УДК 683.519

МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ С ПОКАЗАТЕЛЕМ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

С.В. ТКАЧЕНКО

Рассмотрен метод прогнозирования, ориентированный на обучающие выборки большой длины (более 100 фактов), основанный на построении моделей, описывающих стереотипные ситуации временного ряда. Ведение статистики повторений стереотипных ситуаций и статистики ошибок прогнозов на моделях позволяет дополнительно рассчитывать показатель определенности, дающий вероятностную оценку точности прогнозного значения. Приведены результаты экспериментального исследования метода.

ВВЕДЕНИЕ

Данный метод прогнозирования рассчитан на обучающие выборки больших размеров (100 и более точек наблюдения) и является надстройкой над существующими методами краткосрочного прогнозирования, делающими прогноз на относительно небольших выборках (10…25 точек наблюдения). Он может использоваться совместно с одним из методов краткосрочного прогнозирования, например, методом нечеткого группового учета аргументов (НМГУА). Главная цель в методе — не точность прогноза, а показатель определенности прогноза, предоставляющий формальную вероятностную оценку стабильности временного ряда и точности рассчитанного прогнозного значения. Предусматривается использование метода в качестве дополнения к методам краткосрочного прогнозирования и для получения формальной качественной характеристики прогноза.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задано множество исходных данных: входные переменные $\{X_1, X_2, ...$ $..., X_i, ..., X_M\}$, выходная переменная $\{y_1, y_2, ..., y_i, ..., y_M\}$, где i — порядковый номер точки наблюдения; M — число точек наблюдения; $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{iN}\}$ — N -мерный вектор.

Требуется на основе наблюдаемых данных построить модель $Y_i = Y(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{iN})$, адекватную им, а также рассчитать показатели определенности прогноза по модели $D_i = D(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{iN})$ и рейтинги этих показателей по модели $H_i = H(y_i, x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{iN})$.

Отличительные особенности данной задачи:

1) большой размер выборки данных M (более 100 точек наблюдения);

2) временные ряды $x_n(i)$ в общем случае нестационарные.

Основные достоинства метода:

1) дополнительный показатель определенности прогноза предоставляет формальную вероятностную оценку стабильности временного ряда и точности рассчитанного прогнозного значения;

2) объективность показателя определенности прогноза растет вместе с размером обучающей выборки;

3) метод не нуждается в свойственной НМГУА процедуре переобучения, после которой теряются знания и уменьшается точность прогноза.

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ

В случае применения методов краткосрочного прогнозирования (таких как НМГУА) для поставленной задачи обучающая выборка не может быть использована в полной мере, так как для указанных методов предельная длина обучающей выборки, при которой начинает резко возрастать сложность регрессионной модели при одновременном уменьшении адекватности, намного меньше. Чтобы нейтрализовать эффект резкого усложнения модели с ростом обучающей выборки, предлагается разбить ее на множество перекрывающихся между собой окон фиксированного, оптимального для применения НМГУА, размера W так, чтобы в результате образовалось $M - W + 1$ окон, где каждое окно идентифицируется координатой первой своей точки, после чего последовательно обработать все окна методом НМГУА в сочетании с принципами образной памяти, поиска аналогий и суперпозиции.

Образная память. Каждый раз, когда для описания поведения временного ряда на окне необходимо построить модель НМГУА, полученная интервальная модель сохраняется и может быть использована повторно.

Поиск аналогий. На первом этапе обработки окна делается попытка найти в памяти альтернативные модели, т.е. такие, которые бы аппроксимировали временной ряд на интервале окна в рамках допустимой погрешности. При этом для каждой модели делается попытка сдвинуть аппроксимированные значения в вертикальном направлении ближе к центру значений текущего окна с целью уменьшения погрешности интервальной аппроксимации. Если множество альтернативных моделей оказалось пусто, то строится новая интервальная модель, в противном случае прогноз делается на основании множества альтернативных моделей и их статистических характеристик. Разумеется, четкость прогноза при таком подходе пострадает, однако это позволит, во-первых, вести рейтинги повторяемости моделей и на их основании рассчитывать показатель определенности прогноза, что зачастую более ценно, чем четкость прогнозируемого значения, во-вторых, многократно сократить общее количество интервальных моделей, необходимых для расчета прогнозного значения и показателя определенности.

Принцип суперпозиции. Для каждого окна делается попытка описать интервал временного ряда комбинацией из существующих в памяти моделей-образов. Если определенная модель много раз попадала во множество альтернативных, то она имеет высокий рейтинг повторяемости, а значит, ее вес при расчете прогнозного значения должен быть больше, чем у остальных моделей. Кроме того, наличие во множестве альтернатив моделей с высоким рейтингом повторяемости свидетельствует об архитипичности поведения временного ряда в пределах окна, что, в свою очередь, повышает показатель определенности прогноза, тогда как пустое множество альтернативных моделей снижает его. Нужно заметить, что при расчете показателя определенности учитываются не только рейтинги повторяемости моделей, но и ряд других статистических показателей, которые будут описаны ниже.

ОСНОВНЫЕ ИДЕИ

На этапе обучения в памяти накапливается определенное количество интервальных моделей, описывающих поведение временного ряда на выделенных участках. Для этих моделей собирается статистика ошибок сделанных прогнозов, а также статистика повторяемости по всему временному ряду.

Нормализация ошибок прогнозирования в методе основана на среднем шаговом отклонении исследуемой величины, которая рассчитывается в каждой точке обучающей выборки по формуле

$$\overline{\Delta y_i} = \frac{1}{i}\sum_{t=2}^{i}\left|y_t - y_{t-1}\right|,$$

где i — номер точки в обучающей выборке; y_t — фактическое значение исследуемой величины в точке t.

Тогда нормализованная к диапазону [0, 1] ошибка прогноза по модели m в точке i будет

$$e_{mi} = \frac{\left|y_i - P_{mi}\right|}{\overline{\Delta y_i}},$$

где P_{mi} — спрогнозированное по m-й модели значение в точке i.

Предполагается, что этот показатель в рабочих условиях обычно не превышает единицы. Такой способ нормализации является приемлемым, так как в случае систематического выхода нормализованной ошибки за пределы единицы, т.е. когда ошибка постоянно превышает среднее шаговое отклонение исследуемой величины, в принципе теряется смысл в прогнозировании.

Показатель определенности прогноза. Частные показатели, входящие в формулу расчета показателя определенности, такие:

- взвешенная ошибка прогнозов
  - предварительных,
  - последних;
- составной показатель качества альтернатив
  - средняя повторяемость альтернативных моделей,
  - взвешенная статистическая ошибка альтернативных моделей,
  - взвешенная среднемодульная ошибка аппроксимации текущего окна.

Взвешенная ошибка предварительных прогнозов. На каждом окне делается предварительный прогноз на заданное количество шагов вперед. При этом прогноз, сделанный на первую точку, следующую за текущим окном, является окончательным (P_i^{fin}), в то время как прогнозы, рассчитанные на основании текущего окна для последующих точек, являются предварительными и впоследствии с получением новых фактических данных могут уточняться. Так для каждой точки в какой-то момент времени появляется определенное множество спрогнозированных значений, рассчитанных на основании окон, проанализированных непосредственно перед текущим окном. Сравнение между собой этих прогнозных значений может быть использовано для оценки уровня стабильности временного ряда в данной точке. Если прогнозные значения мало отличаются друг от друга, то временной ряд стабилен и наоборот. Для того чтобы эта оценка стабильности меньше зависела от количества точек предварительного прогноза и больше учитывала последние полученные фактические данные, используется взвешенное среднее значение отклонений, предоставляющее ошибкам прогнозов, рассчитанных по последним окнам, бóльший вес.

$$e_{wi}^{\mathrm{pre}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{K} \alpha^k} \sum_{k=1}^{K} \alpha^k e_{(w-k)i}\,, \qquad (1)$$

где w — индекс окна, по которому сделан прогноз на данную точку (окна с меньшим индексом расположены ближе к последней точке временного ряда); i — точка, для которой рассчитывается взвешенная ошибка предварительных прогнозов, начиная с первой точки после окна w; K — количество точек предварительного прогноза; α^k — коэффициент пропорциональности, установленный экспертом, в степени k (это может быть, например, коэффициент золотого сечения ($\alpha \approx 0{,}615$)); $e_{(w-k)i}$ — ошибка предварительного прогноза, рассчитанного по $(w-k)$-му окну на точку i.

Взвешенная ошибка последних прогнозов. В отличие от взвешенной ошибки предварительных прогнозов эта оценка учитывает ошибки K окончательных прогнозов на K последних точек.

$$e_{wi}^{\mathrm{last}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{K} \alpha^k} \sum_{k=1}^{K} \alpha^k e_{(w-k)(i-k)}\,, \qquad (2)$$

где i — точка, для которой рассчитывается взвешенная ошибка последних прогнозов, начиная с первой точки после окна w; $e_{(w-k)(i-k)}$ — ошибка окончательного прогноза, рассчитанного по $(w-k)$-му окну на точку $(i-k)$.

Показатель качества альтернатив — составной параметр, содержащий такие оценки множества альтернативных моделей текущего окна, как средняя повторяемость и взвешенная статистическая ошибка альтернативных моделей, а также взвешенная среднемодульная ошибка аппроксимации текущего окна.

Средняя повторяемость альтернативных моделей. Нормализованный рейтинг повторяемости отдельной модели m на момент обработки w-го окна составляет

$$r_{mw} = \frac{n}{w}, \tag{3}$$

где n — количество окон, проанализированных вплоть до w-го, при обработке которых модель m попала во множество альтернативных моделей.

Для множества альтернатив рассчитывается среднее арифметическое соответствующих показателей каждой из моделей.

$$r_w = \frac{1}{A}\sum_{m}^{A} r_{mw}, \tag{4}$$

где m — индекс альтернативной модели; A — количество альтернативных моделей; r_{mw} — рейтинг повторяемости m-й альтернативной модели на момент обработки w-го окна.

Взвешенная статистическая ошибка альтернативных моделей. Взвешенная по средней повторяемости моделей, входящих во множество альтернатив, статистическая средняя ошибка прогнозирования

$$e_w^{\text{stat}} = \frac{1}{\sum_{m}^{A} r_{mw}} \sum_{m}^{A} r_{mw} e_{mw}^{\text{stat}}, \tag{5}$$

где e_{mw}^{stat} — статистическая ошибка прогнозирования по m-й модели на момент обработки w-го окна (определяется как средняя ошибка всех спрогнозированных по ней точек).

Взвешенная среднемодульная ошибка аппроксимации текущего окна. Среднемодульная ошибка аппроксимации w-го окна по интервальной модели m определяется как

$$e_{mw}^{\text{avm}} = \frac{1}{W}\sum_{t=0}^{W-1} \frac{\left| y_{w+t} - P_{m(w+t)} \right|}{\overline{\Delta y_{w+t}}}, \tag{6}$$

где W — размер окна.

По этому показателю отсеиваются модели при составлении множества альтернативных моделей. Если модель аппроксимирует временной ряд в пределах окна, не превышая предельную среднемодульную ошибку $E^{avm-\lim}$ (параметр метода), то она попадает во множество альтернатив.

Взвешенная по средней повторяемости моделей, входящих во множество альтернатив, среднемодульная ошибка аппроксимации текущего окна определяется выражением

$$e_w^{\text{avm}} = \frac{1}{\sum_{m}^{A} r_{mw}} \sum_{m}^{A} r_{mw} e_{mw}^{\text{avm}}. \tag{7}$$

Окончательная формула расчета показателя определенности прогноза может быть получена на основании (1), (2), (4), (5) и (7) как взвешенное среднее составляющих показателей.

$$D_{wi} = \frac{E^{\text{pre}}(1-e_{wi}^{\text{pre}}) + E^{\text{last}}(1-e_{wi}^{\text{last}}) + Rr_w + E^{\text{stat}}(1-e_w^{\text{stat}}) + E^{\text{avm}}(1-e_w^{\text{avm}})}{E^{\text{pre}} + E^{\text{last}} + R + E^{\text{stat}} + E^{\text{avm}}}, \quad (8)$$

где веса соответствующих оценок обозначены так: E^{pre} — взвешенная ошибка предварительных прогнозов; E^{last} — взвешенная ошибка последних прогнозов; R — средняя повторяемость альтернативных моделей; E^{stat} — взвешенная статистическая ошибка альтернативных моделей; E^{avm} — взвешенная среднемодульная ошибка аппроксимации текущего окна.

E^{pre}, E^{last}, R, E^{stat} и E^{avm} являются параметрами метода и используются для подстройки метода под конкретную природу временных рядов. Сегодня не существует обоснованной методики расчета этих весов, поэтому соответствующие значения должны устанавливаться экспертом.

Так как в выражении (8) используются только нормализованные показатели, то результат будет нормализованным (диапазон [0;1]).

Показатель определенности, рассчитанный для первой точки i после обрабатываемого окна, называется окончательным (D_i^{fin}), а для последующих точек на основании того же окна — предварительным.

Прогнозируемое значение выходной переменной. Прогноз по окну w на точку i рассчитывается на основании частных прогнозов и статистических показателях альтернативных моделей, которые должны учитывать ее среднюю повторяемость r_{mw}, статистическую e_{mw}^{stat} и среднемодульную ошибки аппроксимации e_{mw}^{avm}.

$$Q_{mw} = \frac{Rr_{mw} + E^{\text{stat}}(1-e_{mw}^{\text{stat}}) + E^{\text{avm}}(1-e_{mw}^{\text{avm}})}{R + E^{\text{stat}} + E^{avm}}. \quad (9)$$

Прогнозируемое значение выходной переменной рассчитывается как взвешенное по статистическим показателям среднее по каждой из моделей, входящих во множество альтернатив.

$$P_{wi} = \frac{1}{\sum_m^A Q_{mw}} \sum_m^A Q_{mw} P_{mi}, \quad (10)$$

где P_{mi} — прогнозируемое значение, рассчитанное по m-й модели на точку i.

РЕЙТИНГ ПОКАЗАТЕЛЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРОГНОЗА

Для формальной оценки объективности показателя определенности для каждого прогнозного значения и показателя определенности постфактум рассчитывается рейтинг. Исходя из того, что D_{wi} и e_{wi} нормализованы к диапазону [0;1], а также их семантические значения противоположны (в том смысле, что при $e_{wi} = 0$ оптимальным значением D_{wi} было бы 1 и, наоборот, при $e_{wi} = 1$ D_{wi} должно быть 0), наилучшую оценку показателя определенности можно выразить как $H_{wi} = 1 - (D_{wi} + e_{wi}) = 0$. Однако следует учесть, что характер временного ряда и выбранные значения параметров метода влияют на средние значения D_{wi} и e_{wi}, поэтому необходима корректировка. Предлагается нормализовать эти величины по их средним значениям. Окончательная формула расчета рейтинга показателя определенности прогноза на основании окна w для точки i выглядит так:

$$H_{wi} = 1 - \left(\frac{D_{wi}}{2\overline{D}} + \frac{e_{wi}^{\text{abs}}}{2\overline{e^{abs}}} \right), \tag{11}$$

где $e_{wi}^{\text{abs}} = \left| y_i - P_{wi} \right|$; $\overline{e^{\text{abs}}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \left| y_i - P_i^{\text{fin}} \right|$; $\overline{D} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} D_i^{\text{fin}}$.

Эта оценка нормализована к диапазону $[-1;1]$. Отрицательные значения свидетельствуют о необоснованной уверенности (показатель определенности завышен), положительные — излишней предосторожности (показатель определенности занижен). Идеальной оценкой является значение 0. Индикатором прогресса обучения будет сходимость среднего значения рейтинга показателя определенности прогноза к нулю.

С появлением новых фактов изменяются значения $\overline{e^{\text{abs}}}$ и $\overline{D}$, и для того, чтобы оценки, рассчитанные на предыдущих итерациях, оставались сопоставимыми между собой, необходимо их пересчитывать после каждой итерации.

ПАРАМЕТРЫ МЕТОДА

- Размер окна — количество точек наблюдения, входящих в обучающую выборку (НМГУА).
- Размер проверочной выборки. Определяет, сколько последних точек окна должны быть использованы для проверки частных моделей на этапе обучения (НМГУА).
- Пороговая дельта улучшения прогнозирующей характеристики лучшей модели ряда (НМГУА).
- Количество лучших частных моделей, передающихся на следующий ряд (НМГУА).
- Допустимая среднемодульная ошибка аппроксимации. Если модель описывает поведение временного ряда в пределах окна с меньшей среднемодульной ошибкой, то она рассматривается как альтернативная.
- Веса оценок составляющих показателя определенности прогноза.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Допустим обработано w окон обучающей выборки.

1. Выбрать очередное окно временного ряда $w = w + 1$ для обработки размером W .

2. Найти из числа сгенерированных ранее моделей такие, которые аппроксимируют окно w, не превышая допустимую среднемодульную ошибку $E^{\text{avm-lim}}$. Если множество альтернативных моделей оказалось не пустым, то на шаг 4.

3. Построить модель НМГУА, аппроксимирующую временной ряд в пределах окна w, и поместить созданную модель в множество альтернативных моделей.

4. Рассчитать составляющие показателей определенности e_{wi}^{pre}, e_{wi}^{last}, r_w, e_w^{stat}, e_w^{avm} и на их основании P_{wi} и D_{wi}, где $i = \overline{1, K}$, K — количество точек предварительного прогноза.

5. Если это последнее окно обучающей выборки, то конец, иначе на шаг 1.

Постобработка.

Рассчитать значения H_{wi}, где $i = \overline{W+1, M}$, $w = \overline{1, M-W+1}$.

СРАВНЕНИЕ С МЕТОДОМ КОМПЛЕКСИРОВАНИЯ АНАЛОГОВ (МКА)

При схожих подходах к задаче между этими двумя методами имеются три существенные отличия.

1. В МКА отсутствует показатель определенности сделанного прогноза. Не учитывается история ошибок, рассчитанных ранее прогнозов, а значит, отсутствует обратная связь с нестабильной исследуемой величиной, у которой может быть несколько устойчивых состояний. Моменты переходов между такими состояниями в МКА никак не выделяются.

2. В МКА отсутствует доверительный интервал.

3. Модель, получаемая методом НМГУА на основе опорной функции может описывать зависимости между множеством переменных различной сложности. Это наделяет такие модели свойством автомасштабирования зависимостей между переменными, что позволяет находить одинаковые фрагменты поведения исследуемой величины с учетом эффекта масштабирования зависимости выходного параметра от входных при смещении их значений вверх или вниз. Поэтому даже если задаться целью вести аналогичную статистику для МКА, то на этапе поиска альтернативных моделей для описания окна может возникнуть ситуация, когда какая-нибудь из моделей аппроксимирует окно в рамках допустимой среднемодульной ошибки, тогда как обычным сдвигом значений одного из предыдущих окон (а другого способа в случае МКА нет) мы не сможем аппроксимировать окно, не превысив допустимую среднемодульную ошибку. Это может значительно уменьшить количество альтернатив в МКА и тем самым снизить доверие к прогнозу.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для экспериментального исследования метода взята статистика курсов индексов Нью-Йоркской фондовой биржи (NYSE), а именно COMPOSITE

INDEX, U.S. 100, ENERGY INDEX, INTERNATIONAL 100 INDEX, FINANCIAL INDEX. В качестве выходной прогнозируемой величины выбран COMPOSITE INDEX. Значения остальных индексов выступали в качестве входных параметров. Количество точек наблюдения — 740.

Параметры НМГУА: вид опорной функции — полином второй степени нелинейности; длина обучающей выборки $L_W = 7$; длина проверочной выборки $C_W = 2$; предельное уменьшение ошибки на проверочной выборке, определяющее условие построения нового ряда модели $\varepsilon = 0{,}001$; количество лучших моделей, передающихся на следующий ряд — 2.

Параметры метода прогнозирования с показателем определенности: размер окна $W = L_W + C_W = 9$; допустимая среднемодульная ошибка $E^{\text{avm-lim}} = 0{,}1$; количество точек предварительного прогноза $K = 2$; веса составляющих показателя определенности $E^{\text{pre}} = 4$, $E^{\text{last}} = 2$, $R = 4$, $E^{\text{stat}} = 4$ и $E^{\text{avm}} = 2$.

На рисунке показано, как изменяются контрольные показатели прогноза во времени. На первом сверху графике указаны фактические и спрогнозированные значения выходного параметра. На втором — окончательный рейтинг показателя определенности прогноза H_i^{fin}, а также его среднее значение и среднее абсолютное значение. На третьем графике – окончательный показатель определенности прогноза D_i^{fin} и его среднее. На нижнем графике — ошибка прогноза (окончательного e_i^{fin}, предварительного и среднее ошибки окончательного прогноза).

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из построенных графиков видно, что среднее показателя определенности прогноза стремится к своему пределу в районе значения 0,2, что говорит о довольно низком уровне стационарности исследуемой зависимости. Тем не менее среднее значение рейтинга показателя определенности выбирается из отрицательных значений и стремится к значениям, близким к нулю. Кроме того, уменьшается среднее абсолютное значение рейтинга, что также свидетельствует о тенденции увеличения степени объективности показателя определенности прогноза. Надо заметить, что это происходит в условиях, когда среднее абсолютное шаговое отклонение фактических значений выходного параметра $\overline{\Delta y_i}$ со временем стабильно уменьшается, а средняя абсолютная ошибка прогноза $\overline{e_i^{abs}}$, наоборот, стабильно растет.

На графике видно, что примерно до 600-й точки происходит уменьшение амплитуды значений рейтинга, а среднее рейтинга достигает 0, после чего эти показатели приобретают устойчивые значения. Вероятно, для более стабильных временных рядов скорость схождения рейтинга к нулю была бы больше и, следовательно, понадобилась бы обучающая выборка меньшей длины.

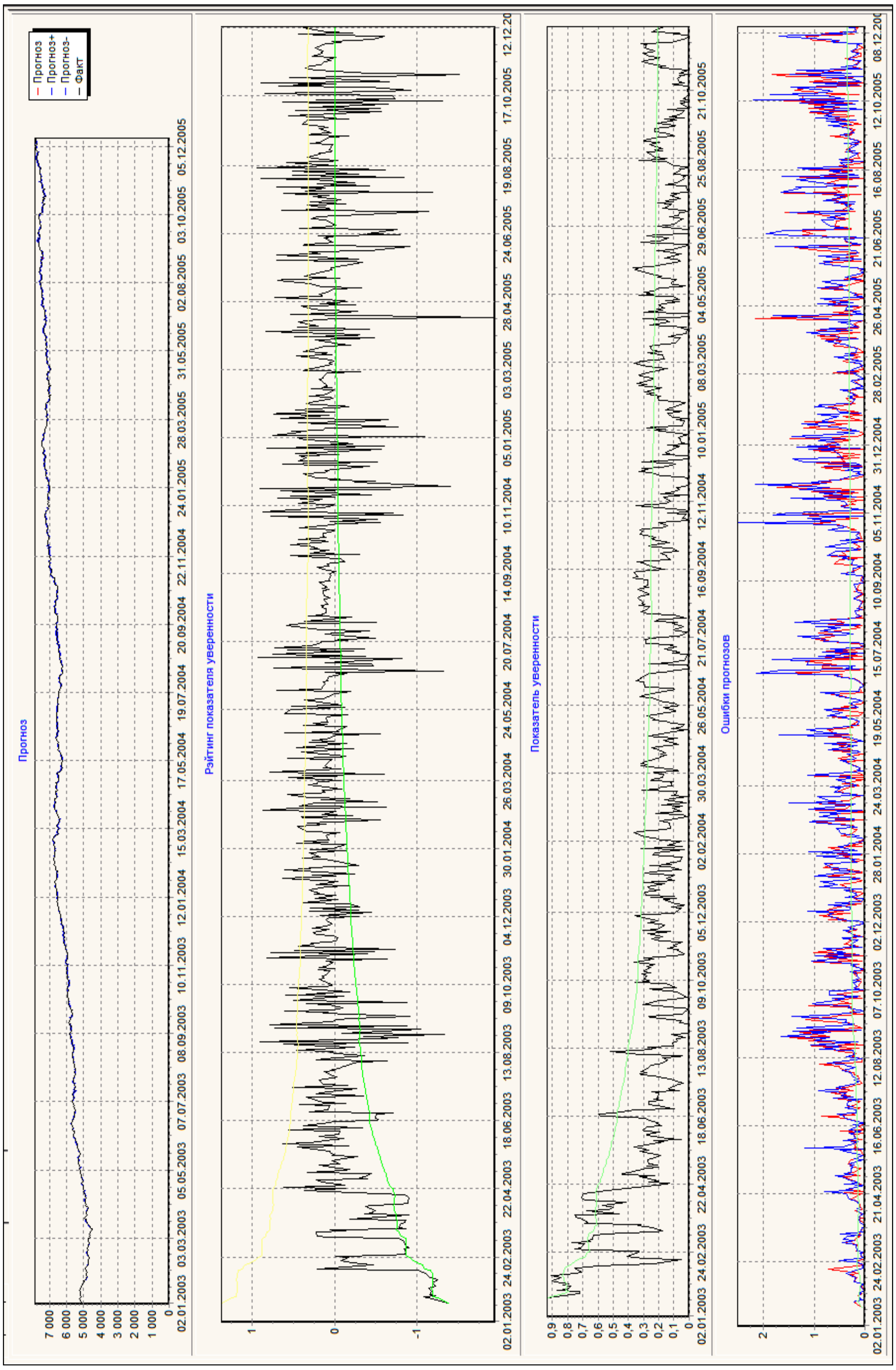

График показателя определенности и рейтинга показателя определенности прогноза

ВЫВОДЫ

1. Метод прогнозирования с показателем определенности в задачах прогнозирования экономических процессов со сложной динамикой и неизвестной функциональной взаимосвязью между процессами является вполне

обоснованным и позволяет получить объективный показатель определенности прогноза, который можно использовать как существенное дополнение к методам краткосрочного прогнозирования, а именно для оценки риска краткосрочного прогноза.

2. В качестве перспективного направления дальнейших исследований рассмотренного метода следует отметить необходимость обоснования и формализации процедуры выбора значений параметров метода E^{pre}, E^{last}, R, E^{stat}, E^{avm} на основании анализа выборки фактических значений выходного параметра.

3. Границы доверительного интервала прогноза, которые предоставляет метод НМГУА, никак не влияют на показатель доверия. Предлагается хранить историю пробитий доверительных интервалов фактическими значениями для каждой из моделей и учитывать ее при окончательном расчете верхней и нижней границ доверительного интервала на основании множества альтернативных моделей, а также учитывать ширину полученного доверительного интервала и историю пробитий доверительных интервалов моделей при расчете показателя доверия к прогнозу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. — Киев: Вид. дім «Слово», 2003. — 688 с.
2. *Зайченко Ю.П., Кебкал О.Г., Крачковский В.Ф.* Нечеткий метод группового учета аргументов и его применение в задачах прогнозирования макроэкономических показателей // Науч. вести НТУУ «КПИ». — 2000. — № 2. — С. 18–26.
3. *Зайченко Ю.П.* Основы проектирования интеллектуальных систем. — Киев: Слово, 2004. — 352 с.

Поступила 05.04.2006