблизи минимума альвеновской частоты**

*Получено уравнение малых колебаний для УНЧ-волн в магнитосфере Земли с учетом быстрой магнитозвуковой волны. С помощью этого уравнения исследован спектр дискретных альвеновских мод вблизи минимума альвеновской частоты.*

*ДИСКРЕТНІ УНЧ-МОДИ В МАГНІТОСФЕРІ ЗЕМЛІ ПОБЛИЗУ МІНІМУМУ АЛЬВЕНІВСЬКОЇ ЧАСТОТИ, Черемних С. О., Жук І. Т. — Отримано рівняння малих коливань для УНЧ-хвиль в магнітосфері Землі з урахуванням швидкої магнітозвучової хвилі. За допомогою цього рівняння досліджено спектр дискретних альвенівських мод поблизу мінімуму альвенівської частоти.*

*DISCRETE ULF MODES IN THE EARTH'S MAGNETOSPHERE NEAR THE ALFVEN FREQUENCY MINIMUM, by Cheremnykh S. O., Zhuk I. T. — The equation of small oscillations of ULF waves in the magnetosphere of the Earth was received taking into account the fast magnetosonic waves. The spectrum of discrete Alfvén modes near the minimum Alfvén frequency was investigated with the help of this equation.*

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Ультранизкочастотные (УНЧ) волны в магнитосфере Земли регулярно фиксируются с помощью наземных магнитометров, радаров и спутников [14, 15]. Важность этих волн для физики магнитосферы определяется их способностью ускорять заряженные частицы до релятивистских энергий, служить триггерами магнитосферных суббурь и

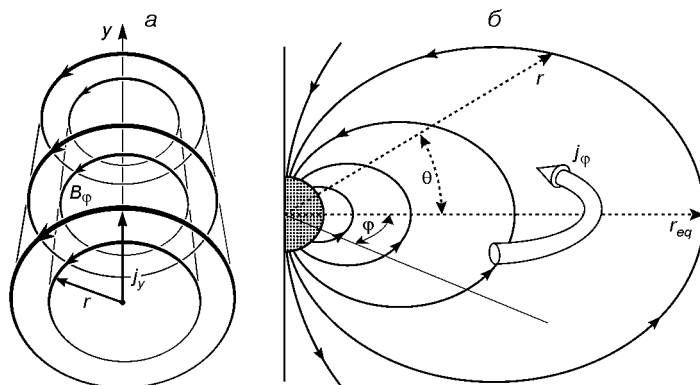


Рис. 1. Модели магнитосферы Земли: *a* — одномерно-неоднородный плазменный цилиндр с продольным током [11], *б* — дипольное магнитное поле с тороидальным током [18]

средством для диагностики магнитосферы. Долгопериодические УНЧ-волны (диапазоны Pc 4 — Pc 5) в настоящее время обычно делят на два типа [3]. К первому типу относят волны с малыми азимутальными волновыми числами ( $m \sim 1$ ). Волны второго типа имеют большие азимутальные волновые числа ( $m \gg 1$ ).

В недавних работах [11, 12] УНЧ-волны с большими азимутальными волновыми числами исследовались в рамках одномерно-неоднородной цилиндрической модели магнитосферы (см. рис. 1, *a*). В этой модели силовые линии магнитного поля рассматривались как концентрические окружности с радиусом  $r$  в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$ . Считалось, что все равновесные параметры (давление, плотность, магнитное поле и т. д.) изменяются поперек магнитных поверхностей  $r = \text{const}$ . Эта модель существенно упростила дифференциальные уравнения малых колебаний для азимутально-мелкомасштабных возмущений и позволила провести довольно полное исследование их поперечной (к магнитному полю) структуры в локальном приближении. Вместе с тем за рамками работ [11, 12] остался вопрос об условиях применимости цилиндрической модели магнитосферы. Частично ответ на этот вопрос будет получен в настоящей работе.

Известно, что для описания УНЧ-возмущений в магнитосфере Земли наиболее подходящей является модель дипольного магнитного поля (см. рис. 1, *б*), которая последовательно учитывает кривизну силовых линий магнитного поля, радиальную неоднородность среды, распределение тороидального тока и давления [4, 18]. В этой работе мы покажем, что модель дипольного магнитного поля и модель одномерно-неоднородного цилиндрического шнура, использованная в работах [11, 12], приводят к одним и тем же уравнениям для поперечной структуры азимутально-мелкомасштабных УНЧ-возмущений. Тем самым мы обоснуем применимость модели цилиндрического шнура для описания УНЧ-возмущений в магнитосфере. Кроме того, полученные нами уравнения будут записаны в декартовой системе координат  $x, y, z$ , что существенно упрощает их анализ и сравнение с

другими результатами. С помощью этих уравнений мы воспроизведем ряд известных результатов, а также получим условие реализации дискретных резонансных мод вблизи минимума альвеновской частоты. Этот результат дополняет результат работы [12], согласно которому дискретные моды реализуются вблизи максимума альвеновской частоты.

### УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ В ДИПОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В качестве исходных берем линеаризованные МГД-уравнения в дипольном магнитном поле, которые использовались в работах [13, 23] для описания ультранизкочастотных МГД-мод в магнитосфере Земли:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} - \frac{1}{s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - 2(p_1 - p - p \operatorname{div} \vec{r}) \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{p_1}{s} \vec{r}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} - \frac{1}{s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{p_1}{s} \vec{r} = 0, \quad (2)$$

$$p \vec{B} - (\operatorname{div} \vec{r}) = 0, \quad (3)$$

$$p_1 - p \operatorname{div} \vec{r} = B^2 (\operatorname{div} \vec{r} - 2 \frac{\vec{r}}{r}). \quad (4)$$

Система (1) — (4) описывает «зацепленные» через кривизну силовых линий магнитного поля альвеновские магнитозвуковые моды. Здесь использованы следующие обозначения:  $\omega$  — частота возмущений,  $\vec{B}$  — равновесное магнитное поле,  $p$  и  $\rho$  — равновесные давление и плотность плазмы,  $\vec{r}$  — вектор смещения элементарного объема плазмы,  $\frac{1}{s} = B^2 / |\vec{r}|^2$ ,  $\vec{r}$  — вектор кривизны силовых линий магнитного поля,  $p = dp/d$ , нижним индексом  $s$  обозначена величина, перпендикулярная к магнитному полю,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $p_1$  — возмущенное полное давление плазмы. При записи (1)–(4) использовано масштабирование магнитного поля в виде  $\vec{B} / \sqrt{4\pi} = \vec{B}$ . Вектор  $\vec{r}$  может быть представлен в виде (см. Приложение 1)

$$\vec{r} = \frac{\vec{B}}{B^2}, \quad (5)$$

где  $\Phi$  — полоидальный магнитный поток,  $\theta$  — тороидальный угол. Эти величины определяют дипольное магнитное поле [8]

$$\vec{B} = [ \dots ]. \quad (6)$$

Из выражения (6) видно, что величины  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  и  $\vec{B}$  являются взаимно ортогональными на любой магнитной поверхности, вследствие чего по этим направлениям можно разложить любую физическую величину, например вектор смещения  $\vec{u}$ . Это обстоятельство наводит на мысль использовать направления  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  и  $\vec{B}$  в качестве направлений локальной системы координат на произвольно выбранной магнитной поверхности.

Для дальнейшего анализа удобно преобразовать уравнение (3). Выразим в (4)  $\text{div} \vec{u}$  через  $p_1$ , и :

$$\text{div} \vec{u} = \frac{B^2}{p} \frac{\vec{B}}{B^2} \cdot \nabla \vec{u} = \frac{p_1}{|\vec{B}|^2}$$

и подставим результат в (3), в итоге получаем

$$\Delta \vec{u} + \frac{c_T^2}{B^2} \nabla (\vec{B} \cdot \nabla \vec{u}) = \frac{c_s^2}{c_A^2} p_1 \vec{e}_B, \quad (7)$$

где  $c_A$  — альвеновская скорость,  $c_s$  — скорость звука,  $c_T$  — касповая скорость:

$$c_A^2 = \frac{B^2}{p}, \quad c_s^2 = \frac{p}{\rho}, \quad c_T^2 = \frac{c_s^2 c_A^2}{c_s^2 + c_A^2}.$$

Уравнения (1), (2), (4) и (7) являются исходными и будут использоваться ниже. Поскольку они имеют довольно громоздкий вид, а их коэффициенты являются переменными [21, 22], то обычно они решаются численно [7] и требуют существенного упрощения даже для получения таких решений.

### УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЛОКАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Следуя [5], запишем (1), (2), (4) и (7) в локальном приближении. С этой целью ведем единичные ортогональные орты (см. уравнение (6))

$$\vec{e}_x = \frac{\vec{e}_y \times \vec{B}}{B}, \quad \vec{e}_y = \frac{\vec{B} \times \vec{e}_x}{B}, \quad \vec{e}_z = \frac{\vec{B}}{B} \quad (8)$$

и запишем вектор смещения  $\vec{u}$  в виде

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z. \quad (9)$$

Сравнивая (5) и (8), получаем

$$u_x = \frac{\vec{e}_x \cdot \nabla \vec{u}}{|\nabla \vec{u}|}, \quad u_y = \frac{\vec{e}_y \cdot \nabla \vec{u}}{|\nabla \vec{u}|}, \quad u_z = \frac{\vec{B} \cdot \nabla \vec{u}}{B}. \quad (10)$$

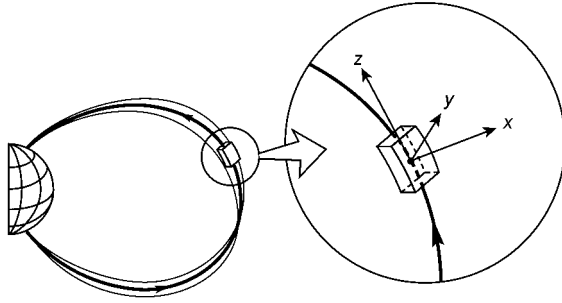


Рис. 2. Локальное приближение в дипольном магнитном поле,  $x, y, z$  — локальные координаты)

Из (8) находим выражения для дифференциальных операторов в координатах  $x, y, z$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\vec{B}}{B} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (11)$$

В отличие от работ [17, 27, 29] мы хотим уделить основное внимание поперечной структуре УНЧ-возмущений, а не продольной. С этой целью рассмотрим элементарный объем магнитосферной плазмы (рис. 2), который будем считать однородным по направлениям  $y$  и  $z$ , а по  $x$  — неоднородным, и для него упростим исходные уравнения. При таком подходе мы фактически пренебрегли граничными условиями на ионосфере (детали см. в работах [20, 26]), предполагая, что они мало влияют на искомое решение. Внутри рассматриваемого объема отдельную фурье-гармонику произвольной возмущенной величины  $X$  можно представить в виде

$$X(x, y, z, t) = X(x) \exp(i t - i k_y y - i k_z z). \quad (12)$$

С учетом (9)—(12) уравнения (1), (2), (4) и (7) в локальной системе координат  $x, y, z$  принимают вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c_A^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) p_1 + 2 p_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c_A^2}{x} \right) + 2 c_A^2 k_y^2 p_1 = - \frac{p_1}{x}, \quad (13)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - c_A^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p_1 = i k_y p_1, \quad (14)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - c_T^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p_1 = i k_z \frac{c_T^2}{c_A^2} p_1 - 2 c_T^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_1, \quad (15)$$

$$p_1 = \left( c_s^2 - c_A^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} p_1 + i \left( c_s^2 - c_A^2 \right) k_y p_1 + i c_s^2 k_z p_1 - 2 c_A^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_1, \quad (16)$$

где  $\frac{\partial}{\partial x}$  — проекция вектора кривизны силовой линии магнитного поля на  $x$ -направление, перпендикулярное к магнитным поверхностям,  $p_1$  — масштаб изменения давления плазмы в направлении  $x$ , которое соответствует радиальному направлению от Земли в реальной магнитосфере,  $c_A(x) = k_z c_A(x)$ ,  $c_s = k_z c_s(x)$ ,  $c_T(x) = k_z c_T(x)$ .

Уравнения (13)—(16) справедливы для плазменных объемов с достаточно большим давлением плазмы, например для радиационных поясов Земли.

### РЕЗОНАНСНЫЕ МОДЫ

Выразим в (14) и (15) амплитуды возмущений  $y$  и  $z$  через  $p_1$  и  $x$ :

$$ik_y y = \frac{k_y^2 p_1}{(\omega^2 - \omega_A^2)},$$

$$ik_z z = \frac{k_z^2 \frac{c_s^2}{c_s^2 - c_A^2} p_1 - 2 \frac{c_s^2 c_A^2}{c_s^2 - c_A^2} x}{(\omega^2 - \omega_T^2)}$$

и подставим эти выражения в (16). После некоторых алгебраических преобразований находим

$$p_1 = \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)}{k_y^2 m^2(x)} \frac{x}{x} = \frac{2 x x (\omega^2 - \omega_s^2)}{1 (\omega^2 - \omega_T^2)}, \quad (17)$$

где введено обозначение

$$m^2 = \frac{(\omega_s^2 - \omega^2)(\omega_A^2 - \omega^2)}{(c_s^2 - c_A^2)(\omega_T^2 - \omega^2)}, \quad \frac{c_s^2}{c_A^2}, \quad (18)$$

которое ранее использовалось для описания МГД-возмущений в солнечных магнитных трубках [10, 24, 25]. Подставляя (17) и выражение для  $y$  в (13), получаем дифференциальное уравнение второго порядка для  $x$ :

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)}{k_y^2 m^2} \frac{dx}{dx} \right] - 2 x \frac{d}{dx} x c_A^2 \frac{m^2}{k_y^2 m^2} - (\omega^2 - \omega_A^2) x - 2 p_1 p x x - 4 \frac{c_A^2}{x} x \frac{m^2 \frac{2 k_y^2 c_s^2}{(c_s^2 - c_A^2)(\omega^2 - \omega_T^2)}}{k_y^2 m^2}. \quad (19)$$

С точностью до обозначений уравнение (19) совпадает с уравнением (19) работы [11]. Это обстоятельство говорит о том, что модель радиально-неоднородного плазменного цилиндра и модель дипольного магнитного поля одинаково описывают УНЧ-волны в магнитосферной плазме.

Покажем, что из уравнения (19) следует ряд известных результатов. Из структуры уравнения (19) следует, что при конечных  $k_y$  и  $k_z$  оно имеет сингулярности при  $\omega^2 = \omega_A^2$  и  $\omega^2 = \omega_T^2$  [2, 8]. Появление син-

гулярностей приводит к двум ветвям колебаний с непрерывными спектрами:

$$\begin{aligned} \min[\omega_A^2(x)] &\leq \omega^2 \leq \max[\omega_A^2(x)], \\ \min[\omega_T^2(x)] &\leq \omega^2 \leq \max[\omega_T^2(x)]. \end{aligned}$$

Точки  $x_A$  и  $x_T$ , в которых справедливы соотношения  $\omega^2 = \omega_A^2(x_A)$  или  $\omega^2 = \omega_T^2(x_T)$ , отвечают положениям сингулярных магнитных поверхностей. На этих поверхностях, которые непрерывно заполняют пространство в направлении  $x$ , образуя континуум, МГД-волны аномально поглощаются, и по этой причине они устойчивы. Первое неравенство определяет альвеновский континуум, а второе — касповый.

Числитель в первом слагаемом уравнения (19) определяет резонансные точки, а знаменатель — точки отсечки  $\omega = \omega_A(x)$  и  $\omega = \omega_T(x)$ . В этих точках, как обычно, волна становится нераспространяющейся [2]. При распространении УНЧ-волны с заданной частотой в неоднородной магнитосферной плазме значения частот  $\omega_A$ ,  $\omega_T$  и изменяются, в результате изменяется и вид волны. В случае азимутально-мелкомасштабных УНЧ-возмущений этот вопрос был частично исследован в работе [11].

Если в (19) пренебречь кривизной силовых линий, то оно существенно упростится к виду, часто используемому в работах по солнечной магнитной гидродинамике [8]:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\omega(x)(\omega^2 - \omega_A^2(x))}{k_y^2 m^2(x)} \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{\omega(x)(\omega^2 - \omega_A^2(x))}{k_x} \right) = 0. \quad (20)$$

Для «холодной плазмы» ( $p = 0$ ) из (18) находим

$$m^2 = K^2 - k_z^2, \quad K^2 = \frac{\omega^2}{c_A^2(x)}.$$

В этом случае уравнение (20) принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{B^2(K^2 - k_z^2)}{(K^2 - k_y^2 - k_z^2)} \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{\omega^2}{k_x} \right) = 0. \quad (21)$$

Как было показано в работе [6], уравнение (21) имеет резонансное решение, локализованное вблизи точки  $x_0$ , в которой  $K^2(x_0) = k_z^2$ . Такое решение реализуется только при условии  $k_y = 0$ , поскольку при  $k_y = 0$  в уравнении (21) исчезает резонанс.

Предположим, что плазменная среда является однородной в направлении  $x$ , тогда из (20) получаем хорошо известное дисперсионное уравнение для МГД-волн:

$$(\omega^2 - \omega_A^2) [k_x^4 - \omega^2 k^2 (c_s^2 - c_A^2) - k_z^2 k_x^2 c_s^2 c_A^2] = 0,$$

где  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ . Первая скобка в этом уравнении описывает альвеновские волны, а вторая — быструю и медленную магнитозвуковые волны. В работе [9] было показано, что если в уравнениях (1)–(4)

положить  $p_1 = 0$ , то указанные уравнения описывают альвеновские моды и медленную магнитозвуковую волну. Быстрая магнитозвуковая волна в этом случае отсутствует, что является характерным для замкнутых плазменных систем.

Таким образом, при  $p_1 = 0$  реализуются только собственные магнитосферные моды.

Из приведенного анализа следует, что в случае внешнего воздействия на магнитосферную систему [14, 15], когда  $p_1 \neq 0$ , в ней может реализоваться быстрая магнитозвуковая волна. Последняя может реализоваться только в открытых плазменных системах, которой является магнитосфера.

Таким образом, уравнение (19) описывает магнитосферные МГД-волны, генерируемые внешними воздействиями.

Отметим, что в общем случае решения уравнений (19) и (20) не являются очевидными. К настоящему времени проанализировано лишь несколько частных случаев [10]. Известно, что уравнения (19) и (20) содержат как непрерывные, так и дискретные решения. При соответствующих граничных условиях эти уравнения обычно исследуют численно. Ниже мы сосредоточим свое внимание на случае, для которого можно получить аналитические результаты и который имеет непосредственное отношение к исследованию УНЧ-возмущений с помощью космических аппаратов.

### МОДЫ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ ВБЛИЗИ $\omega_{A \min}$

Поскольку альвеновская частота  $\omega_A$  имеет в магнитосфере Земли характерные минимум и максимум на расстоянии 3-4 радиусов [28], то естественно рассмотреть дискретные моды, лежащие в окрестности минимума (рис. 3). Мотивацией такого рассмотрения является хорошо известный результат [30] о существовании у уравнений вида (19) решений в виде дискретных альвеновских мод с частотами  $\omega_n$  ( $n$  — радиальное квантовое число), лежащих ниже минимума альвеновского непрерывного спектра, т. е.  $\omega_n < (\omega_{A \min})^2$ .

Положим, что в точке  $x_0$  альвеновская частота  $\omega_A$  принимает минимальное значение, т. е.

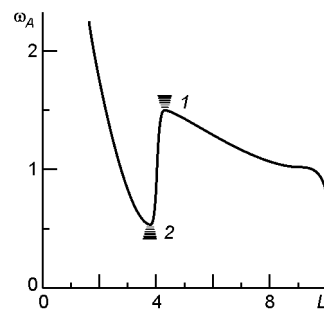


Рис. 3. Зависимость альвеновской частоты от расстояния в экваториальной плоскости ( $L = r/r_E$ ,  $r_E$  — радиус Земли) [28]: 1 — дискретные УНЧ-моды, обнаруженные в работе [12], 2 — дискретные УНЧ-моды, исследованные в данной работе



$$A|_{x_0} = 0, \quad A|_{x_0} = 0.$$

Разложив уравнение (19) вблизи точки  $x_0$  после простых, но достаточно громоздких преобразований, получаем уравнение

$$\frac{d}{dy} (1 - y^2) \frac{d}{dy} r - l^2 (1 - y^2) r - G r = 0. \quad (22)$$

При получении (22) предполагалась радиальная мелкомасштабность возмущений. Здесь использованы обозначения

$$y = \frac{x - x_0}{l}, \quad l^2 = 1 - \frac{2}{A(x_0)},$$

$$l^2 = \frac{2}{A(x_0)} \Big|_{x_0}, \quad k_y^2 = k_y^2, \quad G = \frac{k_y^2 l^2}{k_z^2} (k_x^2 - k_x^2). \quad (23)$$

Выражение для  $l^2$  введено с учетом предположения  $k_y^2 l^2 < A(x_0)$ . Поскольку для рассматриваемых мод справедливо условие  $k_y^2 l^2 \gg 1$ , то величина  $l^2$  будет достаточно большой величиной при  $k_y^2 < A(x_0)$  и будет обращаться в ноль на границе альвеновского континуума ( $k_y^2 = A(x_0)$ ).

Нетрудно убедиться [19], что замена переменных  $y = \text{sh}z$ ,  $r = (\text{ch}z)^{1/2} U(z)$  позволяет представить (22) в виде уравнения Шредингера:

$$\frac{d^2}{dz^2} (E - U(z)) = 0 \quad (24)$$

с потенциалом

$$U(z) = k_y^2 \text{ch}^2 z - (2\text{ch}z)^2 \quad (25)$$

и энергией

$$E = G - 1/4. \quad (26)$$

В результате задача о нахождении дискретных мод свелась к отысканию энергетических уровней в потенциальной яме (25) с граничными условиями для функции вида  $U(z) = 0$ .

В потенциальной яме (25) есть только положительные дискретные уровни энергии, поскольку она существует только при  $k_y^2 > 0$  и удовлетворяет неравенству  $U(z) > 0$ . Следовательно, необходимое условие существования энергетических уровней в потенциале (25) имеет вид

$$G - 1/4 > 0. \quad (27)$$

Неравенство (27) в физических переменных имеет вид

$$k_x^2 > \frac{1}{4} \frac{k_z^2}{k_y^2 l^2} \quad (28)$$

и реализуется только в криволинейном магнитном поле и в плазме с достаточно большим давлением.

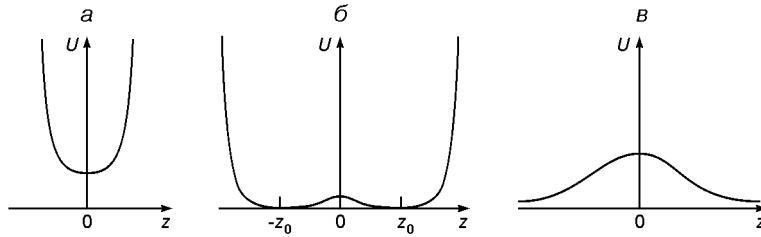


Рис. 4. Вид потенциала (25) в зависимости от значения  $\gamma$ : а —  $\gamma < 1/2$ , б —  $0 < \gamma < 1/2$ , в —  $\gamma = 0$

Неравенство (27) является довольно грубым, поскольку оно не учитывает форму потенциальной ямы. В зависимости от значений величины  $\gamma$  потенциальная яма (25) может принимать два качественно различных вида (см. рис. 4):

- при  $\gamma < 1/2$  потенциал  $U(z)$  имеет единственный минимум  $U(0) = \gamma^2 + 1/4$  в точке  $z = 0$  и монотонно увеличивается с увеличением  $|z|$  (рис. 4, а);
- при  $0 < \gamma < 1/2$  потенциал  $U(z)$  имеет локальный максимум  $U(0) = \gamma^2 + 1/4$  в точке  $z = 0$  и два симметричных минимума  $U(\pm z_0) = \gamma^2 - 1/4$  в точках  $z_0 = \text{Arcch}[(2 - \gamma^2)^{1/2}]$  (рис. 4, б).

В областях  $|z| > z_0$  потенциал  $U(z)$  монотонно увеличивается с увеличением  $|z|$ .

Тогда из очевидного условия  $E > U_{\min}$  получаем оценку для уровней энергии в рассматриваемой потенциальной яме:

$$E > \gamma^2 + 1/4 \quad (0 < \gamma < 1/2), \quad (29)$$

$$E > \gamma^2 - 1/4, \quad (0 < \gamma < 1/2). \quad (30)$$

Неравенство (29) описывает моды с частотами, близкими к частоте альвеновского континуума  $\omega_A(x_0)$ . При  $\gamma = 0$  частота совпадает с  $\omega_A(x_0)$ . Неравенство (30) описывает дискретные моды с частотами, меньшими  $\omega_A(x_0)$ . Если  $\gamma^2 > 1$ , то неравенство (30) описывает дискретную моду с частотой, максимально отстоящей от граничной частоты альвеновского континуума. Из (30) при  $\gamma^2 \gg 1$  получаем  $\omega^2 \sim G$ , откуда находим, что минимально возможная дискретная частота имеет вид

$$\omega_{\min}^2(x_0) \approx 1 - \frac{x}{k_z^2} \left( \frac{p}{x} \right). \quad (31)$$

Покажем, что в интервале  $\omega_{\min} < \omega_A(x_0)$  лежит бесконечное множество частот  $\omega_n$  с точкой сгущения на границе альвеновского континуума  $\omega = \omega_A(x_0)$ . Исходим из хорошо известного факта, что в случае квазиклассического движения частицы с энергией  $E$  в потенциальной яме  $U(z)$  размер области движения  $L(E)$  содержит целое

число полупериодов волны де Бройля  $= [E - U(z)]^{1/2}$ . В общем случае зависит от координаты  $z$ , однако для оценки высоколежащих энергетических уровней можно положить  $E_n^{1/2}$ , поскольку для них энергия отсчитывается от дна ямы. Это соображение позволяет записать следующие соотношение для стационарного уровня энергии  $E_n$ :

$$L(E_n) = \frac{n}{2} \frac{n\Gamma}{E_n^{1/2}}. \quad (32)$$

Характерный размер области, в которой может двигаться частица,  $L(E_n) = |L_2 - L_1|$ , где  $L_1$  и  $L_2$  — точки поворота, определяемые из уравнения

$$E_n = U(z = L_1, L_2). \quad (33)$$

Решая уравнение (33), находим

$$L(E_n) = \begin{cases} \ln(E_n / \dots), & 1/2, \\ 2 \ln(E_n^{1/2} / \dots), & 1/2. \end{cases} \quad (34)$$

Подставляя (34) в (32) и используя для энергии явное выражение (26), получаем

$$\begin{aligned} & (G - 1/4) \exp \frac{n}{(G - 1/4)^{1/2}}, & 1/2, \\ & (G - 1/4)^2 \exp \frac{2n}{(G - 1/4)^{1/2}}, & 1/2. \end{aligned} \quad (35)$$

Отметим, что при больших значениях  $n$  значение  $\frac{2}{n}$  экспоненциально стремится к нулю.

Таким образом, имеется счетная бесконечность собственных значений с точкой сгущения  $= 0$  ( $\dots_A(x_0)$ ), причем отношение последовательных собственных значений

$$\begin{aligned} & \exp \frac{n}{(G - 1/4)^{1/2}}, & 1/2, \\ & \exp \frac{2n}{(G - 1/4)^{1/2}}, & 1/2 \end{aligned} \quad (36)$$

не зависит от  $n$ .

Заметим, что в случае  $0$ , стенка потенциальной ямы (25) удаляется на бесконечность. Известно, что в бесконечно широкой потенциальной яме уровни энергии стремятся ко дну ямы, что в нашем случае соответствует условию  $G = 1/4$ . Видно, что уравнение (35) содержит этот результат. При  $= 0$  ( $\dots_A(x_0)$ ) потенциал превращается в потенциальный барьер (см. рис. 4, в), в котором уровни энергии отсутствуют.

Полученные выше результаты хорошо согласуются с результатами более аккуратных расчетов, приведенных в работе [16, 19].

Остановимся на собственных функциях дискретных мод. Начнем рассмотрение с радиальной структуры и мод с минимальной частотой. С увеличением потенциальная яма (25) сужается, и при достаточно больших значениях ( $\gg 1$ ) ее форма стремится к параболической, характерной для гармонического осциллятора. Это обстоятельство позволяет предположить, что спектр низколежащих уровней практически совпадает со спектром квантовомеханического осциллятора. Разложив потенциал (25) в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$ , приходим к задаче об определении уровней энергии гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2}{dz^2} [z^2] = 0, \quad (37)$$

где

$$G = \frac{1}{2} \mu^2 z^2 + \frac{1}{4} \mu^2.$$

Из (37) находим выражение для уровней энергии в случае  $\mu^2 \gg 1$  в виде

$$E_n = 2n + 1,$$

или

$$G_n = \frac{1}{2} \mu^2 (2n + 1) + \frac{1}{4} \mu^2. \quad (38)$$

Уровни энергии (38) согласуются с ранее полученным результатом (29) для нижнего уровня ( $n = 0$ ). Собственные функции в этом случае с точностью до замены  $s = z$  совпадают с функциями (20).

Из общих свойств уравнения Шредингера следует, что для энергетических уровней, лежащих выше дна потенциальной ямы, собственные функции должны иметь вид синусоид в окрестности  $z = 0$  и экспоненциально убывающих функций при  $z \rightarrow \infty$ . Рассмотрим в качестве примера случай  $G = -1/4 \gg -1/2, 1/4$ . Поскольку в этом предположении потенциальная яма (25) симметрична относительно точки  $z = 0$ , то достаточно ограничиться решением на интервале  $(0, \infty)$ .

В области  $z < 1$  уравнение (24) упрощается и приводится к следующему виду:

$$\frac{d^2}{dz^2} z^2 = 0, \quad G = \frac{1}{4}. \quad (39)$$

Очевидно, что линейно независимыми решениями этого уравнения будут функции

$$f_1 = (\cos z, \sin z). \quad (40)$$

В случае, когда  $\exp z \gg 1$ , уравнение (24) принимает вид

$$\frac{d^2}{dz^2} z^2 = \frac{1}{4} \exp(2z) = 0. \quad (41)$$

В качестве решения (41), убывающего при  $z \rightarrow +\infty$ , необходимо взять функцию Бесселя второго рода с мнимым порядком (см. Приложение 2):

$$H_{iz}^{(2)} \sim \frac{K_{iz}}{2} \exp z. \quad (42)$$

Сшивая решения (40) и (42) в области  $1 < \exp(2z) < 2^2 / \epsilon^2$ , получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\epsilon^2 (16 / e^2) \exp[ (n - 1/2) / \epsilon ]. \quad (43)$$

где константа  $e$  — основание натурального логарифма.

Сравнение дисперсионного соотношения (43) с первым соотношением ( $\epsilon > 1/2$ ) в (35), полученным из качественного анализа в квазиклассическом приближении, показывает, что они практически совпадают. Отличие состоит лишь в постоянном предэкспоненциальном множителе. Проведенное рассмотрение подтверждает наши соображения о виде собственных функций для дискретных мод, лежащих внутри интервала  $x_{\min}^2 \leq x^2 \leq x_A^2(x_0)$ .

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе получены следующие результаты:

- показано, что использованная в работах [11, 12] модель радиально-неоднородного плазменного цилиндра адекватно описывает УНЧ-возмущения в магнитосфере Земли;

- получено уравнение малых колебаний (19) для УНЧ-мод. Показано, что это уравнение учитывает быструю магнитозвуковую волну, что является характерным для открытой магнитосферной системы;

- установлено, что появление быстрой магнитозвуковой волны в магнитосферной плазме приводит к генерации альвеновских волн с дискретным спектром. Этот результат подтверждает результат работы [12], в которой было показано, что такие моды генерируются вблизи максимума альвеновской частоты.

В данной работе показано, что дискретные альвеновские моды генерируются также вблизи минимума альвеновской частоты.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

**Вывод уравнения (5).** В работах по магнитной гидродинамике в плазменных системах с магнитными поверхностями обычно (см., например, работу [9]) вектор смещения элементарного объема плазмы представляется в виде

$$\vec{r} = \frac{a}{|a|^2} \frac{[\vec{B}, a]}{B^2} + \frac{\vec{B}}{B^2}, \quad (\text{П1.1})$$

где функция  $a$ , называемая меткой магнитной поверхности, удовлетворяет условию

$$\vec{B} \cdot a = 0. \quad (\text{П1.2})$$

Поскольку дипольное магнитное поле имеет вид

$$\vec{B} = [ \quad ], \quad (\text{П1.3})$$

где  $\Phi$  — полоидальный магнитный поток,  $\alpha$  — восточная геомагнитная долгота, то из уравнений (П1.2) и (П1.3) следует, что в качестве метки магнитной поверхности удобно выбрать полоидальный магнитный поток, т. е. положить

$$a = \Phi. \quad (\text{П1.4})$$

Из (П1.1), (П1.3) и (П1.4) получаем равенство

$$-\frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} = \frac{[\Phi]}{|\vec{B}|^2} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{B^2}. \quad (\text{П1.5})$$

Видно, что уравнение (П1.5) полностью совпадает с уравнением (5).

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

**Решение (42) и его свойства.** Покажем, что уравнение (41) имеет решение (42). Введём переменную

$$x = \frac{z}{2} \exp(z). \quad (\text{П2.1})$$

Тогда

$$\frac{d}{dz} = \frac{dx}{dz} \frac{d}{dx} = x \frac{d}{dx}. \quad (\text{П2.2})$$

В результате уравнение (41) принимает вид

$$x^2 \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} [(i^2 - x^2)] = 0. \quad (\text{П2.3})$$

Полученное уравнение удобно переписать в виде

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} x \frac{d}{dx} [(i^2 - x^2)] = 0. \quad (\text{П2.4})$$

Модифицированные функции Бесселя являются решениями дифференциального уравнения вида

$$y^2 \frac{d^2 W}{dy^2} + y \frac{dW}{dy} - [p^2 - y^2]W = 0. \quad (\text{П2.5})$$

Фигурирующие в уравнении (П2.5) величины  $y$  и  $y^2$  могут быть любыми числами, в том числе и комплексными [1]. Убывающее при  $y$  решение уравнения (П2.5) выражается через модифицированную функцию Бесселя

$$W = K_m(y). \quad (\text{П2.6})$$

Из (П2.4) — (П2.6) получаем решение (42):

$$K_i = \frac{1}{2} \exp z. \quad (\text{П2.7})$$

В области  $(p^2 - x^2) \exp z < 0$  решение (П2.7) имеет асимптотику (см. работу [1])

$$K_{ip}(x) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{p^2 - x^2}} e^{-p/2} \sum_{m=0}^{\infty} 2^m b_m \left(\frac{x}{p}\right)^m \sin \frac{m}{2} p \text{Arch} \frac{p}{x} \sqrt{p^2 - x^2} - \frac{1}{4},$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{8} - \frac{5}{24} \frac{x^2}{p^2}. \quad (\text{П2.8})$$

Асимптотика (П2.8) была использована нами при получении дисперсионного уравнения (43). Мы также использовали при получении этого дисперсионного уравнения равенство

$$\text{Arch} \frac{p}{x} = \ln \frac{2p}{x},$$

справедливое при  $p \gg x$ .

Работа поддержана Целевой комплексной программой НАН Украины по физике плазмы (С. О. Черемных) и Целевой комплексной программой НАН Украины по космическим исследованиям (И. Т. Жук).

1. Бейтман Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1974.—296 с.
2. Гуссенс М. Магнитогидродинамическая волна и волновой нагрев неоднородной плазмы // Космическая магнитная гидродинамика / Под ред. Э. Приста, А. Худда. — М.: Мир, 1995.—С. 144—178.
3. Климушкин Д. Ю. Пространственная структура азимутально-мелкомасштабных гидромагнитных волн в аксиально-симметричной магнитосфере с конечным давлением плазмы // Физика плазмы.—1997.—**23**, № 10.—С. 931—944.
4. Ладиков-Роев Ю. П., Черемных С. О. О распределении плазменного давления в экваториальной области магнитосферы земли // Космічна наука і технологія.—2010.—**16**, № 1.—С. 86—89.

5. Мазур Н. Г., Федоров Е. Н., Пилипенко В. А. Дисперсионное соотношение для баллонных мод и условие их устойчивости в околоземной плазме // Геомагнетизм и аэронавигация.—2012.—**52**.—С. 1—10.
6. Нишида А. Геомагнитный диагноз магнитосферы. — М.: Мир, 1980.—306 с.
7. Парновский А. С., Черемных О. К. Спектр баллонных возмущений с произвольной поляризацией во внутренней магнитосфере Земли // Космічна наука і технологія.—2006.—**12**, N 1.—Р. 49—56.
8. Прист Э. Р. Солнечная магнитогидродинамика. — М.: Мир, 1985.—589 с.
9. Пустовитов В. Д., Шафранов В. Д. Равновесие и устойчивость плазмы в стеллараторах // Вопросы теории плазмы.—1987.—Вып. 15.—С. 146—293.
10. Робертс Б. Магнитогидродинамические волны на Солнце // Космическая магнитная гидродинамика / Под ред. Э. Приста, А. Худа. — М.: Мир, 1995.—С. 112—143.
11. Черемных О. К., Климушкин Д. Ю., Костарев Д. В. О структуре азимутально-мелкомасштабных УНЧ-колебаний горячей космической плазмы в кривом магнитном поле. Моды с непрерывным спектром // Кинематика и физика небес. тел.—2014.—**30**, № 5.—С. 3—21.
12. Черемных О. К., Климушкин Д. Ю., Магер П. Н. О структуре азимутальных мелкомасштабных УНЧ-колебаний горячей космической плазмы в кривом магнитном поле. Моды с дискретным спектром // Кинематика и физика небес. тел.—2016.—**32**, № 3.—С. 26—39.
13. Черемных С. О. О поляризации поперечно-мелкомасштабных МГД-мод в магнитосфере Земли // Космічна наука і технологія.—2013.—**19**, № 4.—С. 57—64.
14. Agapitov O., Cheremnykh O. Magnetospheric ULF waves driven by external sources // arXiv preprint arXiv: 1512. 00919.—2015.
15. Agapitov O., Cheremnykh O. Natural oscillations of the Earth magnetosphere associated with solar wind sudden impulses // Ukrayins'kij Fyzichnij Zhurnal.—2008.—**53**, N 5.—P. 506—510.
16. Andrushchenko Zh. N., Cheremnykh O. K., Edenstrasser J. W. Global Alfvén eigenmodes in a stellarator with trapped energetic particles // Phys. Plasmas.—1999.—**6**, N 6.—P. 2462—2471.
17. Burdo O. S., Cheremnykh O. K., Verkhoglyadova O. P. Study of ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth // Izvestiya Akad. Nauk. Ser. Fizicheskaya.—2000.—**64**, N 9.—P. 1896—1900.
18. Cheng C. Z. Magnetospheric equilibrium with anisotropic pressure // J. Geophys. Res.—1992.—**97A**, N 2.—P. 1497—1510.
19. Cheremnykh O. K., Revenchuk S. M. Dispersion relations for the Suydam problem // Plasma Phys. and Contr. Fusion.—1992.—**34**, N 1.—P. 55—75.
20. Cheremnykh O. K., Parnowski A. S. Flute and ballooning modes in the inner magnetosphere of the earth: stability and influence of the ionospheric conductivity // Space science: New research / Ed. by S. N. Maravell. — New York: Nova Science Publishers Inc., 2006.—P. 78—108.
21. Cheremnykh O. K. Transversally small-scale perturbations in arbitrary plasma configurations with magnetic surfaces // Plasma Phys. and Contr. Fusion.—2010.—**52**, N 9.—095006.
22. Cheremnykh O. K., Danilova V. Transversal small-scale MHD perturbations in space plasma with magnetic surfaces // Kinematics and Physics of Celestial Bodies.—2011.—**27**.—P. 98—108.
23. Cheremnykh S. O., Agapitov O. V. MHD waves in the plasma system with dipole magnetic field configuration // Adv. Astron. and Space Phys.—2012.—**2**.—P. 103—106.



24. *Edwin P. M., Roberts B.* Wave propagation in a magnetic cylinder // *Solar Phys.*—1983.—**88**.—P. 179—191.
25. *Erdelyi R., Fedun V.* Linear MHD sausage waves in compressible magnetically twisted flux tubes // *Solar Phys.*—2007.—**246**.—P. 101—118.
26. *Hameiri E., Kivelson M. G.* Magnetospheric waves and atmosphere — ionosphere layer // *J. Geophys. Res.*—1991.—**96A**, N 12.—P. 21125—21134.
27. *Hameiri F., Laurence P., Mond M.* The ballooning instability in space plasmas // *J. Geophys. Res.*—1991.—**96A**, N 2.—P. 1513—1518.
28. *Leonovich A. S., Kozlov D. A., Pilipenko A.* Magnetosonic resonance in dipole-like magnetosphere // *Ann. Geophys.*—2006.—**24**.—P. 2277—2289.
29. *Mager P. N., Klimushkin D. Yu., Pilipenko A., Schäfer S.* Field-aligned structure of poloidal Alfvén waves in a finite pressure plasma // *Ann. Geophys.*—2009.—**27**.—P. 3875—3882.
30. *Mahajan S. M., Ross D. W., Chen G. L.* Discrete Alfvén spectrum in magnetohydrodynamics // *Phys. Fluids.*—1983.—**26**, N 8.—P. 2195—2199.

Статья поступила в редакцию 28.04.16