

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАЛЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ ВБЛИЗИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Д.Л. Водопьянов, В.В. Гоженко*, Ю.С. Гончарук,
Л.Г. Гречко, Н.Г. Шкода

*Институт химии поверхности Национальной академии наук Украины
ул. Генерала Наумова 17, 03164, Киев-164*

**Национальный авиационный университет
просп. Космонавта Комарова, 1, 03058, Киев-58*

Решена задача взаимодействия электромагнитного излучения с ансамблем малых частиц вблизи плоской поверхности (поверхность твердых тел и т.д.). Детально изучен случай малой частицы над поверхностью, рассчитана поляризуемость частицы во внешнем электрическом поле с учетом мультипольного взаимодействия ее с поверхностью. Проанализирован частотный спектр поверхностных возбуждений в частице при учете ее дипольного взаимодействия с поверхностью. Результаты получены в электростатическом приближении.

The problem on the interaction of electromagnetic radiation with an ensemble of small particles near to flat surfaces (surfaces of solids, interfaces, surfaces of biological membranes, etc.) is solved. The case of a small particle over a surface is examined in detail. The polarizability of a particle in an external electric field with accounting multipole interactions with the surface is calculated. The frequency spectrum of superficial excitations in the particle is analyzed with account of dipole interactions with the surface. The results are obtained within an electrostatic approximation.

Введение

При изучении процессов взаимодействия электромагнитного излучения с системой частиц вблизи произвольных поверхностей (поверхность твердой или жидкой фазы, биологические мембраны, границы раздела фаз и т. д.) удобно начинать с рассмотрения самой простой модельной системы, аппроксимируя частицы шарами соответствующего размера. Для достаточно малых (по сравнению с длиной волны излучения) частиц взаимодействия их с искривленными поверхностями с большим радиусом кривизны происходит почти так же, как и с плоской поверхностью эквивалентного диэлектрика. Поэтому следует ожидать, что модель шаров вблизи плоской подкладки будет неплохо описывать (хотя бы в первом приближении) электродинамические свойства реальной системы «частицы – поверхность». Такая модель является полезной при исследовании разнообразных реальных систем: матричных дисперсных систем (МДС) со сферическими включениями различной природы, коллоидов, частиц вблизи поверхности биологических мембран и т. п.

Исследования в этой области в первую очередь стимулируются возможностью создания на основе таких систем различных материалов с прогнозируемыми оптическими свойствами, а также возможностью исследования их структуры с помощью оптической спектроскопии поглощения и рассеивания излучения. Отметим, что такие мате-

риалы имеют свойства, что могут значительно отличаться от свойств материалов, использованных для формирования МДС [1, 2].

В теоретических исследованиях МДС рассматривается обычно как бесконечная система. В данной работе взято во внимание влияние граничной поверхности МДС, а именно: МДС рассматривается как полубесконечная система с плоской поверхностью, что разделяет полупространство, заполненное МДС, от полупространства, заполненного однородным диэлектриком. Такой поверхностью раздела могут быть и биологические мембраны. Сама же МДС состоит из однородной диэлектрической матрицы со сферическими включениями разных размеров, которые расположены случайным образом. Биологическим примером рассмотренной МДС является электролитическая среда снаружи клетки с растворенными в ней биологически активными малыми частицами, например, диоксида кремния. Частным случаем рассматриваемых систем является монослой сфер на подкладке (на поверхности биологической мембраны).

Данная работа является продолжением наших работ [3, 4] и посвящена изучению особенностей процессов поглощения и рассеяния электромагнитного излучения малой частицей вблизи поверхности твердого тела. Рассмотрение проведено в электростатическом приближении [1, 4], то есть длина волны внешнего излучения значительно больше размеров частицы и их расстояния от поверхности.

Общая теория

Рассмотрим полубесконечную МДС, которая заполняет полупространство и складывается из диэлектрических сфер разных диаметров, расположенных в однородном диэлектрике (см. рис. 1). Другое полупространство заполнено однородным диэлектриком – подкладкой [4]. Вся система находится во внешнем электрическом поле, пропорциональном $e^{i\omega t}$. Пусть $\varepsilon_a(\omega)$, $\varepsilon_s(\omega)$ и $\varepsilon_i(\omega)$ – диэлектрические функции диэлектрика МДС, подкладки и i -ой сферы соответственно, а R_i – радиус i -ой сферы.

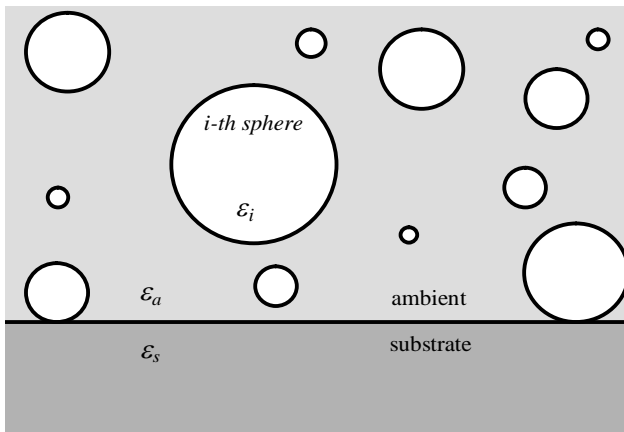


Рис. 1. Модельная система малых сферических частиц, которые находятся вблизи полубесконечной подкладки.

Дальше рассматривается случай, когда длина волны внешнего поля намного больше размеров сфер и расстояние между ними. В этом случае мы можем пользоваться электростатическим приближением и искать потенциал результирующего электрического поля как решение уравнения Лапласа

$$\Delta\psi(\mathbf{r})=0 \quad (1)$$

в трех областях: I – внутри МДС (вне сфер), II – внутри сфер, III – внутри подкладки. Это решение должно удовлетворять также стандартным граничным условиям:

$$\psi_i = \psi_j, \quad \varepsilon_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n_i} = \varepsilon_j \frac{\partial \psi_j}{\partial n_j} \quad (i, j \Rightarrow \text{I, II, III}) \quad (2)$$

на поверхностях раздела фаз. Исходя с принципа суперпозиции и пользуясь мультипольным разложением потенциала, будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\begin{aligned} \psi^I &= \psi_{ext}^I + \sum_i \psi_{i-th\ sphere}^I + \psi_{substrate}^I = \\ &= -\mathbf{E}_0 \mathbf{r} + \sum_{ilm} A_{ilm} F_{lm}(\mathbf{c}_i) + \sum_{ilm} A'_{ilm} F_{lm}(\mathbf{c}'_i) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\psi_i^{II} = \sum_{lm} B_{ilm} G_{lm}(\mathbf{c}_i) ; \quad (4)$$

$$\psi^{III} = \psi_{ext}^{III} + \psi_{induced}^{III} = -\mathbf{E}'_0 \mathbf{r} + \psi_0^{III} + \sum_{ilm} C_{ilm} F_{lm}(\mathbf{c}'_i) ; \quad (5)$$

где $\psi_{ext}^I = -\mathbf{E}_0 \mathbf{r}$ – потенциал внешнего поля \mathbf{E}_0 в области I,

$\psi_{ext}^{III} = -\mathbf{E}'_0 \mathbf{r} + \psi_0^{III}$ – то же, но внутри подкладки,

\mathbf{E}'_0 – напряженность внешнего поля внутри подкладки ($\mathbf{E}'_0 \neq \mathbf{E}_0$ вследствие "преломления" силовых линий на границе подкладки),

ψ_0^{III} – постоянный вклад в потенциал ψ_{ext}^{III} , связанный с выбором начала координат,

$\psi_{i-th\ sphere}^I = \sum_{ilm} A_{ilm} F_{lm}(\mathbf{c}_i)$ – вклад в потенциал ψ^I , обусловленный полем индуцированных зарядов i -ой частицы,

$\psi_{substrate}^I = \sum_{ilm} A'_{ilm} F_{lm}(\mathbf{c}'_i)$ – вклад индуцированных зарядов подкладки,

$\psi_{induced}^{III} = \sum_{ilm} C_{ilm} F_{lm}(\mathbf{c}'_i)$ – вклад в потенциал ψ^{III} , обусловленный индуцированными зарядами всех шаров и подкладки вместе,

$F_{lm}(\mathbf{r}) \equiv r^{-l-1} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ и $G_{lm}(\mathbf{r}) \equiv r^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ – сферические гармоники, регулярные, соответственно, на бесконечности и в нуле [5, 6],

$Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ – сферическая функция, нормированная стандартным образом [16, 17]

$\hat{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{r}/r$ – единичный вектор в направлении \mathbf{r} ,

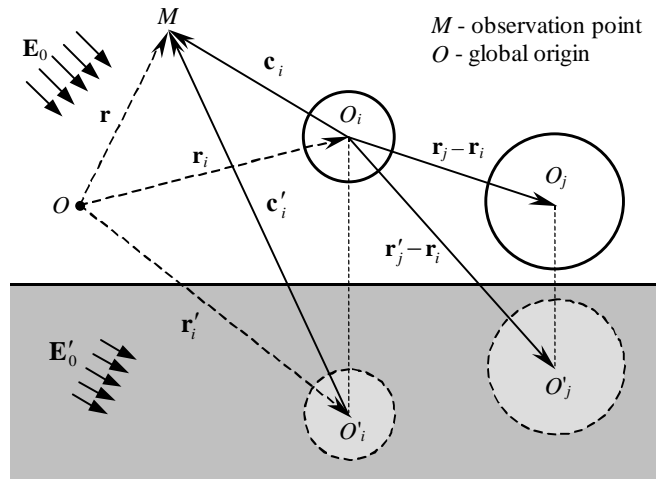


Рис. 2. Частицы, их изображения и векторное описание системы.

$\mathbf{c}_i \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ – радиус-вектор точки наблюдения относительно центра i -ого шара (см. рис. 2),

$\mathbf{c}'_i \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'_i$ – радиус-вектор этой же точки, но относительно центра изображения i -ого шара,

\mathbf{r}_i – радиус-вектор центра i -ого шара,

\mathbf{r}'_i радиус-вектор центра изображения i -ого шара, суммирование по $l \rightarrow \overline{1, \infty}$, а по $m \rightarrow -l, \dots, 0, \dots, l$.

Каждый из отдельных членов в уравнениях (3)–(5) автоматически удовлетворяет уравнению Лапласа (1), поэтому неизвестные величины A_{ilm} , A'_{ilm} , B_{ilm} , C_{ilm} , \mathbf{E}'_0 та ψ_{ext}^{III} могут быть найдены после использования к разложениям (3)–(5) только граничных условий (2), что приводит к уравнениям [4, 7, 8]

$$\begin{cases} \mathbf{E}'_0^{\parallel} = \mathbf{E}_0^{\parallel} \\ E'_{0z} = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_s} E_{0z} \\ \psi_0^{III} = \Delta \mathbf{E}_0^{\perp} \cdot \mathbf{r}^{\perp} = \left(1 - \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_s}\right) E_{0z} h_0 \\ A'_{ilm} = (-1)^{l+m} \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_s}{\varepsilon_a + \varepsilon_s} A_{ilm} \\ C_{ilm} = \frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_a + \varepsilon_s} A_{ilm} \end{cases}$$

И уравнения для коэффициентов A_{lmi} :

$$\begin{cases} \sum_{ilm} \left\{ \delta_{jl_1 m_1}^{ilm} + K_{jl_1 m_1}^{ilm} \right\} A_{ilm} = U_{jl_1 m_1} \\ B_{ilm} = f(A_{ilm}) \end{cases}, \quad (6)$$

где

$$K_{jl_1 m_1}^{ilm} \equiv a_{jl_1} T_{lm}^{l_1 m_1} [F'_{LM}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + (-1)^{l+m} \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_s}{\varepsilon_a + \varepsilon_s} F_{LM}(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_j)], \quad (7)$$

$$a_{il} \equiv \frac{l(\varepsilon_i - \varepsilon_a)}{l\varepsilon_i + (l+1)\varepsilon_a} R_i^{2l+1}, \quad (8)$$

$$U_{ilm} \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{3}} a_{il} E_0^m \delta_l^1 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} V_i E_0^m \delta_l^1, \quad (9)$$

а $V_i \equiv \frac{4}{3}\pi R_i^3$ – объем i -ого шара.

При введении (6) и (7) было использовано теорему суммирования сферических гармоник [4]

$$F_{lm}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \sum_{l_1 m_1} T_{lm}^{l_1 m_1} F_{LM}(\mathbf{R}) G_{l_1 m_1}(\mathbf{r}) \quad (r < R) \quad (10)$$

где $l_1 = 0, 1, 2, \dots$ и $m_1 = -l_1, \dots, l_1$,

$$T_{lm}^{l_1 m_1} \equiv (-1)^{l+m_1} \left[4\pi \frac{(2l+1)}{(2l_1+1)(2L+1)} \times \frac{(L+M)!(L-M)!}{(l+m)!(l-m)!(l_1+m_1)!(l_1-m_1)!} \right]^{1/2},$$

$L \equiv l + l_1$, та $M \equiv m - m_1$.

Величины E_0^m представляют собой так называемые циклические координаты вектора внешнего поля \mathbf{E}_0 . Циклические координаты являются комплексными величинами, которые определяются для любого вектора \mathbf{a} формулами

$$\begin{cases} a^{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x \mp ia_y) \\ a^0 = a_z \end{cases} \quad (11)$$

Уравнение (6) для коэффициентов A_{ilm} может быть записано символически в виде матричного уравнения $(\mathbf{1} + \mathbf{K})\mathbf{A} = \mathbf{U}$ относительно матрицы \mathbf{A} , элементами которой являются неизвестные A_{ilm} , а матрицы \mathbf{K} и \mathbf{U} созданы заданными величинами K_{jl, m_1}^{ilm} и U_{ilm} соответственно. Поскольку величины K_{jl, m_1}^{ilm} зависят, соответственно (7), только от параметров $\varepsilon_a, \varepsilon_s, \varepsilon_i, R_i, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j)$ рассматриваемой физической системы, матрица \mathbf{K} полностью определяется свойствами системы. Величины U_{ilm} зависят от величины и направления вектора внешнего поля \mathbf{E}_0 , поэтому матрица \mathbf{U} представляет действующее на систему заданное внешнее поле. Если матрицы \mathbf{K} та \mathbf{U} заданы, мы можем записать решение для матрицы мультипольных коэффициентов \mathbf{A} в символическом виде $\mathbf{A} = (\mathbf{1} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{U}$. Отметим, что матрица $\mathbf{M} \equiv (\mathbf{1} + \mathbf{K})^{-1}$, которая связывает матрицу \mathbf{U} внешнего поля с матрицей \mathbf{A} мультипольных коэффициентов, является матрицей мультиполяризуемостей частиц. В нее входят величины, которые описывают как прямое действие внешнего поля на частицы (и представленные единичной матрицей), так и не прямое действие внешнего поля (представлены матрицей \mathbf{K}). Матрица \mathbf{K} , в свою очередь, состоит с двух слагаемых, что описывают мультипольное взаимодействие каждой частицы, как с другими частицами, так и с их изображениями [см. соответственно первый и второй слагаемые в K_{jl, m_1}^{ilm} (7)]. Отметим, что результаты более ранних работ по данной тематике можно найти в статьях [9-12].

Шар над подложкой. Оптические свойства

Для одного шара, находящегося вблизи поверхности, исходя из уравнений (6) и принимая во внимание (8), можно получить в диполь-дипольном приближении выражение для тензора его поляризуемости следующее выражение

$$\alpha_m = \begin{pmatrix} \alpha^{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{\perp} \end{pmatrix}; \quad \alpha_m = R^3 \frac{(\varepsilon - \varepsilon_a)(\varepsilon_s + \varepsilon_a)}{(\varepsilon + 2\varepsilon_a)(\varepsilon_s + \varepsilon_a) - \eta_m \left(\frac{R}{2h}\right)^3 (\varepsilon - \varepsilon_a)(\varepsilon_s - \varepsilon_a)}, \quad m = (\parallel, \perp), \quad (12)$$

где $\eta_m \equiv \begin{cases} 1, & m = \parallel, \\ 2, & m = \perp. \end{cases}$

Рассчитанная по этой формуле зависимость поляризуемости шара (вблизи подложки) от ε_a и расстояния между ним и поверхностью показана на рис. 3.

В случае лоренцевских диэлектрических функций [1]

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, \quad \varepsilon_s(\omega) = 1 + \frac{\omega_{ps}^2}{\omega_{0s}^2 - \omega^2 - i\gamma_s\omega}$$

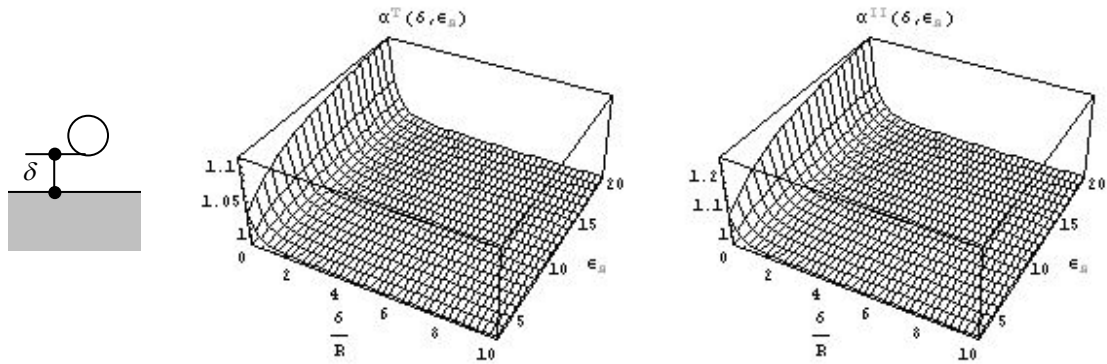


Рис. 3. Влияние значений величин ε_a и δ на поляризуемость шара возле подложки

и $\varepsilon_a = 1$ (вакуум) из этого выражения и условия $\alpha(\omega_{res}) = \infty$ находим резонансные частоты поглощения электромагнитного излучения частиц. Если пренебречь затуханием ($\gamma = \gamma_s = 0$), эти частоты выражаются через параметры системы «шар – подкладка» таким образом:

$$(\omega_m^\pm)^2 = \frac{\tilde{\omega}_0^2 + \tilde{\omega}_{0s}^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{\omega}_0^2 - \tilde{\omega}_{0s}^2}{2}\right)^2 + x_m \frac{\omega_p^2}{3} \frac{\omega_{ps}^2}{2}}, \quad (13)$$

где $\tilde{\omega}_0^2 \equiv \omega_0^2 + \frac{\omega_p^2}{3}$ и $\tilde{\omega}_{0s}^2 \equiv \omega_{0s}^2 + \frac{\omega_{ps}^2}{2}$ - квадраты "сдвинутых" частот ω_0 и ω_{0s} объемных плазмонов материала шара и подложки соответственно; $x_m \equiv \eta_m \left(\frac{R}{2h}\right)^3$, h - расстояние от центра до поверхности.

Схема размещения резонансных частот шара относительно частот $\tilde{\omega}_0$ и $\tilde{\omega}_{0s}$ приведена на рис. 4. Как видно из этого рисунка и формулы (10), в расположении резонансов шара вблизи подкладки существуют такие закономерности:

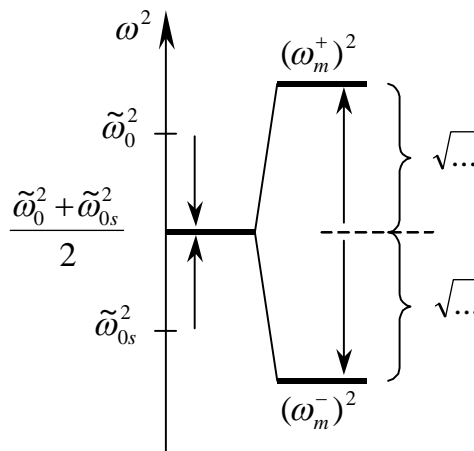


Рис. 4. Схема расположения резонансных частот для шара вблизи подложки.

- для каждого из двух главных направлений внешнего поля (\perp и \parallel к подложке) резонансы расположены симметрично относительно среднеквадратического значения

- $[(\tilde{\omega}_0^2 + \tilde{\omega}_{0s}^2)/2]^{1/2}$ величин $\tilde{\omega}_0$ и $\tilde{\omega}_{0s}$;

- сдвиг резонансов ω_m^+ и ω_m^- относительно величины $[(\tilde{\omega}_0^2 + \tilde{\omega}_{0s}^2)/2]^{1/2}$ определяется величиной квадратного корня в выражении (13) и является одинаковым для обоих резонансов ω_m^\pm , возбуждаемых каждой отдельной компонентой внешнего поля, причем этот сдвиг для продольных ($m=0$) резонансов больше от соответствующего сдвига для поперечных ($m=1$) резонансов;

- сдвиг резонансов ω_m^+ и ω_m^- зависит от величины h/R и спадает с ростом высоты h ;

- частоты "верхних" резонансов ω_m^+ ($m=0,1$) всегда больше большей из двух величин $\tilde{\omega}_0$ и $\tilde{\omega}_{0s}$, в то время как частоты «нижних» резонансов – всегда меньше меньшей из этих двух величин;

Рассчитанная по формуле (13) резонансная частота металлической частицы над металлической поверхностью приведена на рис. 5.

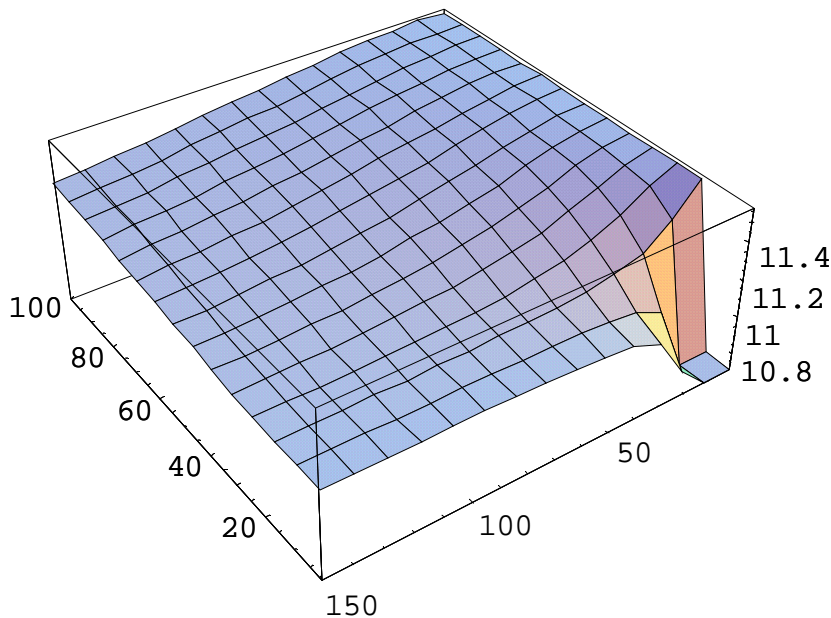


Рис. 5. Зависимость частоты резонансного поглощения металлическим шаром на подложке от ω_{0s} и ω_{0p} . Масштаб на протяжении всех осей равен $0,1\omega_0$.

Найденные здесь компоненты тензора поляризуемости α_m^ϵ являются приближенными, ибо при получении α_m^ϵ было учтено лишь диполь-дипольное взаимодействие между частицей и подложкой. Учет в общем виде высших мультиполей взаимодействия (квадрупольного, октупольного и т. д.) можно провести, используя общий метод, развитый во втором разделе статьи. Из выражения (6) для одной частицы над подложкой находятся следующие выражения для компонент тензора α_m^ϵ ; в общем случае имеем:

$$\alpha_m = 4\pi\epsilon_a R^3 A_{m1}, \quad (\text{для } m=\perp \text{ или } \parallel), \quad (14)$$

где коэффициенты A_{m1} (согласно (6)) находятся из бесконечной системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\delta_{kj} + \left\{ \frac{k(\varepsilon_i - \varepsilon_a)(\varepsilon_a - \varepsilon_s)}{[k\varepsilon_i + (k+1)\varepsilon_a](\varepsilon_a + \varepsilon_s)} \right\} \left[\frac{(k+j)!}{k!j! \left(\frac{2d}{R}\right)^{k+j+1}} \right] \right) \cdot A_{\perp j} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} \delta_{k1}, \quad (\text{для } k=1, 2, \dots) \quad (15)$$

для перпендикулярной (по отношению к поверхности) составляющей внешнего электрического поля и, соответственно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\delta_{kj} + \left\{ \frac{k(\varepsilon_i - \varepsilon_a)(\varepsilon_a - \varepsilon_s)}{[k\varepsilon_i + (k+1)\varepsilon_a](\varepsilon_a + \varepsilon_s)} \right\} \left[\frac{(k+j)!}{(k+1)!(j-1)! \left(\frac{2d}{R}\right)^{k+j+1}} \right] \right) \cdot A_{\parallel j} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} \delta_{kj}, \quad (16)$$

для $k=1, 2, \dots$ для параллельной составляющей электрического поля. В выражениях (15) и (16) $d = \delta + R$ - это расстояние центра частицы до подложки, а R - радиус частицы. При $k=j=1$ из этих соотношений следует формула (12). Используя эти соотношения и формулы (3)-(5), после некоторых преобразований получаем соотношение расчета эффективности [1] поглощения (Q_{abs}) и эффективность рассеивания (Q_{sca}) p -поляризованного излучения, падающего на подложку (угол падения Θ) и частицу

$$Q_{abs} = \frac{k}{\pi R^2} \sqrt{\text{Im}^2 \left[|1+r_p| \sin \Theta \alpha_{\perp} \right] + \text{Im}^2 \left[|1-r_p| \cos \Theta \alpha_{\parallel} \right]}, \quad (17)$$

$$Q_{sca} = \frac{k^4}{6\pi^2 R^2} \sqrt{\left[|1+r_p| \sin \Theta \alpha_{\perp} \right]^2 + \left[|1-r_p| \cos \Theta \alpha_{\parallel} \right]^2}, \quad (18)$$

где $k = 2\pi/\lambda$, r_p - амплитудный френелевский коэффициент отражения излучения от поверхности [1] для p -поляризованного излучения. Формулы (15)-(18) полностью решают задачу взаимодействия излучения с малой частицей над подложкой и позволяют (численно) рассчитывать частотные зависимости $Q_{abs}(\omega)$ и $Q_{sca}(\omega)$ для разнообразных конкретных систем.

Выводы

На основании разработанной нами общей теории взаимодействия малых частиц с разнообразными поверхностями (в том числе биологическими) можно утверждать, что это мультпольное взаимодействие возникает лишь в присутствии внешнего электрического поля и взаимодействие приводит к изменению электродинамических свойств как частиц, так и поверхности – перераспределению зарядов, сдвигу положения пиков и изменению интенсивности поглощения электромагнитного излучения системой частиц на поверхности. При этом характер изменения процессов поглощения, как частицами, так и поверхностью зависит от электродинамических параметров поверхности и частиц (эффективные диэлектрические проницаемости, собственные моды колебаний, физико-химическое состояние поверхности и т.д.). Например, это дает возможность добывать информацию о физических и химических параметрах клетки на основании анализа оптических спектров адсорбированных клетками частиц.

Из выражения для резонансных частот модельной системы «диэлектрический шар на диэлектрической подкладке в вакууме» получается, что во внешнем поле имеет место сдвиг и расщепление резонансной частоты поглощения малой частицы в зависимости от направления внешнего поля соответственно (12). Исходя из этого, можно утверждать, что монослой малых частиц на подкладке имеет анизотропные диэлект-

рические свойства. Отметим, что выражения (15-18) позволяют рассчитывать поляризуемости для случая малой частицы на поверхности биологической мембраны, если известна частотная зависимость диэлектрической функции этой мембраны. Найденная поляризуемость позволяет оценить сечения рассеяния и поглощения электромагнитного излучения частицей, размещенной вблизи мембраны, а из выражения для потенциала можно найти распределение поверхностного заряда мембраны, что может быть существенным для жизнедеятельности клетки.

Литература

- 1 Bohren C.F. and Huffman P.R. Absorption and Scattering of Light by Small Particles. - New York: John Wiley & Sons, 1983.
- 2 Kreibig U. and Volmer M.. Optical Properties of Metal Clusters. – Springer–Verlang: Berlin, 1995.
- 3 Grechko L.G., Whites K.W., Pustovit V.N., Lysenko V.S. Macroscopic dielectric response of the metallic particles embedded in host dielectric medium // *Microelectronics Reliability*. – 2000. - V.40. – P.893-895.
- 4 Gogenko V.V., Grechko L.G., Whites K.W. Electrodynamics of spatial clusters of spheres: Substrate effects // *Phys. Rev. B*. - 2003. – V. 68. – P.125422-1 – 125422-16.
- 5 Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория угловых моментов. – М.: Наука, 1975. – 457 с.
- 6 Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган. - М.: Наука, 1979. – 830 с.
- 7 Naarmans M.T., Bedeaux D. Optical properties of thin films up to second order in the thickness // *Thin Solid Films*. - 1995. – V. 258. – P.213-228.
- 8 Naarmans M.T., Bedeaux D. The polarizability and the optical properties of lattices and random distributions of small metal spheres on a substrate // *Thin Solid Films*. – 2003. – V. 224. – P.117-131.
- 9 Yoshida S., Yamaguchi T., Kinbara A. Optical properties of aggregated silver films // *J. Opt. Soc. of America*. – 1971. - V. 61. – P.62-29.
- 10 Yamaguchi T., Yoshida S., Kinbara A. Optical effect of the substrate on the anomalous absorption of aggregated silver films // *Thin Solid Films*. – 1974. - V. 21. – P.173-187.
- 11 Gotschy W., Vonmetz K., Leitner A., Aussenegg F.R. Thin films by regular patterns of metal nanoparticles: tailoring the optical properties by nanodesign // *Appl. Phys.* – 1996. – V. 63. - P. 381-384.
- 12 Royer P., Coudonnet J.P., Warmack R.S, Ferrell T.L. Substrate effects on surface – plasmon spectra in metal – island films // *Phys. Rev. B*. - 1987. – V. 35. – P.3753-3759.