УДК 519.5:681:513

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ И НАХОЖДЕНИЯ ВЕСОВ ОБЪЕКТОВ В МЕТОДЕ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

А.А. ПАВЛОВ, Е.И. ЛИЩУК, В.И. КУТ

Анализируется проблема нахождения весов объектов (альтернатив, критериев) по матрицам парных сравнений, используемых в методе анализа иерархий Саати. Предлагаются и обосновываются критерии эффективности и соответствующие конструктивные математические модели оптимизации нахождения весов для согласованных и несогласованных матриц парных сравнений.

ВВЕДЕНИЕ

Ключевой проблемой при решении задачи многокритериального выбора с помощью метода анализа иерархий является нахождение весов $w_1,...,w_n$ объектов $A_1,...,A_n$ (альтернатив, критериев) по отношению к некоторому свойству, цели (критерию). Веса определяются по эмпирической матрице парных сравнений $(\gamma_{ij})_1^n$, задаваемой экспертом (экспертами). Число γ_{ij} задается экспертом и показывает во сколько раз вес объекта A_i больше веса объекта A_j по отношению к заданной цели (критерию). Эксперт задает лишь $\frac{n(n-1)}{2}$ коэффициентов γ_{ij}, так как $\gamma_{ij}=\frac{1}{\gamma_{ji}}$, а на главной диагонали матрицы парных сравнений (МПС) стоят единицы.

В идеальном варианте $\gamma_{ij}=\frac{w_i}{w_j}$, и тогда МПС является полностью согласованной.

Для этого случая Саати [1–3] показал, что в качестве весов w_j $j=\overline{1,n}$ можно использовать компоненты собственного вектора МПС, соответствующего максимальному характеристическому числу $\lambda_{\max}$ матрицы. К сожалению, реальные МПС в силу возможной противоречивости проявлений свойств объектов $A_1,...,A_n$, а также влияния на эксперта разнообразных психофизиологических факторов, обычно не являются полностью согласованными.

Этот факт и порождает проблему нахождения весов $w_i,\ i=\overline{1,n}$ по несогласованной МПС. Известные подходы решения этой проблемы условно можно разбить на следующие группы.

1. Введение порога согласованности МПС (обычно эмпирически). Если этот порог не превышается, то предлагаются разнообразные методы нахождения весов [2–6], которые, в конечном счете, приводят к близким результатам. Найденные веса не являются следствием решения оптимизационной задачи.

2. Улучшения согласованности МПС, основанные на получении уточняющей информации от эксперта [4, 8].

3. Получение формально полностью согласованной матрицы парных сравнений. Наиболее общие результаты в этом направлении получены В.Д. Ногиным [7].

Известно [4], что по любой строке МПС можно построить полностью согласованную матрицу (отличную от исходной). В.Д. Ногин [7] определил все возможные минимальные наборы коэффициентов МПС, по которым восстанавливаются полностью согласованные матрицы (в общем случае не совпадающие с исходной). Таким образом, третья группа методов использует для нахождения весов не всю информацию, содержащуюся в эмпирической МПС.

Принятие решений методом анализа иерархий на основе эмпирических МПС является классическим примером органичного объединения качественных и количественных подходов для достижения количественного результата. Методы такого рода, применяемые для решения конкретных практических задач, должны предлагать альтернативные формальные модели для получения количественного результата в предположении, что одна из них наиболее адекватно отображает суть решаемой конкретной практической задачи. Таким образом, различные подходы к оценке весов объектов по эмпирическим МПС должны не противоречить, а дополнять друг друга, расширять область практического применения метода анализа иерархий на основе МПС.

В данной статье авторы предлагают и обосновывают критерии и эффективные модели оптимизации для нахождения весов объектов по эмпирическим МПС, которые базируются на следующих посылках.

Все эмпирические коэффициенты $\gamma_{ij}\ (\gamma_{ji}=\dfrac{1}{\gamma_{ij}})$ МПС с той или иной степенью достоверности содержат информацию о весах $w_i,\ i=\overline{1,n}$ объектов. Следовательно, все коэффициенты МПС $\gamma_{ij}\,(\gamma_{ji}=\dfrac{1}{\gamma_{ij}})$ должны использоваться для нахождения весов $w_i,\ i=\overline{1,n}$ объектов.

Примечание. Предполагается, что все возможные итерационные процедуры уточнения мнения эксперта (экспертов) при заполнении МПС уже проведены.

4. Не вызывает сомнений, что хорошо согласованные МПС соответствуют случаю наиболее эффективного применения на практике метода ана-

лиза иерархий. Тем не менее, реальные МПС часто являются плохо согласованными. Но и в этих случаях задача принятия решений должна быть решена, а результат обоснован.

5. Для весов, полученных по плохо согласованной МПС, должны быть введены меры их согласованности, минимизация которых позволит сформулировать математические модели нахождения весов объектов по эмпирическим МПС.

В качестве исходных данных для построения и обоснования критериев и моделей оптимизации для нахождения весов $w_i,\ i=\overline{1,n}$ используется множество A коэффициентов $\gamma_{ij},\ i,j=\overline{1,n}$ МПС, удовлетворяющих условиям

1. $\{\gamma_{ii},\ i=\overline{1,n}\}\subset A$.
2. $\forall\, i\neq j\ \gamma_{ij}\in A$, если $\gamma_{ij}\geq 1,\ \gamma_{ji}\overline{\in}A$.

Условие « A содержит $\gamma_{ij}\geq 1$» вводится для большей устойчивости решений моделей оптимизации, рассматриваемых ниже.

Если матрица парных сравнений является полностью согласованной, то для

$$\frac{w_i}{w_j}=\gamma_{ij},\quad w_i=\gamma_{ij}w_j\quad \forall\,\gamma_{ij}\in A\,.$$

Тогда в качестве меры согласованности $\frac{w_i}{w_j}$ и γ_{ij} можно использовать

$$(w_i-\gamma_{ij}w_j)^2\ \text{ либо }\ \left|w_i-\gamma_{ij}w_j\right|, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\gamma_{ij}^2}\left(\frac{w_i}{w_j}-\gamma_{ij}\right)^2\ \text{ либо }\ \frac{1}{\gamma_{ij}}\left|\frac{w_i}{w_j}-\gamma_{ij}\right|. \tag{2}$$

Меры (2) являются более логичными. Однако их непосредственное использование приводит к задачам нелинейного программирования, т.е. практически не эффективным математическим моделям. В некоторых из приведенных ниже моделей линейного программирования для нахождения весов $w_i,\ i=\overline{1,n}$ удалось использовать меру

$$\frac{1}{\gamma_{ij}}\left|\frac{w_i}{w_j}-\gamma_{ij}\right|.$$

Модель 1.

$$\min_{w_1\ldots w_n}\sum_{(ij)\in|A|}\sum(w_i-\gamma_{ij}w_j)^2\,, \tag{3}$$

$$1\leq a\leq w_i\leq b,\quad i=\overline{1,n}, \tag{4}$$

где $a,\ b$ — заданные числа; $|A|$ — множество пар (ij), каждая из которых является индексом при всех $\gamma_{ij}\in A$.

Задача (3), (4) — задача выпуклого квадратичного программирования. По модели 1 весовые коэффициенты находятся вне зависимости от степени согласованности матрицы парных сравнений. Интегральная мера согласованности найденного решения w_i^*, $i=\overline{1,n}$ равна

$$\sum\sum_{(ij)\in|A|}(w_i^* - \gamma_{ij} w_j^*)^2 .$$

Коэффициенты согласованности $K(w_i^*)$ весовых коэффициентов w_i^* имеют вид

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{\gamma_{ij}} \left| \frac{w_i^*}{w_j^*} - \gamma_{ij} \right| . \tag{5}$$

Если для некоторого j $\gamma_{ij} < 1$, то соответствующее слагаемое в (5) заменяется на $\frac{1}{\gamma_{ji}} \left| \frac{w_j^*}{w_i^*} - \gamma_{ji} \right|$. Иными словами, коэффициент согласованности $K(w_i^*)$ для w_i^* определяется по $\gamma_{ij} \geq 1$.

Модель 2.

$$\min_{w_1 \dots w_n} \sum\sum_{(ij)\in|A|} \left| w_i - \gamma_{ij} w_j \right| , \tag{6}$$

$$1 \leq a \leq w_i \leq b, \quad i=\overline{1,n}, \tag{7}$$

где a, b — заданные числа.

Модель (6), (7) может быть сведена подстановкой

$$\underset{(i,j)\in|A|}{w_i - \gamma_{ij} w_j} = y_{ij}^+ - y_{ij}^-, \; y_{ij}^+ \geq 0, \; y_{ij}^- \geq 0$$

к следующей модели:

$$\min \sum\sum_{(ij)\in|A|} (y_{ij}^+ + y_{ij}^-) , \tag{8}$$

$$\underset{(i,j)\in|A|}{w_i - \gamma_{ij} w_j} = y_{ij}^+ - y_{ij}^-, \; y_{ij}^+ \geq 0, \; y_{ij}^- \geq 0 , \tag{9}$$

$$1 \leq a \leq w_i \leq b, \quad i=\overline{1,n},$$

где a, b — заданные числа; w_i, y_{ij}^+, y_{ij}^- — переменные задачи линейного программирования — ЛП (8), (9).

На базисных решениях задачи ЛП (8), (9) либо $y_{ij}^+ > 0$, $y_{ij}^- = 0$, либо $y_{ij}^+ = 0$, $y_{ij}^- > 0$, так как если ограничения этой задачи представить в виде матрицы ограничений, то столбцы при y_{ij}^+ и y_{ij}^- являются линейно зависимыми, т.е. в любое допустимое базисное решение входит только один из них (либо y_{ij}^+, либо y_{ij}^-).

Таким образом, $\min \sum_{(ij)\in|A|}\sum (y_{ij}^+ + y_{ij}^-)$ соответствует минимуму функционала (6).

Для задачи ЛП (8), (9) интегральная мера согласованности найденного решения w_i^*, $i=\overline{1,n}$ равна

$$\sum_{(ij)\in|A|}\sum \left| w_i^* - \gamma_{ij} w_j^* \right| ,$$

а мера согласованности весовых коэффициентов w_i, $i=\overline{1,n}$ определяется выражением (5).

Меры согласованности моделей 1 и 2 однотипны. Выбор любой из них определяется практической целесообразностью. У задачи (3), (4) n переменных w_i, $i=\overline{1,n}$, у задачи ЛП (8), (9) переменных $n^2 - n$.

Модель 3.

$$\min y, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} -y \le w_i - \gamma_{ij} w_j \le y , \\ 1 \le a \le \underset{\forall (ij)\in|A|}{w_i} \le b, \quad i=\overline{1,n}, \quad y \ge 0 , \end{gathered} \tag{11}$$

где $a,\ b$ — заданные числа; w_i, w_j, y — переменные задачи ЛП (10), (11).

Решению задачи ЛП (10), (11) соответствуют также веса w_i^*, $i=\overline{1,n}$, для которых

$$\max_{\forall \gamma_{ij}\in A} \left| w_i^* - \gamma_{ij} w_j^* \right|$$

достигает минимально возможного значения.

Модель 4.

Решается задача ЛП (10), (11). Оптимальное значение переменной y обозначим y^0. После этого решается по выбору одна из двух задач:

$$1.\ \min_{w_1 \dots w_n} \sum_{(ij)\in|A|}\sum (w_i - \gamma_{ij} w_j)^2 , \tag{12}$$

$$\begin{gathered} -y^0 \le w_i - \gamma_{ij} w_j \le y^0, \quad \forall (i,j)\in |A|, \\ 1 \le a \le w_i \le b, \quad i=\overline{1,n}, \quad y \ge 0, \end{gathered} \tag{13}$$

где $a,\ b$ — заданные числа.

$$2.\ \min \sum_{(ij)\in|A|}\sum (y_{ij}^+ + y_{ij}^-) , \tag{14}$$

$$\underset{(i,j)\in|A|}{w_i - \gamma_{ij} w_j} = y_{ij}^+ - y_{ij}^-, \quad y_{ij}^+ \ge 0,\ y_{ij}^- \ge 0 ,$$

$$-y^0 \le w_i - \gamma_{ij} w_j \le y^0, \ \forall (i, j) \in |A|, \tag{15}$$

$$1 \le a \le w_i \le b, \ \ i = \overline{1, n},$$

где a, b — заданные числа; w_i, y_{ij}^+, y_{ij}^-, $(i, j) \in |A|$ — переменные задачи (14), (15).

Задачи (12), (13) либо (14), (15) позволяют находить веса w_i^*, $i = \overline{1, n}$, оптимизирующие интегральную меру согласованности (12) либо (14), для которых

$$\max_{\forall \gamma_{ij} \in A} \left| w_i^* - \gamma_{ij} w_j^* \right|$$

достигает минимально возможного значения.

Модель 5 (допустимо согласованное решение).

Как показывалось ранее, наиболее естественной мерой отношения $\dfrac{w_i}{w_j}$ к γ_{ij} является $\dfrac{1}{\gamma_{ij}} \left| \dfrac{w_i}{w_j} - \gamma_{ij} \right|$. Однако ее непосредственное использование приводит к задаче невыпуклого программирования, т.е. не эффективного в практической реализации. Тем не менее, эта мера может быть использована для случая, когда ставится задача нахождения согласованного решения.

Будем считать, что решение w_i^*, $i = \overline{1, n}$ является допустимо согласованным, если выполняется условие

$$\left| \frac{w_i}{w_j} - \gamma_{ij} \right|_{\forall (i,j) \in |A|} \le t_{\text{доп}} \gamma_{ij}, \ \ t_{\text{доп}} \ge 0,$$

где $t_{\text{доп}}$ — заданное пороговое число.

Задание $t_{\text{доп}}$ является обоснованным, ибо величина $\left| \dfrac{w_i}{w_j} - \gamma_{ij} \right|$ мало информативна без учета значения γ_{ij}. Тогда нахождение допустимо согласованных весов w_i, $i = \overline{1, n}$ может быть получено в результате решения следующих задач:

$$\min_{w_1 \ldots w_n} \sum_{(ij)} \sum_{\in |A|} (w_i - \gamma_{ij} w_j)^2, \tag{16}$$

$$1 \le a \le w_i \le b, \ \ i = \overline{1, n},$$

$$-t_{\text{доп}} \gamma_{ij} w_j \le w_i - \gamma_{ij} w_j \le t_{\text{доп}} \gamma_{ij} w_j, \quad \forall (i, j) \in |A| \tag{17}$$

где a, b — заданные числа.

Модель (16), (17) — задача квадратичного программирования.

Либо

$$\min \sum_{(ij)\in|A|} \sum (y_{ij}^{+} + y_{ij}^{-}), \tag{18}$$

$$1 \le a \le w_i \le b, \quad i = \overline{1,n},$$

$$-t_{\text{доп}} \gamma_{ij} w_j \le \underset{\forall (i,j)\in|A|}{w_i - \gamma_{ij} w_j} \le t_{\text{доп}} \gamma_{ij} w_j ,$$

$$w_i - \gamma_{ij} w_j = y_{ij}^{+} - y_{ij}^{-}, \tag{19}$$

$$y_{ij}^{+}, y_{ij}^{-} \ge 0, \quad \forall (i, j) \in |A|,$$

где a, b — заданные числа.

Модель (18), (19) является задачей линейного программирования.

Задачи (16), (17) либо (18), (19) могут не иметь решения, так как ограничения могут быть не совместимы. В этом случае можно либо увеличить $t_{\text{доп}}$, либо решить задачу (10), (11), а затем (12), (13) либо (14), (15). Число

$$t = \max \left\{ \frac{y^0}{\gamma_{ij} w_j^*}, \ (i, j) \in |A| \right\} \tag{20}$$

может быть принятым как допустимый коэффициент согласованности решения w_i^*, $i = \overline{1,n}$ задачи (16), (17) либо (18), (19).

Модель 6.

Может возникнуть ситуация, когда априори ряд объектов i_l, $l = \overline{1,k}$ считается наиболее перспективным и накладывается требование нахождения их весов w_{i_l}, $l = \overline{1,k}$, удовлетворяющих условию допустимой согласованности. Такое решение может быть найдено из следующей задачи линейного программирования:

$$\min y, \tag{21}$$

$$-t_{\text{доп}} \gamma_{i_l j} w_j \le \underset{\forall (i_l, j)\in|A|, \ i=\overline{1,n}, \ l=\overline{1,k}, \ j=\overline{1,n}}{w_{i_l} - \gamma_{ij} w_j} \le t_{\text{доп}} \gamma_{i_l j} w_j . \tag{22}$$

Если $(i_l\, j) \overline{\in} |A|$, то соответствующее ограничение заменяется на

$$-t_{\text{доп}} \gamma_{j i_l} w_{i_l} \le w_j - \gamma_{j i_l} w_{i_l} \le t_{\text{доп}} \gamma_{j i_l} w_{i_l}, \tag{23}$$

$$-y \le w_i - \gamma_{ij} w_j \le y, \ y \ge 0, \ \forall \gamma_{ij} \in A \setminus A_1, \ 1 \le a \le w_i \le b, \quad i = \overline{1,n} \ , \tag{24}$$

где A_1 — множество γ_{ij}, определяющее все ограничения (22) с учетом (23); a, b — заданные числа.

Решение задачи (22)–(24) гарантирует согласованность весов w_{i_l}, $l = \overline{1,k}$ относительно всех объектов. Для остальных весов минимизируется максимальная мера $|w_i - \gamma_{ij} w_j|$, $\forall \gamma_{ij} \in A \setminus A_1$.

ЗАВЕРШАЮЩИЙ ЭТАП

1. Найденные веса w_i^*, $i=\overline{1,n}$ по любой из предложенных моделей (выбирается модель наиболее соответствующая рассматриваемой практической задаче) используются в методе анализа иерархий.

Обоснование. Найденные веса w_i^* наилучшим образом относительно выбранной меры согласованности соответствуют априори не достоверным коэффициентам γ_{ij} эмпирической матрицы парных сравнений. При этом учитывается, что сам метод анализа иерархий является органическим синтезом качественных и количественных подходов.

2. Находятся коэффициенты согласованности w_i^*, $i=\overline{1,n}$

$$K(w_i^*)=\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{\left|w_i^*-\gamma_{ij}w_j^*\right|}{\gamma_{ij}w_j^*}.$$

Если $\gamma_{ij}\overline{\in}A$, то соответствующее слагаемое заменяется на $\frac{\left|w_j^*-\gamma_{ji}w_i^*\right|}{\gamma_{ji}w_i^*}$. Далее веса w_i^* уменьшаются в зависимости от величины $K(w_i^*)$. Например, веса w_i^* уменьшаются обратно пропорционально величине $K(w_i):\frac{1}{K(w_i^*)}w_i^*$, после чего производится стандартная нормировка: $\hat{w}_i^*=\frac{w_i^*}{K(w_i^*)\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^*}{K(w_i^*)}}$. Либо (упрощенный вариант) веса остаются без изменений, если $K(w_i^*)$ принадлежит заданному допустимому интервалу согласованности, в противном случае весовые коэффициенты принимаются равными нулю, т.е. соответствующий весовой коэффициент w_i^* считается недостоверным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании посылки о том, что все эмпирические коэффициенты матрицы парных сравнений (хорошо либо плохо согласованной) содержат информацию о весовых коэффициентах объектов (альтернатив, критериев), вводятся интегральные меры согласованности весовых коэффициентов w_i, $i=\overline{1,n}$, минимизация которых позволяет сформулировать математические модели линейного либо квадратичного программирования нахождения весовых коэффициентов объектов (альтернатив, критериев). При этом реализуется возможность (если она существует) получения весов w_i, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяющих заданному ограничению на величину введенного и обоснованного коэффициента их согласованности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saaty T.L.* Multycriteric Decision Making. The Analytic Hierarchy Process. — New York: McGraw Hill International, 1980. — 300 p.
2. *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. Организация систем / Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе. Под ред. И.А. Ушакова. — М.: Радио и связь, 1991. — 223 с.
3. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий: Tomas Saaty. The Analytic Hierarchy Process / Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе. — М.: Радио и связь, 1993. — 315 с.
4. *Тоценко В.Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. — Киев: Наук. думка, 2002. — 381 с.
5. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятие решений. — М.: Логос, 2000. — 200 с.
6. *Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике. — М: Финансы и статистика. — 2001. — 257 с.
7. *Ногин В.Д.* Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. — 2004. — **44**, № 7. — С. 1259–1268.
8. *Основы* системного анализа и проектирования АСУ: Учеб. пособие / А.А. Павлов, С.Н. Гриша, В.Н. Томашевский и др. Под общ. ред. А.А. Павлова. — Киев: Выща шк., 1991. — 367 с.

Поступила 27.12.2006