

В. Д. Кубенко

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОГО СЛОЯ  
ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова, 3,  
03057, Киев, Украина; e-mail: vdk@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** An exact analytical solution is constructed for the plane problem on action of non-stationary load over the surface of elastic layer. The mixed boundary problem is considered, when the normal stress and tangential displacement are given on one side of layer (the fourth boundary problem of the theory of elasticity) and the tangential stress and normal displacement are given on another side of layer (the second boundary problem of the theory of elasticity). The Laplace and Fourier integral transforms are applied. The Laplace and Fourier inversions are carried out exactly using the tabulated values and convolution theorems for diverse assortment of acting non-stationary loads. The expressions for stresses and displacements are obtained in the explicit analytical form. The load is considered particularly, when it is applied over the area of constant sizes and changing by the given law sizes. The carried out computing demonstrates the progress of normal stress in dependence on time and spatial coordinates. The peculiarities of wave processes are analyzed.

**Key words:** elastic layer, strain state, non-stationary waves, integral transforms, mixed boundary conditions.

**Введение.**

В теории упругости различают следующие типы граничных условий (см., например, [4]): 1) задан вектор напряжения (первая краевая задача); 2) задан вектор перемещения (вторая краевая задача); 3) задана нормальная составляющая вектора перемещения и касательные составляющие вектора напряжения (третья краевая задача); 4) задана нормальная составляющая вектора напряжения и касательные составляющие вектора перемещения (четвертая краевая задача). Условиями первой краевой задачи моделируется, например, свободная граница тела, условиями второй задачи – жестко заделанный край. Два последние условия являются "смешанными". Тип граничных условий существенно влияет на возможность получения аналитического решения нестационарной задачи.

Для решения соответствующих краевых задач разработаны эффективные аналитические и численно-аналитические методы, основанные, преимущественно, на применении интегральных преобразованиях Лапласа по временной координате и Фурье (Ханкеля) – по линейной. Основной трудностью при этом является проблема построения оригиналов, которая зависит, в первую очередь, от характера пространственно-временного распределения нагрузки на границе и типа граничных условий. Библиографию исследований нестационарных волновых процессов при действии сосредоточенных или распределенных поверхностных воздействий в изотропном упругом полупространстве (полуплоскости) можно получить, например, в работах [2, 3, 12, 15].

В первую очередь следует указать монографии [5, 25], в которых изложено решение ряда нестационарных задач. Перемещения точек на поверхности полупространства и на оси симметрии исследовано в работах [14, 23]. Для совместного обращения преобразований применяется техника Каньяра [10] с учетом однородности изображения относительно параметров преобразований. Метод перевала с первоочередным об-

ращением по Лапласу (при помощи теории вычетов) в работах [9, 13, 21, 22] определены перемещения и напряжения во внутренних точках полупространства при действии равномерно распределенной нагрузки ступенчатого профиля. В случае распределенных подвижных нагрузок исследованы преимущественно случаи равномерного расширения границы нагруженной области и изучены перемещения точек либо на границе, либо вблизи фронтов упругих волн [6, 24]. В публикации [16] также методами интегральных преобразований получено аналитическое решение нестационарной первой краевой задачи теории упругости для упругой полуплоскости, которое определяет напряжение (перемещение) вдоль оси симметрии для некоторых конкретных видов нагрузки. Для нагрузки более общего вида в работе [20] предложено численно-аналитическое решение первой краевой задачи для полуплоскости, справедливое на конечном интервале времени. Наконец, в работе [17] при смешанных условиях четвертой краевой задачи методами интегральных преобразований и их последующим обращением с использованием теорем о свертках в замкнутой форме построено точное аналитическое решение задачи для упругой полуплоскости при широком ассортименте нестационарных нагрузок.

Перечисленные выше исследования имеют дело с полубесконечными объектами – упругим полупространством или полуплоскостью. Для таких объектов характерным является возбуждение волновых возмущений на границе и последующее беспрепятственное распространение упругих волн в массиве объекта. Для тела ограниченных размеров, в частности, для упругого слоя характерной особенностью волновых процессов, возбуждаемых на одной из границ, является многократное поочередное отражение возбужденных волн от каждой из границ. Тем самым в теле создается сложное деформированное состояние, изменяющееся каждый раз с приходом той или иной отраженной волны в рассматриваемую точку. Такая задача значительно сложнее и требует выработки соответствующих подходов к ее решению. В монографии [5], по-видимому, впервые дана постановка первой краевой задачи для упругого слоя и применены асимптотические методы исследования поведения волновых полей в дальней зоне. В работе [18] автором построено точное аналитическое решение плоской задачи о действии распределенной нестационарной нагрузки на поверхность упругого слоя в условиях, когда на граничных поверхностях заданы смешанные граничные условия: на одной из границ задана действующая нагрузка в виде нормального напряжения и касательное перемещение (четвертая краевая задача), на другой границе отсутствуют нормальное перемещение и касательное напряжение (третья задача). Числовые результаты получены для нормального напряжения.

Данная публикация является развитием работы [18], содержит исправление некоторых опечаток и посвящена в первую очередь вычислению нормального перемещения (графики, описывающие развитие напряжения, также приводятся). Используется та же постановка задачи и метод решения. Применяются интегральные преобразования Лапласа и Фурье. Обращение преобразований в случае постоянной или переменной области действия нагрузки удастся выполнить при помощи табличных соотношений и теорем о свертке и получить выражение для перемещения (напряжения) в замкнутом виде. Решение представлено в виде суммы,  $m$ -й член которой представляет  $m$ -ю отраженную волну. Удержание в решении определенного конечного количества членов позволяет получить точное решение задачи с учетом необходимого числа отражений, которое позволяет определить характеристики волнового процесса в произвольной точке слоя в произвольный момент времени. Следует помнить, однако, что принятая постановка задачи исключает возможность возникновения поверхностных волн, поэтому ее использование целесообразно преимущественно при изучении волновых процессов в поперечном направлении. Тем не менее, построение точных аналитических решений, пусть даже нечасто используемых в практике, кроме самостоятельной значимости, обеспечивает также возможность отработки с их помощью различных численных и приближенных подходов, для которых тип граничных условий не оказывает влияния на способ получения решения.

### §1. Формулировка задачи.

Рассмотрим равновесие упругого слоя толщиной  $h$ , к одной из граничных поверхностей которого в момент времени  $t = 0$  прикладывается нагрузка. Отнесем рассматриваемый объект к декартовым координатам  $x, z$ , так что ось  $x$  направлена вдоль границы слоя, к которой приложена нагрузка, ось  $z$  – в глубину слоя (рис. 1). Задача формулируется в условиях плоской деформации, т.е. предполагается, что перемещения и деформации в направлении, ортогональном к плоскости поперечного сечения слоя, отсутствуют. Нормальная нагрузка  $Q(x, t)$ , симметричная относительно оси  $z$ , в общем случае является функцией времени и координаты  $x$ .

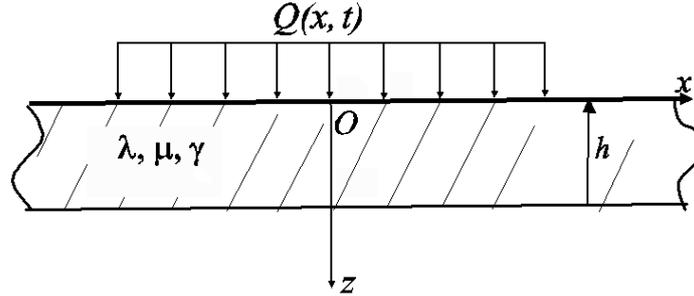


Рис.1

Вводятся безразмерные обозначения:  $\bar{x} = \frac{x}{R}$ ;  $\bar{z} = \frac{z}{R}$ ;  $\bar{u}_j = \frac{u_j}{R}$ ;  $\bar{t} = \frac{c_p t}{R}$ ;  $\bar{\sigma}_{jk} = \frac{\sigma_{jk}}{\lambda + 2\mu}$ ;

$\alpha = \frac{c_p}{c_0}$ ;  $\beta = \frac{c_s}{c_0}$ ;  $b = \frac{\beta}{\alpha}$ ;  $j, k = x, z$ ;  $c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\gamma}}$ ;  $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}$ , черта над которыми ниже будет опущена. Здесь  $R$  – некоторый характерный линейный размер; плотность материала; упругие постоянные Ламе;  $c_p$ ,  $c_s$  – соответственно, скорости распространения волн расширения и волн сдвига;  $\sigma_{jk}$  – компоненты напряженного состояния;  $u_j$  – компоненты вектора перемещений.

Поведение упругой среды описывается волновыми потенциалами  $\Phi(t, z, x)$  и  $\Psi(t, z, x)$ , которые в случае плоской задачи удовлетворяют волновым уравнениям [1]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

и связаны с упругими перемещениями и напряжениями соотношениями

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x};$$

$$\sigma_{zz} = (1 - 2b^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2\beta^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \right); \quad \sigma_{xz} = \beta^2 \left( 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right). \quad (1.2)$$

В качестве граничных условий при  $z = 0$  рассмотрим смешанные условия четвертой краевой задачи теории упругости, согласно которой на границе задано нормальное напряжение;  $\sigma_{zz}$  и отсутствует касательное перемещение  $u_x$ . Примем, что на тыльной поверхности слоя (при  $z = h$ ) нормальное перемещение  $u_z$  и касательное напряжение  $\sigma_{xz}$  отсутствуют.

Таким образом, граничные условия в принятой постановке имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}|_{z=0} &= Q(x,t), & u_x|_{z=0} &= 0; \\ u_z|_{z=h} &= 0, & \sigma_{xz}|_{z=h} &= 0.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Начальные условия для потенциалов нулевые

$$\Phi|_{t=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \Psi|_{t=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \quad (1.4)$$

Если волновые уравнения (1.1) подвергнуть преобразованию Лапласа по времени  $t$  (с учетом нулевых начальных условий) и преобразованию Фурье по координате  $x$  [7] (предполагая, что при  $|x| \rightarrow \infty$  потенциалы и их первые производные стремятся к нулю), они приобретут вид

$$\frac{\partial^2 \Phi^{LF}}{\partial z^2} - \left( \frac{s^2}{\alpha^2} + \xi^2 \right) \Phi^{LF} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Psi^{LF}}{\partial z^2} - \left( \frac{s^2}{\beta^2} + \xi^2 \right) \Psi^{LF} = 0. \quad (1.5)$$

Здесь  $s$  – параметр преобразования Лапласа;  $\xi$  – параметр преобразования Фурье. Верхние индексы  $L$  и  $F$  при функциях обозначают, соответственно, изображение данной функции в пространстве преобразований Лапласа и преобразований Фурье:

$$f^L(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt; \quad f(t) = L^{-1}[f^L(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} f^L(s) ds;$$

$$f^F(\xi) = L[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx; \quad f(x) = F^{-1}[f^F(\xi)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^F(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

## §2. Решение в изображениях.

Общее решение уравнений (1.5) при нулевых начальных условиях записываем в виде

$$\begin{aligned}\Phi^{LF}(s, z, \xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( A(s, \xi) e^{-\frac{z}{\alpha} P} + \tilde{A}(s, \xi) e^{\frac{z}{\alpha} P} \right); \quad \Psi^{LF}(s, z, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( B(s, \xi) e^{-\frac{z}{\beta} S} + \tilde{B}(s, \xi) e^{\frac{z}{\beta} S} \right); \\ P &= \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}; \quad S = \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Граничные условия (1.3) в пространстве изображений по Лапласу и Фурье имеют вид

$$\sigma_{zz}^{LF}|_{z=0} = \left[ (1 - 2b^2) s^2 \Phi^{LF} + 2\beta^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi^{LF}}{\partial z^2} - i\xi \frac{\partial \Psi^{LF}}{\partial z} \right) \right]_{z=0} = Q^{LF}(s, \xi);$$

$$u_x^{LF}|_{z=0} = \left( i\xi \Phi^{LF} + \frac{\partial \Psi^{LF}}{\partial z} \right)_{z=0} = 0;$$

$$\sigma_{xz}^{LF}|_{z=h} = \beta^2 \left( 2i\xi \frac{\partial \Phi^{LF}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi^{LF}}{\partial z^2} + \xi^2 \Psi^{LF} \right)_{z=h} = 0; \quad u_z^{LF}|_{z=h} = \left( \frac{\partial \Phi^{LF}}{\partial z} - i\xi \Psi^{LF} \right)_{z=h} = 0. \quad (2.2)$$

Неизвестные функции  $A(s, \xi)$ ,  $\tilde{A}(s, \xi)$ ,  $B(s, \xi)$ ,  $\tilde{B}(s, \xi)$  определяем из условий (2.2), в результате чего выражения для перемещения  $u_z$  и напряжения  $\sigma_{zz}$  в пространстве изображений по Лапласу и Фурье записываем следующим образом:

$$u_z^{LF}(s, z, \xi) = Q^{LF}(\xi, s) \frac{1}{s^2} \left[ \frac{P e^{-\frac{z}{\alpha} P} \left(1 - e^{-2\frac{h-z}{\alpha} P}\right)}{\left(1 + e^{-2\frac{h}{\alpha} P}\right)} + \frac{\xi^2 \beta e^{-\frac{z}{\beta} S} \left(1 - e^{-2\frac{h-z}{\beta} S}\right)}{S \left(1 + e^{-2\frac{h}{\beta} S}\right)} \right];$$

$$\sigma_{zz}^{LF}(s, z, \xi) = Q^{LF}(\xi, s) \frac{1}{s^2} \left[ \left(s^2 + 2\beta^2 \xi^2\right) \frac{e^{-\frac{z}{\alpha} P} \left(1 + e^{-2\frac{h-z}{\alpha} P}\right)}{\left(1 + e^{-2\frac{h}{\alpha} P}\right)} - 2\beta^2 \xi^2 \frac{e^{-\frac{z}{\beta} S} \left(1 + e^{-2\frac{h-z}{\beta} S}\right) e^{2\frac{z}{\beta} S}}{\left(1 + e^{-2\frac{h}{\beta} S}\right)} \right]. \quad (2.3)$$

Используя разложения в степенные ряды вида  $(1+y)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n$ , выражения (2.3) представим в виде рядов

$$u_z^{LF}(s, z, \xi) = Q^{LF}(\xi, s) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n U_n^{LF}(s, z, \xi);$$

$$\sigma_{zz}^{LF}(s, z, \xi) = Q^{LF}(s, \xi) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n^{LF}(s, z, \xi), \quad (2.4)$$

где введены такие обозначения:

$$U_n^{LF}(s, z, \xi) = -\frac{P}{s^2 \alpha} \left( e^{-\frac{z_n}{\alpha} P} - e^{-\frac{\bar{z}_n}{\alpha} P} \right) + \frac{\xi^2 \beta}{s^2 S} \left( e^{-\frac{z_n}{\beta} S} - e^{-\frac{\bar{z}_n}{\beta} S} \right);$$

$$g_n^{LF}(s, z, \xi) = \left( 1 + 2\beta^2 \frac{\xi^2}{s^2} \right) \left( e^{-\frac{z_n}{\alpha} P} + e^{-\frac{\bar{z}_n}{\alpha} P} \right) - 2\beta^2 \frac{\xi^2}{s^2} \left( e^{-\frac{z_n}{\beta} S} + e^{-\frac{\bar{z}_n}{\beta} S} \right); \quad (2.5)$$

$$z_n = 2nh + z; \quad \bar{z}_n = 2(n+1)h - z.$$

Задачу обращения интегральных преобразований выражений (2.4) выполним ниже для нескольких видов действующей нагрузки.

### §3. Обращение интегральных преобразований. Фиксированная область действия нагрузки.

Полагаем, что внезапно приложенная нагрузка и ее изображения по Лапласу и Фурье имеют вид

$$Q(t, x) = Q_0 H(t) G(x); \quad Q^L(s, x) = Q_0 \frac{1}{s} G(x); \quad Q^{LF}(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{s} G^F(\xi). \quad (3.1)$$

Здесь  $H(t)$  – единичная функция Хевисайда:  $H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Функция  $G(x)$  задает характер распределения действующего напряжения вдоль оси  $x$ .

Используя соотношения (2.4), (2.5), (3.1), можно представить выражения для изображения напряжения и перемещения в виде, удобном для последующих манипуляций,

$$u_z^{LF}(s, z, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{zn}^{LF}(s, z, \xi); \quad \sigma_{zz}^{LF}(s, z, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{zzn}^{LF}(s, z, \xi), \quad (3.2)$$

где обозначено

$$u_{zn}^{LF}(s, z, \xi) = (-1)^n Q_0 G^F(\xi) \tilde{U}_n^{LF}(s, z, \xi);$$

$$\tilde{U}_n^{LF}(s, z, \xi) = -\left(\frac{1}{\alpha s} + \alpha \frac{\xi^2}{s^3}\right) \frac{1}{P} \left( e^{-\frac{z}{\alpha} P} - e^{-\frac{z}{\alpha} P} \right) + \beta \frac{\xi^2}{s^3} \frac{1}{S} \left( e^{-\frac{z}{\beta} S} - e^{-\frac{z}{\beta} S} \right); \quad (3.3)$$

$$\sigma_{zzn}^{LF}(s, z, \xi) = (-1)^n Q_0 G^F(\xi) \tilde{g}_n^{LF}(s, z, \xi);$$

$$\tilde{g}_n^{LF}(s, z, \xi) = \left( \frac{1}{s} + 2\beta^2 \frac{\xi^2}{s^3} \right) \left( e^{-\frac{z}{\alpha} P} + e^{-\frac{z}{\alpha} P} \right) - 2\beta^2 \frac{\xi^2}{s^3} \left( e^{-\frac{z}{\beta} S} + e^{-\frac{z}{\beta} S} \right). \quad (3.4)$$

Задача состоит в обращении интегральных преобразований. Если удастся определить оригинал функции  $\tilde{U}_n^{LF}(s, z, \xi)$  (или  $\tilde{g}_n^{LF}(s, z, \xi)$ ), т.е. функцию  $\tilde{U}_n(t, z, x)$  (или  $\tilde{g}_n(t, z, x)$ ), то для получения оригинала перемещения  $u_n(t, z, x)$  или напряжения  $\sigma_{zzn}(t, z, x)$  можно применить свертку преобразования Фурье [7] функций  $G(x)$  и  $\tilde{U}_n(t, z, x)$  или, соответственно,  $G(x)$  и  $\tilde{g}_n(t, z, x)$ . Ниже изложена процедура обращения интегральных преобразований в предположении возможности перемены порядка обращения.

**3.1. Перемещение.** Обращение функции  $\tilde{U}_n^{LF}(s, z, \xi)$ , которая задана формулой (3.3), относительно преобразования Фурье выполняется при помощи табличного соотношения [7]

$$F^{-1} \left[ \frac{e^{-z \sqrt{\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2 + \xi^2}}}{\sqrt{\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2 + \xi^2}} \right] = \alpha \frac{1}{\pi} K_0 \left( s \frac{1}{\alpha} \sqrt{x^2 + z^2} \right) \quad (3.5)$$

и известного свойства дифференцирования оригинала [7]

$$F^{-1} \left[ \xi^{2m} f^F(\xi) \right] = (-1)^m \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} f(x); \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Здесь  $K_n(t)$  – модифицированная цилиндрическая функция третьего рода индекса  $n$  [8].

Для обращения преобразования Лапласа используем табличные формулы вида [7]

$$\begin{aligned} L^{-1} \left( K_1 \left( \frac{s}{\alpha} \sqrt{x^2 + z_n^2} \right) \right) &= H \left( t - \frac{\sqrt{x^2 + z_n^2}}{\alpha} \right) \frac{\alpha^2 t}{\sqrt{x^2 + z_n^2} \sqrt{\alpha^2 t^2 - (x^2 + z_n^2)}}; \\ L^{-1} \left( \frac{1}{s} K_0 \left( s \frac{\sqrt{x^2 + z_n^2}}{\alpha} \right) \right) &= H \left( t - \frac{\sqrt{x^2 + z_n^2}}{\alpha} \right) \ln \frac{\alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 - (x^2 + z_n^2)}}{\sqrt{x^2 + z_n^2}}; \\ L^{-1} \left( \frac{1}{s^2} K_1 \left( s \frac{\sqrt{x^2 + z_n^2}}{\alpha} \right) \right) &= H \left( t - \frac{\sqrt{x^2 + z_n^2}}{\alpha} \right) \times \\ &\times \frac{\left( \alpha t \sqrt{\alpha^2 t^2 - (x^2 + z_n^2)} - (x^2 + z_n^2) \ln \frac{\alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 - (x^2 + z_n^2)}}{\sqrt{x^2 + z_n^2}} \right)}{2\alpha \sqrt{x^2 + z_n^2}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Инверсия преобразования Лапласа функции  $u_{zn}^{LF}(s, z, \xi)$ , заданной формулой (3.3), имеет вид

$$u_{zn}^F(t, z, \xi) = (-1)^n Q_0 G^F(\xi) \tilde{U}_n^F(t, z, \xi). \quad (3.8)$$

Если к формуле (3.8) применить свертку преобразования Фурье [7], получим выражение

$$u_{zn}(t, x, z) = (-1)^n Q_0 \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \varsigma) \tilde{U}_n(t, z, \varsigma) d\varsigma. \quad (3.9)$$

Тогда перемещение  $u_z$  можно записать в виде ряда

$$u_z(t, z, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \varsigma) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tilde{U}_n(\tau, z, \varsigma) d\varsigma. \quad (3.10)$$

Формула (3.10) служит основой для вычислений в случае нагрузки вида (3.1). Заметим, что в случае произвольной зависимости действующей нагрузки от времени вместо (3.1) используем выражение

$$Q(t, x) = Q_0 H(t) G(t, x); \quad Q^L(s, x) = Q_0 \frac{1}{s} G(s, x); \quad Q^{LF}(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{s} G^F(s, \xi).$$

Если ввести обозначение  $\bar{G}(t, x) = L^{-1} F^{-1} \{s \bar{G}^{LF}(s, \xi)\}$ , инверсию интегральных преобразований можно получить, используя свертку преобразования Фурье и свертку операционного исчисления [7]

$$u_z(t, z, x) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(t - \tau, x - \varsigma) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tilde{U}_n(\tau, z, \varsigma) d\tau d\varsigma. \quad (3.11)$$

Рассмотрим часто используемый случай нагрузки, действующей в некоторой фиксированной области  $-l \leq x \leq l$ ,  $l = \text{const}$ , так что функция  $G(x)$  в (3.1) имеет вид  $G(x) = f(x) [H(x+l) - H(x-l)]$ .

Здесь  $f(x)$  – некоторая четная функция, задающая распределение нагрузки в указанной области. Для этого случая из соотношений (3.5) – (3.10) получим перемещение  $u_z$  в произвольной точке слоя в произвольный момент времени в следующем виде:

$$u_z(t, z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{zn}(t, x, z); \quad u_{zn}(t, z, x) = Q_0 \frac{1}{\pi} \int_{x-l}^{x+l} f(x - \varsigma) \bar{u}_{zzn}(t, z, \varsigma) d\varsigma;$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{zn}(t, z, \varsigma) = & H\left(\sqrt{\alpha^2 t^2 - z_n^2} - \varsigma\right) U_n^{(\alpha)}(t, z_n, \varsigma) + H\left(\sqrt{\beta^2 t^2 - z_n^2} - \varsigma\right) U_n^{(\beta)}(t, \varsigma, z_n) + \\ & + H\left(\sqrt{\alpha^2 t^2 - \bar{z}_n^2} - \varsigma\right) U_n^{(\alpha)}(t, \bar{z}_n, \varsigma) - H\left(\sqrt{\beta^2 t^2 - \bar{z}_n^2} - \varsigma\right) U_n^{(\beta)}(t, \bar{z}_n, \varsigma). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь обозначено:

$$U_n^{(\alpha)}(t, z_n, \varsigma) = -\frac{(z_n^2 - \varsigma^2) t \sqrt{\alpha^2 t^2 - (\varsigma^2 + z_n^2)}}{2\alpha(\varsigma^2 + z_n^2)^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \ln \frac{\alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 - (\varsigma^2 + z_n^2)}}{\sqrt{\varsigma^2 + z_n^2}};$$

$$U_n^{(\beta)}(t, z_n, \zeta) = \frac{(z_n^2 - \zeta^2)t\sqrt{\beta^2 t^2 - (\zeta^2 + z_n^2)^2}}{2\beta(\zeta^2 + z_n^2)^2} - \frac{1}{2\beta^2} \ln \frac{\beta t + \sqrt{\beta^2 t^2 - (\zeta^2 + z_n^2)^2}}{\sqrt{\zeta^2 + z_n^2}};$$

$$U_n^{(\alpha, \beta)}(t, \zeta, \bar{z}_n) = U_n^{(\alpha, \beta)}(t, \zeta, z_n) \Big|_{z_n = \bar{z}_n}. \quad (3.13)$$

Если внезапно приложенная нагрузка (3.1) распределена вдоль всей оси  $x$ , то есть  $Q(t, x) = Q_0 H(t) f(x)$ , функция  $u_{zn}(t, z, x)$  в (3.9) имеет следующий вид:

$$u_{zn}(t, z, x) = \frac{Q_0}{\pi} \left\{ H\left(\alpha t - \sqrt{x^2 + z_n^2}\right) \int_0^{\sqrt{\alpha^2 t^2 - z_n^2}} [f(x+\zeta) + f(x-\zeta)] U_n^{(\alpha)}(t, z_n, \zeta) d\zeta - \right.$$

$$- H\left(\alpha t - \sqrt{x^2 + \bar{z}_n^2}\right) \int_0^{\sqrt{\alpha^2 t^2 - \bar{z}_n^2}} [f(x+\zeta) + f(x-\zeta)] U_n^{(\alpha)}(t, \bar{z}_n, \zeta) d\zeta + \quad (3.14)$$

$$+ H\left(\beta t - \sqrt{x^2 + z_n^2}\right) \int_0^{\sqrt{\beta^2 t^2 - z_n^2}} [f(x+\zeta) + f(x-\zeta)] U_n^{(\beta)}(t, z_n, \zeta) d\zeta -$$

$$\left. - H\left(\beta t - \sqrt{x^2 + \bar{z}_n^2}\right) \int_0^{\sqrt{\beta^2 t^2 - \bar{z}_n^2}} [f(x+\zeta) + f(x-\zeta)] U_n^{(\beta)}(t, \bar{z}_n, \zeta) d\zeta \right\}.$$

Здесь  $U_n^{(\alpha, \beta)}$  заданы соотношениями (3.13).

**3.2. Напряжение.** Оригинал напряжения получаем посредством аналогичной процедуры. Функция  $\tilde{g}_n^{LF}(s, \xi, z)$  в формуле (3.4) содержит слагаемые вида

$$q_n^{LF}(s, z, \xi) = \frac{\xi^m}{s^k} e^{-Z_n \sqrt{\left(\frac{s}{\gamma}\right)^2 + \xi^2}}, \quad (3.15)$$

где введенные обозначения  $m, k, \gamma, Z_n$  принимают следующие значения:  $m = 0, 2; k = 1, 3; \gamma = \alpha, \beta; Z_n = z_n, \bar{z}_n$ .

Для обращения преобразования Фурье функций  $q_n^{LF}(s, \xi, z)$  воспользуемся табличным соотношением

$$F^{-1}\left(e^{-z_n \sqrt{\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2 + \xi^2}}\right) = s \frac{z_n}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x^2 + z_n^2}} K_1\left(s \frac{1}{\alpha} \sqrt{x^2 + z_n^2}\right) \quad (3.16)$$

и свойством (3.6), а инверсия преобразования Лапласа реализуется на основе формул вида (3.7). В результате получаем следующие оригиналы:

$$L^{-1} F^{-1}\left(\frac{1}{s} e^{-\frac{z_n}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}}\right) = L^{-1}\left(\frac{z_n}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x^2 + z_n^2}} K_1\left(s \frac{1}{\alpha} \sqrt{x^2 + z_n^2}\right)\right) =$$

$$= H\left(t - \frac{\sqrt{x^2 + z_n^2}}{\alpha}\right) \frac{\alpha t z_n}{(x^2 + z_n^2) \sqrt{\alpha^2 t^2 - (x^2 + z_n^2)}};$$

$$\begin{aligned}
& L^{-1}F^{-1}\left(\frac{\xi^2}{s^3}e^{-\frac{z_n}{\alpha}\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}}\right)= \\
& = L^{-1}\left(-\frac{1}{\alpha}z_nR(s,x,z_n)\right)=-\frac{1}{\alpha}z_nH\left(t-\frac{\sqrt{x^2+z_n^2}}{\alpha}\right)\left[\frac{x^2}{(x^2+z_n^2)^2}\frac{t}{\sqrt{\alpha^2t^2-(x^2+z_n^2)}}+\right. \\
& \left.+\frac{t(3x^2-z_n^2)}{(x^2+z_n^2)^3}\sqrt{\alpha^2t^2-(x^2+z_n^2)}\right]; \\
& R(s,x,z_n)=\frac{x^2}{\alpha^2(x^2+z_n^2)^{\frac{3}{2}}}K_1\left(s\frac{\sqrt{x^2+z_n^2}}{\alpha}\right)+\frac{2(3x^2-z_n^2)}{(x^2+z_n^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{s^2}K_1\left(s\frac{\sqrt{x^2+z_n^2}}{\alpha}\right)+ \\
& +\frac{(3x^2-z_n^2)}{\alpha(x^2+z_n^2)^2}\frac{1}{s}K_0\left(s\frac{\sqrt{x^2+z_n^2}}{\alpha}\right). \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Оригинал выражения  $\xi^2s^{-3}e^{-\frac{z_n}{\beta}\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}}$ , а также выражений, содержащих  $\bar{z}_n$ , получаем заменой в формулах (3.17), соответственно,  $\alpha$  на  $\beta$  и  $z_n$  на  $\bar{z}_n$ .

Используя выражения типа (3.17), функцию  $\tilde{g}_n(t, z, x)$  запишем в следующем виде:

$$\tilde{g}_n(t, z, x) = \frac{1}{\pi} \left\{ \begin{aligned} & H(\alpha t - r_n)F_n^{(\alpha)}(t, z_n, x) + H(\alpha t - \bar{r}_n)F_n^{(\alpha)}(t, \bar{z}_n, x) + \\ & + H(\beta t - r_n)F_n^{(\beta)}(t, z_n, x) + H(\beta t - \bar{r}_n)F_n^{(\beta)}(t, \bar{z}_n, x) \end{aligned} \right\}, \tag{3.18}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}
F_n^{(\alpha)}(t, z_n, x) &= tz_n \left[ \frac{\alpha^2 r_n^2 - 2\beta^2 x^2}{\alpha r_n^4 \sqrt{\alpha^2 t^2 - r_n^2}} - \frac{2\beta^2 (3x^2 - z_n^2)}{\alpha r_n^6} \sqrt{\alpha^2 t^2 - r_n^2} \right]; \\
F_n^{(\beta)}(t, z_n, x) &= 2\beta tz_n \left[ \frac{x^2}{r_n^4 \sqrt{\beta^2 t^2 - r_n^2}} + \frac{(3x^2 - z_n^2)}{r_n^6} \sqrt{\beta^2 t^2 - r_n^2} \right]; \tag{3.19}
\end{aligned}$$

$$F_n^{(\alpha),(\beta)}(t, \bar{z}_n, x) = F_n^{(\alpha),(\beta)}(t, z_n, x) \Big|_{z_n=\bar{z}_n};$$

$$r_n = \sqrt{x^2 + z_n^2}; \quad z_n = 2nh + z; \quad \bar{z}_n = 2(n+1)h - z.$$

Инверсия преобразования Лапласа функции  $\sigma_{zzn}^{LF}(s, z, \xi)$  из формулы (3.4) имеет вид

$$\sigma_{zzn}^F(t, z, \xi) = (-1)^n Q_0 G^F(\xi) \tilde{g}_n^F(t, z, \xi). \tag{3.20}$$

Применив к формуле (3.20) свертку преобразования Фурье [7], получим следующее равенство:

$$\sigma_{zzn}(t, z, x) = (-1)^n Q_0 \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \zeta) \tilde{g}_n(t, z, \zeta) d\zeta \quad (3.21)$$

и тогда напряжение  $\sigma_{zz}$  запишем в виде ряда

$$\sigma_{zz}(t, z, x) = Q_0 \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \zeta) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \bar{g}_n(\tau, z, \zeta) d\zeta. \quad (3.22)$$

В случае произвольной зависимости действующей нагрузки от времени инверсию интегральных преобразований запишем в виде свертки преобразования Фурье и свертки операционного исчисления, а именно:

$$\sigma_{zz}(t, x, z) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(t - \tau, x - \xi) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \bar{g}_n(\tau, \xi, z) d\tau d\xi.$$

Здесь, как и ранее, обозначено  $\bar{G}(t, x) = L^{-1} F^{-1} \{s \bar{G}^{LF}(s, \xi)\}$ .

Из соотношений (3.21), (3.22) получаем следующее выражение для напряжения  $\sigma_{zz}$  в произвольной точке полуплоскости  $(x, z)$  в произвольный момент времени  $t$  в случае, когда нагрузка внезапно возникает и остается постоянной в фиксированной области границы  $(-l, l)$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(t, z, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sigma_{zzn}(t, z, x); \quad \sigma_{zzn}(t, z, x) = Q_0 \frac{1}{\pi} \int_{x-l}^{x+l} f(x - \zeta) \bar{\sigma}_{zzn}(t, z, \zeta) d\zeta; \\ \bar{\sigma}_{zzn}(t, z, \zeta) &= H\left(\sqrt{\alpha^2 t^2 - z_n^2} - \zeta\right) F_n^{(\alpha)}(t, z_n, \zeta) + H\left(\sqrt{\beta^2 t^2 - z_n^2} - \zeta\right) F_n^{(\beta)}(t, z_n, \zeta) + \\ &+ H\left(\sqrt{\alpha^2 t^2 - \bar{z}_n^2} - \zeta\right) F_n^{(\alpha)}(t, \bar{z}_n, \zeta) + H\left(\sqrt{\beta^2 t^2 - \bar{z}_n^2} - \zeta\right) F_n^{(\beta)}(t, \bar{z}_n, \zeta). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Здесь функции  $F_n^{(\alpha),(\beta)}(t, z_n, \zeta)$ ,  $F_n^{(\alpha),(\beta)}(t, \bar{z}_n, \zeta)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , заданы формулами (3.19).

Если зависимость нагрузки от времени в выражении (3.1) определяем некоторой функцией достаточно общего вида  $q(t)H(t)$ , выражение (3.23) служит в качестве исходного, а искомое напряжение вычисляем на основе теоремы о свертке операционного исчисления

$$\sigma_{zz}(t, x, z) \Big|_{q(t)} = \int_0^t q(t - \tau) \sigma_{zz}(\tau, x, z) d\tau. \quad (3.24)$$

Наконец, если внезапно приложенная нагрузка (3.1) распределена вдоль всей оси  $x$ , выражение для  $n$ -го члена ряда для напряжения  $\sigma_{zzn}(t, x, z)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zzn}(t, x, z) &= Q_0 \frac{1}{\pi} \left\{ H(\alpha t - r_n) \int_0^{\sqrt{\alpha^2 t^2 - z_n^2}} [f(x - \xi) + f(x + \xi)] F_n^{(\alpha)}(t, z_n, \xi) d\xi + \right. \\ &+ H(\alpha t - \bar{r}_n) \int_0^{\sqrt{\alpha^2 t^2 - \bar{z}_n^2}} [f(x - \xi) + f(x + \xi)] F_n^{(\alpha)}(t, \bar{z}_n, \xi) d\xi + \\ &+ H(\beta t - r_n) \int_0^{\sqrt{\beta^2 t^2 - z_n^2}} [f(x - \xi) + f(x + \xi)] F_n^{(\beta)}(t, z_n, \xi) d\xi + \\ &\left. + H(\beta t - \bar{r}_n) \int_0^{\sqrt{\beta^2 t^2 - \bar{z}_n^2}} [f(x - \xi) + f(x + \xi)] F_n^{(\beta)}(t, \bar{z}_n, \xi) d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Функции  $F_n^{(\alpha),(\beta)}(t, z, \xi)$  заданы соотношениями (3.19).

Таким образом, соотношения (3.9) – (3.11), а также (3.21) – (3.25) дают замкнутое аналитическое решение сформулированной в §1 нестационарной задачи со смешанными граничными условиями в случае произвольной зависимости действующей нагрузки от времени и ее произвольного распределения вдоль фиксированного участка границы, который является областью задания нагрузки. Вид полученных выражений показывает, что фигурирующие в них ряды составлены из последовательно отраженных от граничных поверхностей  $z = h$  и  $z = 0$  волн расширения и сдвига. При этом  $n$ -й член ряда, содержащий функцию  $U_n^{(\alpha)}(t, \zeta, z_n)$  (или, соответственно,  $F_n^{(\alpha)}(t, \zeta, z_n)$ ), соответствует  $n$ -й волне расширения, отраженной от границы  $z = 0$ , тогда как член ряда, содержащий функцию  $U_n^{(\alpha)}(t, \zeta, \bar{z}_n)$  (или  $F_n^{(\alpha)}(t, \xi, \bar{z}_n)$ ), соответствует волне расширения,  $n$  раз отразившейся от поверхности  $z = h$ . Аналогичное утверждение относится к отраженным волнам сдвига, представленным слагаемыми с верхним индексом  $\beta$ . Ограничивая рассмотрение конечным интервалом времени, следует ряды по  $n$  заменить конечными суммами от 0 до  $N$ , где  $N$  – число отражений, учитываемых в решении.

#### §4. Обращение интегральных преобразований. Переменная область действия нагрузки.

Как отмечалось выше, принятая постановка задачи со смешанными краевыми условиями исключает появление поверхностных волн. Поэтому ниже, рассматривая изменяющуюся во времени область действия нагрузки, ограничимся определением основных характеристик волнового процесса только в поперечном направлении, а именно – вдоль оси симметрии задачи. Такое ограничение позволяет для некоторых видов нестационарной нагрузки получить простое аналитическое решение путем совместного обращения интегральных преобразований [10].

**4.1. Постоянная скорость расширения нагрузки.** Начнем с напряжения. Предположим, что приложенная к границе полуплоскости нагрузка  $Q(t, x)$  внезапно возникает и в дальнейшем распространяется по поверхности  $z = 0$  с постоянной скоростью  $k$ . Функция  $Q(t, x)$  и ее изображения в этом случае имеют вид

$$Q(t, x) = Q_0 H(kt - |x|); \quad Q^F(t, \xi) = 2Q_0 \frac{\sin kt\xi}{\xi}; \quad Q^{LF}(s, \xi) = 2 \frac{Q_0 k}{s^2 + k^2 \xi^2}. \quad (4.1)$$

Тогда, согласно (2.4) и (4.1), изображение напряжения  $\sigma_{zz}$  запишем в форме

$$\sigma_{zz}^{LF}(s, z, \xi) = 2Q_0 k \frac{1}{s^2 + k^2 \xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n^{LF}(s, z, \xi),$$

где  $g_n^{LF}(s, z, \xi)$  задано первой строкой формул (2.5).

Если записать инверсию преобразования Фурье на оси симметрии задачи ( $x = 0$ )

$$\sigma_{zz}^L(s, z, 0) = 2Q_0 k \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2 + k^2 \xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n^{LF}(s, z, \xi) d\xi$$

и выполнить замену переменной интегрирования (полагая  $s$  вещественным положительным [4])

$$\xi = s\eta, \quad d\xi = sd\eta, \quad (4.2)$$

получим в пространстве изображений по Лапласу выражение

$$\sigma_{zz}^L(s, z, 0) = \frac{2}{\pi} Q_0 k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{s} [M_{\alpha}^L(s, z_n) + M_{\alpha}^L(s, \bar{z}_n) - M_{\beta}^L(s, z_n) - M_{\beta}^L(s, \bar{z}_n)]$$

$$\left\{ M_{\alpha}^L(s, z_n) = \int_0^{\infty} \frac{1 + 2\beta^2 \eta^2}{(1 + k^2 \eta^2)} e^{-s \frac{z_n}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2}} d\eta; \quad M_{\beta}^L(s, z_n) = \int_0^{\infty} \frac{2\beta^2 \eta^2}{(1 + k^2 \eta^2)} e^{-s \frac{z_n}{\beta} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2}} d\eta \right\}.$$

Если в подынтегральном выражении  $M_{\alpha}^L(s, z_n)$  выполнить замену переменного  $\frac{z_n}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} = t$ , в выражении  $M_{\alpha}^L(s, \bar{z}_n)$  – замену  $\frac{\bar{z}_n}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} = t$ , и аналогичные замены выполнить для  $M_{\beta}^L(s, z_n)$  и  $M_{\beta}^L(s, \bar{z}_n)$ , получим для каждого выражения формулу прямого преобразования Лапласа. Следовательно, подынтегральное выражение в этой формуле является оригиналом. Если, кроме того, произвести необходимое интегрирование, отвечающее имеющемуся в пространстве изображений множителю  $1/s$ , получаем окончательно следующее выражение для напряжения в пространстве оригиналов:

$$\sigma_{zz}(t, z, 0) = \frac{2}{\pi} Q_0 \frac{1}{k^2} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ -H(\alpha t - z_n) \left[ -2k\beta^2 \frac{\sqrt{\alpha^2 t^2 - z_n^2}}{\alpha z_n} + (2\beta^2 - k^2) \arctan k \frac{\sqrt{\alpha^2 t^2 - z_n^2}}{\alpha z_n} \right] - \right.$$

$$\left. -H(\alpha t - \bar{z}_n) \left[ -2k\beta^2 \frac{\sqrt{\alpha^2 t^2 - \bar{z}_n^2}}{\alpha \bar{z}_n} + (2\beta^2 - k^2) \arctan k \frac{\sqrt{\alpha^2 t^2 - \bar{z}_n^2}}{\alpha \bar{z}_n} \right] + \right. \quad (4.3)$$

$$\left. +H(\beta t - z_n) \frac{2\beta^2}{z_n} \left[ -k \frac{\sqrt{\beta^2 t^2 - z_n^2}}{\beta z_n} + \arctan k \frac{\sqrt{\beta^2 t^2 - z_n^2}}{\beta z_n} \right] + \right.$$

$$\left. +H(\beta t - \bar{z}_n) \frac{2\beta^2}{\bar{z}_n} \left[ -k \frac{\sqrt{\beta^2 t^2 - \bar{z}_n^2}}{\beta \bar{z}_n} + \arctan k \frac{\sqrt{\beta^2 t^2 - \bar{z}_n^2}}{\beta \bar{z}_n} \right] \right\};$$

$$z_n = 2nh + z; \quad \bar{z}_n = 2(n+1)h - z.$$

Выражение (4.3) представляет в замкнутой аналитической форме распределение искомого напряжения вдоль оси  $z$  в произвольный момент времени в случае, если действующая нагрузка имеет вид (4.1), т. е. распространяется по поверхности  $z = 0$  с постоянной скоростью  $k$  и постоянной амплитудой  $Q_0$ .

Перемещение  $u_z$  вдоль оси  $z$  определяется из (2.4), (4.1) аналогичным образом. Обращение преобразования Фурье при  $x=0$  имеет вид

$$u_z^L \Big|_{x=0} = \frac{2}{\pi} Q_0 k \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2 + k^2 \xi^2} \left[ -\frac{1}{\alpha} (1 + \alpha^2 \frac{\xi^2}{s^2}) \frac{1}{P} e^{-\frac{z}{\alpha} P} + \beta \frac{\xi^2}{s^2} \frac{1}{S} e^{-\frac{z}{\beta} S} \right] d\xi.$$

Замена переменного (4.2) под знаком интеграла приводит к следующему выражению:

$$u_z^L(s, z, 0) = \frac{2}{\pi} Q_0 k \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1 + k^2 \eta^2)} \left\{ \begin{aligned} & \left[ -\frac{1}{\alpha} (1 + \alpha^2 \eta^2) \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2}} \frac{1}{s^2} \left[ e^{-s \frac{z_n}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2}} - e^{-s \frac{\bar{z}_n}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2}} \right] \right] + \\ & \left[ +\beta \eta^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 \eta^2}} \frac{1}{s^2} \left[ e^{-s \frac{z_n}{\beta} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2}} - e^{-s \frac{\bar{z}_n}{\beta} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2}} \right] \right] \end{aligned} \right\} d\eta.$$

Выполнив под знаком интеграла инверсию преобразования Лапласа на основе известной табличной формулы  $L^{-1}[1/s^2 e^{-sb}] = (t-b)H(t-b)$  и произведя замены переменной интегрирования  $Z/\gamma\sqrt{1+\gamma^2\eta^2} = t$ ,  $\gamma = \alpha, \beta$ ,  $Z = z_n, \bar{z}_n$ , имеем окончательно

$$\begin{aligned}
u_z(t, z, 0) = & \frac{2}{\pi} Q_0 k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ -H(\alpha t - z_n) \frac{1}{\alpha} \int_0^{f_\alpha(t, z_n)} \frac{\sqrt{1+\alpha^2\eta^2}}{(1+k^2\eta^2)} \left( t - z_n \frac{\sqrt{1+\alpha^2\eta^2}}{\alpha} \right) d\eta + \right. \\
& + H(\alpha t - \bar{z}_n) \frac{1}{\alpha} \int_0^{f_\alpha(t, \bar{z}_n)} \frac{\sqrt{1+\alpha^2\eta^2}}{(1+k^2\eta^2)} \left( t - \bar{z}_n \frac{\sqrt{1+\alpha^2\eta^2}}{\alpha} \right) d\eta + \\
& + H(\beta t - z_n) \beta \int_0^{f_\beta(t, z_n)} \frac{\eta^2}{\sqrt{1+k^2\eta^2}} \left( \frac{t}{\sqrt{1+\beta^2\eta^2}} - \frac{z_n}{\beta} \right) d\eta - \\
& \left. - H(\beta t - \bar{z}_n) \beta \int_0^{f_\beta(t, \bar{z}_n)} \frac{\eta^2}{\sqrt{1+k^2\eta^2}} \left( \frac{t}{\sqrt{1+\beta^2\eta^2}} - \frac{\bar{z}_n}{\beta} \right) d\eta \right]; \\
f_\alpha(t, z_n) = & \frac{\sqrt{\alpha^2 t^2 - z_n^2}}{\alpha z_n}; \quad f_\beta(t, z_n) = \frac{\sqrt{\beta^2 t^2 - z_n^2}}{\beta z_n}; \quad z_n = 2nh + z; \quad \bar{z}_n = 2(n+1)h - z. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

**4.2. Переменная скорость расширения нагрузки.** Если внезапно возникшая нагрузка такова, что ее область действия расширяется вдоль границы  $z = 0$  с переменной скоростью, пропорциональной  $1/\sqrt{|x|}$ , функция  $Q(t, x)$  имеет вид

$$Q(t, x) = Q_0 H(kt - x^2); \quad Q^L(s, x) = Q_0 \frac{1}{s} e^{-\frac{x^2}{k}s}; \quad Q^{LF}(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{2s^{3/2}} \sqrt{k\pi} e^{-\frac{\xi^2 k}{4s}}. \quad (4.5)$$

После удовлетворения граничным условиям выражение для изображения напряжения будет таким:

$$\sigma_{zz}^{LF}(s, z, \xi) = Q_0 \frac{1}{2} \sqrt{k\pi} \frac{1}{s^{3/2}} e^{-\frac{\xi^2 k}{4s}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n^{LF}(s, z, \xi).$$

Выполнив инверсию преобразования Фурье на оси  $z$  и сделав замену переменного (4.2), получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^L(s, z, 0) = & Q_0 \frac{1}{2} \sqrt{k\pi} \frac{1}{s^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ R_\alpha^L(s, z_n) + R_\alpha^L(s, \bar{z}_n) - R_\beta^L(s, z_n) - R_\beta^L(s, \bar{z}_n) \right]; \\
R_\alpha^L(s, z_n) = & \int_0^\infty e^{-s\left(\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{z_n}{\alpha} \sqrt{1+\alpha^2\eta^2}\right)} (1+2\beta^2\eta^2) d\eta; \quad R_\beta^L(s, z_n) = 2\beta^2 \int_0^\infty e^{-s\left(\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{z_n}{\beta} \sqrt{1+\beta^2\eta^2}\right)} \eta^2 d\eta.
\end{aligned}$$

Последовательно выполняя под знаком интеграла замену переменного  $\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{z_n}{\alpha} \sqrt{1+\alpha^2\eta^2} = t$  в подынтегральном выражении  $R_\alpha^L(s, z)$ , и  $\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{z_n}{\beta} \sqrt{1+\beta^2\eta^2} = t$  в подынтегральном выражении  $R_\beta^L(s, z_n)$ , произведя аналогичные замены в подынтегральном выражении

$R_1^L(s, \bar{z}_n)$  и  $R_2^L(s, \bar{z}_n)$ , а также используя табличное соотношение [7]  $L^{-1}\{s^{-1/2}e^{-sx}\} = H(t-x)\pi^{-1/2}(t-x)^{-1/2}$  и применяя к полученным оригиналам теорему о свертке операционного исчисления, окончательно будем иметь следующее выражение для напряжения  $\sigma_{zz}$  в произвольной точке оси  $z$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(t, z, x=0) = & \sqrt{\frac{k}{\pi}} Q_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ -H(\alpha t - z_n) \int_{\frac{z_n}{\alpha}}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} S_1^{(\alpha)}(\tau, z_n) - \right. \\ & \left. -H(\alpha t - \bar{z}_n) \int_{\frac{\bar{z}_n}{\alpha}}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} S_1^{(\alpha)}(\tau, \bar{z}_n) + \right. \\ & \left. +H(\beta t - z_n) \frac{8\beta^2}{k^2} \int_{\frac{z_n}{\beta}}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} S^{(\beta)}(\tau, z_n) d\tau + H(\beta t - \bar{z}_n) \frac{8\beta^2}{k^2} \int_{\frac{\bar{z}_n}{\beta}}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} S^{(\beta)}(\tau, \bar{z}_n) d\tau \right\}, \quad (4.6) \end{aligned}$$

где приняты обозначения

$$S^{(\alpha)}(\tau, z_n) = \frac{\left[ 1 + 2\beta^2 \frac{4}{k^2} T_2^{(\alpha)}(\tau, z_n) \right] \left[ 2z - T_3^{(\alpha)}(\tau, z_n) \right]}{\sqrt{T_2^{(\alpha)}(\tau, z_n) T_3^{(\alpha)}(\tau, z_n)}};$$

$$S^{(\beta)}(\tau, z_n) = \frac{\sqrt{T_2^{(\beta)}(\tau, z_n)} \left[ 2z - T_3^{(\beta)}(\tau, z_n) \right]}{T_3^{(\beta)}(\tau, z_n)};$$

$$T_2^{(\gamma)}(\tau, z_n) = k\tau + 2z_n^2 - z_n T_3^{(\gamma)}(\tau, z_n); \quad T_3^{(\gamma)}(\tau, z_n) = \sqrt{4k\tau + 4z_n^2 + \frac{k^2}{\gamma^2}}, \quad \gamma = \alpha, \beta.$$

Аналогично определяем перемещение, которое окончательно имеет вид

$$\begin{aligned} u_z(t, z, 0) = & Q_0 \sqrt{\frac{k}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ H(\alpha t - z_n) \frac{1}{\alpha} \int_{\frac{z_n}{\alpha}}^t \sqrt{t-\tau} R^{(\alpha)}(\tau, z_n) d\tau - \right. \\ & \left. -H(\alpha t - \bar{z}_n) \frac{1}{\alpha} \int_{\frac{\bar{z}_n}{\alpha}}^t \sqrt{t-\tau} R^{(\alpha)}(\tau, \bar{z}_n) d\tau - \right. \\ & \left. -H(\beta t - z_n) \frac{4\beta}{k^2} \int_{\frac{z_n}{\beta}}^t R^{(\beta)}(t, z_n) d\tau + H(\beta t - \bar{z}_n) \frac{4\beta}{k^2} \int_{\frac{\bar{z}_n}{\beta}}^t R^{(\beta)}(t, \bar{z}_n) d\tau \right\}; \quad (4.7) \end{aligned}$$

$$R^{(\alpha)}(t, z_n) = \sqrt{1 + \alpha^2 \frac{4}{k^2} T_2^{(\alpha)}(\tau, z_n)} \frac{2z_n - T_3^{(\alpha)}(\tau, z_n)}{\sqrt{T_2^{(\alpha)}(\tau, z_n) T_3^{(\alpha)}(\tau, z_n)}};$$

$$R^{(\beta)}(t, z_n) = \frac{\sqrt{T_2^{(\beta)}(\tau, z_n)} \left[ 2z_n - T_3^{(\beta)}(\tau, z_n) \right]}{T_3^{(\beta)}(\tau, z_n) \sqrt{1 + \beta^2 \frac{4}{k^2} T_2^{(\beta)}(\tau, z_n)}}.$$

Таким образом, в §3 при смешанных условиях на граничных поверхностях упругого слоя получены в замкнутом виде точные решения нестационарных задач (упругие перемещение и напряжение на оси симметрии задачи) в случае расширяющейся с постоянной или переменной скоростью области приложения нагрузки.

### §5. Числовые результаты.

Предложенный подход и полученные формулы для перемещения и напряжения позволяют вычислить конкретные характеристики напряженно-деформированного состояния в произвольной точке упругого слоя для различных видов нестационарной нагрузки. Рассмотрим несколько примеров, при вычислении которых были выбраны следующие конкретные значения исходных параметров:

$$Q_0 = 1,0; \alpha = 1,0; \beta = 0,5; h = 1,0; l = 1,0. \quad (5.1)$$

**Пример 1.** Выберем функцию  $Q(t,x)$ , определяющую действующую на слой нагрузку, в виде

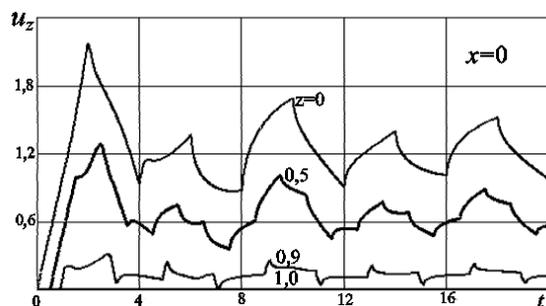
$$Q(t,x) = -Q_0 H(t) [H(x+l) - H(x-l)], \quad (5.2)$$

т. е. примем, что на отрезке  $|x| \leq l$  напряжение  $\sigma_{zz}$  внезапно возникает при  $t = 0$  и в дальнейшем остается постоянным во времени и на отрезке. В этом более простом случае функция  $f(x)$ , задающая распределение напряжения на указанном отрезке, в формуле (3.14) равна единице и для перемещения и напряжения, вместо (3.12) и (3.23), получаем формулы:

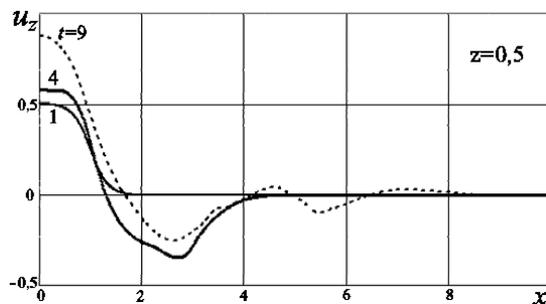
$$u_{zn}(t,z,x) = Q_0 \frac{1}{\pi} \int_{x-l}^{x+l} \bar{u}_{znn}(t,z,\zeta) d\zeta; \quad \sigma_{znn}(t,x,z) = \int_{x-l}^{x+l} \bar{\sigma}_{znn}(t,z,\zeta) d\zeta, \quad (5.3)$$

где  $\bar{u}_{znn}(t,z,\zeta)$ ,  $\bar{\sigma}_{znn}(t,\xi,z)$  заданы второй и третьей строками в (3.12) и (3.23), соответственно. Для вычислений использован пакет Scilab 5.4.

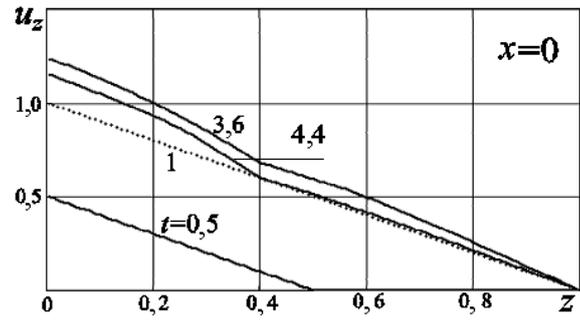
Ниже, рис. 2,  $a - b$  представляют перемещение, а  $2, z - e$  – напряжение.



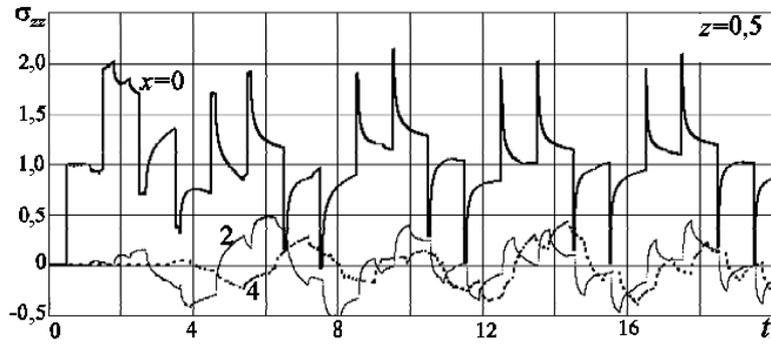
*a*



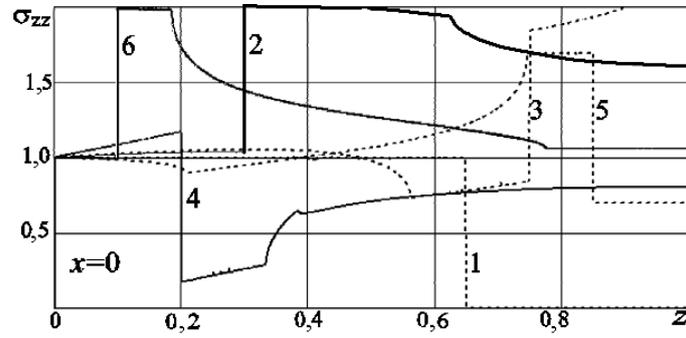
*б*



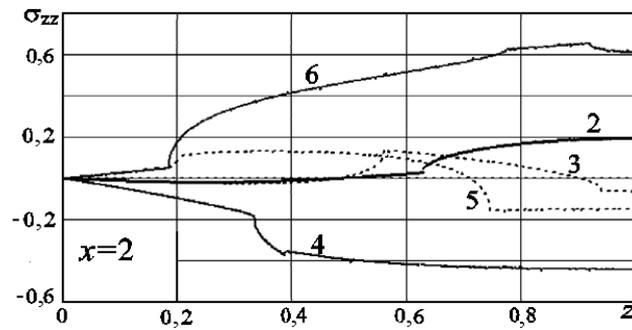
б



в



г



д

Рис. 2

На рис. 2, *a* упругое перемещение  $u_z$  представлено как функция времени при  $x=0$  в четырех точках оси  $z$ :  $z=0$ ,  $z=0,5$ ,  $z=0,9$  и  $z=1$  (последнее значение  $z$  использовалось для проверки выполнения соответствующего граничного условия). Интервал времени охватывает 20 отражений от границ слоя. Пиковые значения графиков отвечают моментам прихода в рассматриваемую точку волны расширения, отраженной от тыльной границы. Можно заметить, что первое такое значение является максимальным. Рис. 2, *б* изображает перемещение как функцию  $x$  в сечении  $z=0,5$  в моменты времени  $t=1$ ,  $t=4$ ,  $t=9$  и показывают развивающуюся со временем знакопеременность распределения перемещения. Напомним, что графики построены в безразмерных обозначениях, и единице времени соответствует интервал, в течение которого волна расширения проходит толщину слоя. На рис. 2, *в* изображено распределение перемещения вдоль оси  $z$  в различные моменты времени. Как видно из графиков, указанное распределение близко к линейному. Рис. 2, *г*, *д*, *е* представляют напряжение. На рис. 2, *г* напряжение  $\sigma_{zz}$  изображено как функция времени ( $0 \leq t \leq 20$ ) в срединном сечении слоя ( $z=0,5$ ) в трех точках:  $x=0$ ,  $x=2$  и  $x=4$ . На рис. 2, *д* напряжение как функция  $z$  при  $x=0$  представлено в фиксированные моменты времени: 1)  $t=0,65$ ; 2)  $t=1,70$ ; 3)  $t=2,75$ ; 4)  $t=3,80$ ; 5)  $t=4,85$ ; 6)  $t=5,9$ . Сплошной линией изображены графики для случая, когда волна расширения движется к тыльной поверхности  $z=h$  (кривые 1, 3, 5,); пунктиром – когда волна расширения движется к лицевой поверхности  $z=0$  (кривые 2, 4, 6). Между соседними кривыми первой группы, как и между кривыми второй группы, отличие во времени составляет 2 интервала прохождения волной расширения толщины слоя. Моменты времени, для которых построены графики, выбраны дробными для того, чтобы избежать слияния кривых на рисунках. Рис. 2, *е* показывает напряжение как функцию  $z$  в сечении  $x=2$  в те же моменты времени, что и на рис. 2, *д*, так что номера кривых на обоих рисунках совпадают (кривая 1 на рис. 2, *е* отсутствует, так как в момент времени  $t=0,65$  рожденные волны не достигают сечения  $x=2$ ).

Представленные графики позволяют отметить характерные особенности напряженного состояния при распространения нестационарных волн как в направлении оси  $x$ , так и в поперечном направлении. На оси симметрии ( $x=0$ ) волна расширения обуславливает скачек напряжения в момент прихода в рассматриваемую точку. В свою очередь, волна искажения определяет лишь излом кривой напряжения. Жирная сплошная кривая на рис. 2, *г* демонстрирует множественные скачки напряжения на оси симметрии слоя ( $x=0$ ) в сечении  $z=0,5$  в моменты прихода фронта волны расширения, отраженной поочередно от тыльной и лицевой поверхности слоя. Скачок напряжения при каждом отражении сохраняет практически постоянное значение, но его длительность во времени уменьшается с каждым последующим отражением (происходит как бы заострение пика напряжения). Это означает, что в реальной среде с обязательным присутствием вязкости материала максимальные амплитуды будут уменьшаться с каждым отражением. Анализ кривых на рис. 2, *д*, *е* показывает существенное различие в распределении напряжения в поперечном сечении слоя в зависимости от значения абсциссы  $x$ . Так, на оси симметрии ( $x=0$ ) имеют место четко обозначенные скачки напряжения. При этом прямая (кривая 1) и первая отраженная (кривая 2) волны расширения имеют вид единичной ступеньки, тогда как характер распределения напряжения по толщине слоя при последующих отражениях все больше отличается от ступенчатого вследствие влияния волны искажения и постепенного "растекания" энергии волны в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны. Скачки напряжения, типичные для сечения  $x=0$ , заменяются достаточно плавным ростом напряжения в зафронтной области в сечениях  $x \neq 0$ . При этом напряжение может принимать как положительные, так и отрицательные значения, и соответствующие кривые группируются около нулевого значения.

**Пример 2.** Внезапно приложенная нагрузка распределена по границе  $z=0$  следующим образом:

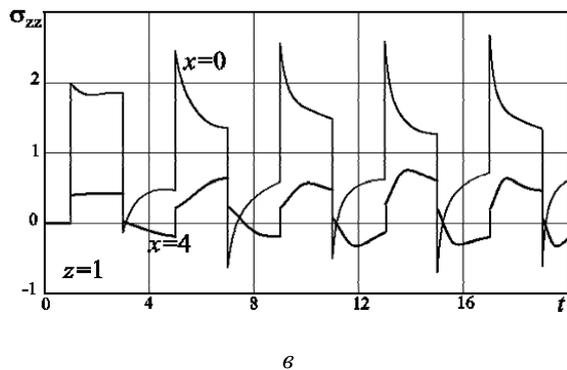
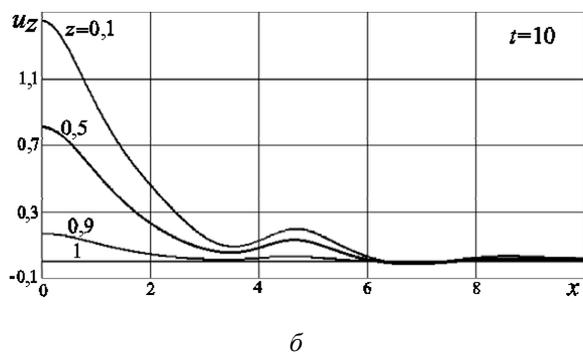
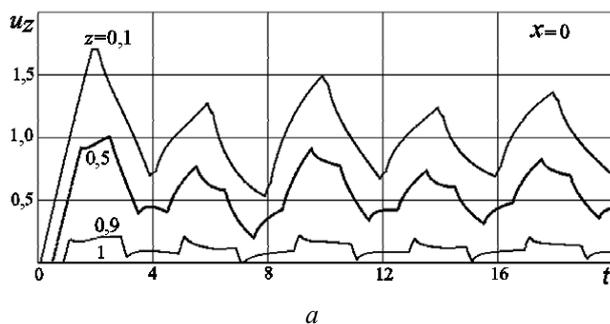
$$Q(t, x) = Q_0 H(t) \frac{1}{x^2 + k^2}; \quad Q^L(s, x) = Q_0 \frac{1}{s} \frac{1}{x^2 + k^2}; \quad Q^{LF}(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{s} \frac{1}{k} e^{-k\xi}. \quad (5.4)$$

Такой тип нагрузки, в частности, может в определенном приближении при достаточно малых значениях параметра  $k$  моделировать нагрузку в виде дельта-функции, которая часто фигурирует в аналогичных исследованиях.

Изложенная в предыдущем пункте процедура определяет выражение (3.14) для перемещения и (3.20) для нормального напряжения в пространстве оригиналов, которое служит исходной формулой для проведения вычислений, если функция  $f(x)$  имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + k^2}. \quad (5.5)$$

Результаты вычислений на основе (3.14), (3.25) и (5.5) представлены рис. 3,  $a - z$ . Параметр  $k$  в формуле (5.4) выбран равным 1. Для других значений параметра  $k$  числовые результаты этого и нижеследующих примеров 3,4 (для напряжения) приведены в [18].



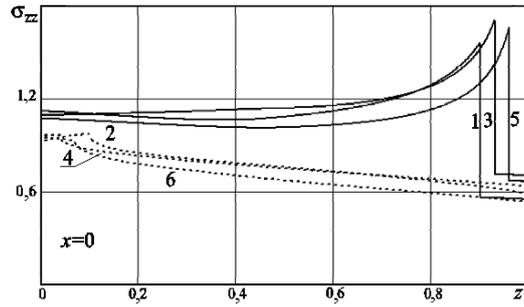


Рис. 3

Рис. 3, а представляет перемещение как функцию времени в трех точках на оси  $z$ . Мгновенное распределение перемещения вдоль оси  $z$  в сечениях слоя при  $t=0,9$  показано на рис. 3, б. На рис. 3, в показано развитие напряжения во времени на тыльной границе ( $z=1$ ) в двух точках оси  $x$ :  $x=0$  и  $x=4$ . Рис. 3, г представляет распределение напряжения по толщине слоя (при  $x=0$ ) в дискретные моменты времени 1)  $t=3,9$ ; 2)  $t=4,9$ ; 3)  $t=7,93$ ; 4)  $t=8,93$ ; 5)  $t=11,96$ ; 6)  $t=12,96$ .

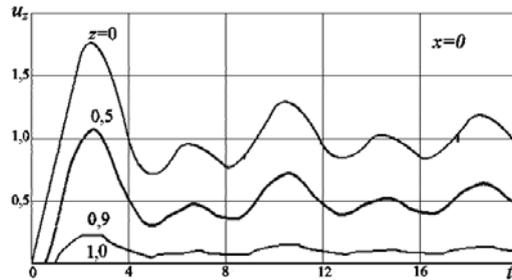
Как и в предыдущем примере, можно заметить образование пика (при  $x=0$ ) и его заострение при последовательных отражениях каждый раз в момент прихода очередного отражения. При удалении от оси симметрии это явление сглаживается и амплитуда уменьшается.

Кривые 1, 3, 5 на рис. 3, г построены при движении фронта волны расширения к тыльной границе, кривые 2, 4, 6 – к лицевой границе. Между соседними кривыми первой группы (а также между кривыми второй группы) отличие во времени составляет 4 интервала прохождения волной расширения толщины слоя. Отметим, что при нагрузке вида (5.4) не наблюдается скачок напряжения на фронте при движении волны к лицевой границе.

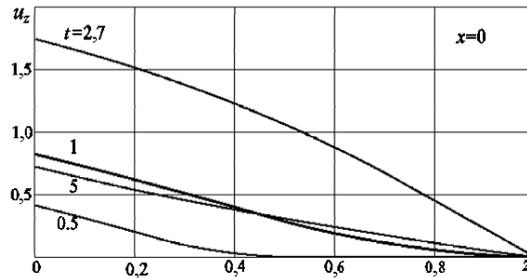
**Пример 3.** Примем, что внезапно приложенная нагрузка расширяется вдоль границы полуплоскости с постоянной скоростью  $k$ , т.е.

$$Q(t, x) = Q_0 H(kt - |x|). \quad (5.6)$$

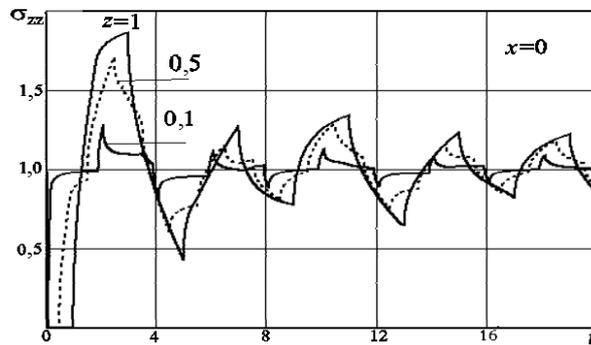
Тогда напряжение  $\sigma_{zz}(t, z, 0)$  вычисляем при помощи формулы (4.3), перемещение  $u_z(t, z, 0)$  – по формуле (4.4).



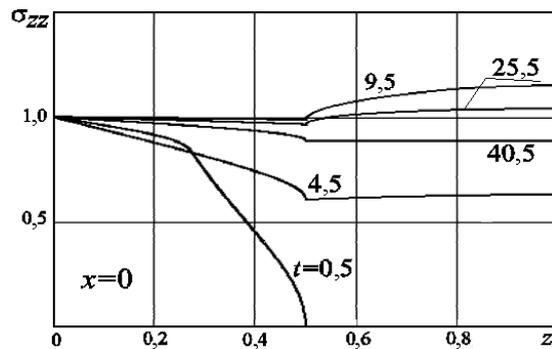
а



б



6



z

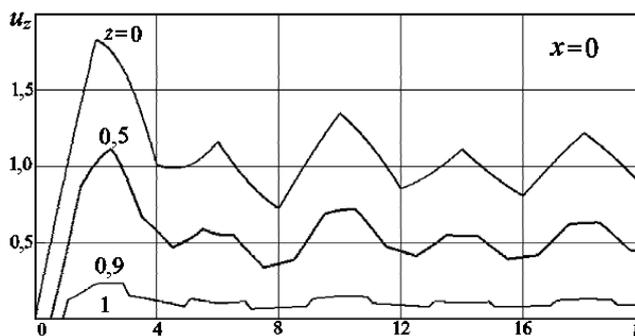
Рис. 4

Вычисленное напряжение показано на рис. 4, *в* как функция  $t$  в точках  $z=0,1; 0,5; 1,0$  при значении параметра скорости  $k=1$ . Рис. 4, *з* представляет мгновенное распределение напряжения по толщине слоя на оси симметрии при том же  $k$  в моменты времени 1)  $t=0,5$ ; 2)  $t=4,5$ ; 3)  $t=9,5$ ; 4)  $t=30,5$ ; 5)  $t=40,5$ . Можно заметить, что многократные отражения волн ведут к постепенному выравниванию напряжения по толщине слоя.

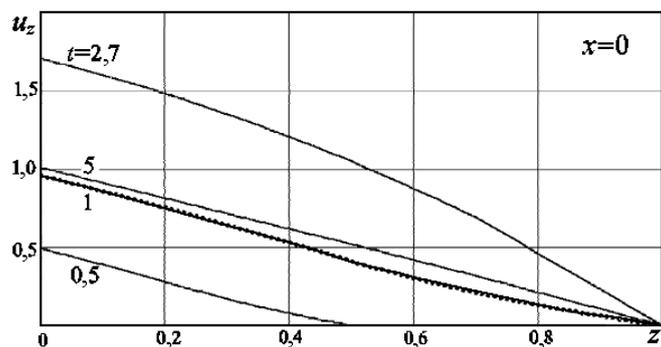
**Пример 4.** Область действия нагрузки расширяется вдоль оси  $x$  с переменной скоростью, пропорциональной  $1/\sqrt{|x|}$ . В этом случае функция  $Q(t,x)$  имеет вид

$$Q(t,x) = Q_0 H(kt - x^2), \quad (5.7)$$

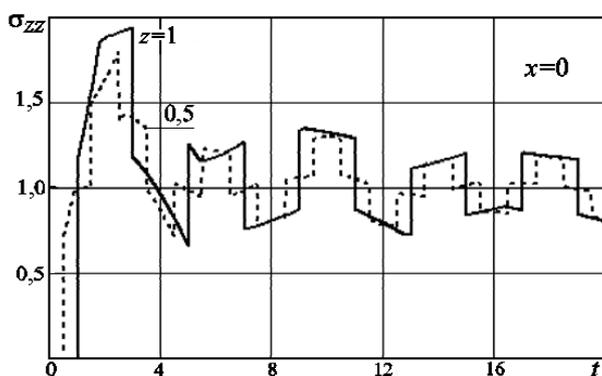
перемещение вдоль оси  $z$  вычисляется по формуле (4.7), напряжение – по формуле (4.6); параметр  $k$ , как и ранее, равен 1.



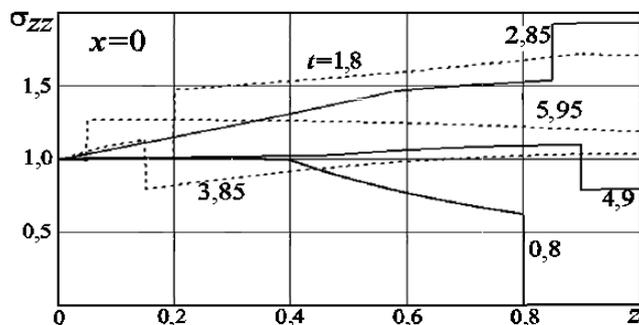
a



а



б



в

Рис. 5

Рис. 5, б представляет вычисленное напряжение как функцию времени в точках  $z = 0,5$  и  $z = 1$ . Наконец, на рис. 5, в показано напряжение как функция  $z$  в фиксированные моменты времени: 1)  $t = 0,8$ ; 2)  $t = 1,8$ ; 3)  $t = 2,85$ ; 4)  $t = 3,85$ ; 5)  $t = 4,9$ ; 6)  $t = 5,9$ . Сплошные кривые соответствуют движению фронта волны в сторону тыльной границы, пунктирные – в сторону лицевой границы. Нагрузка (5.7) такова, что в течение некоторого начального интервала времени скорость ее распространения превосходит скорость волн расширения в среде, поэтому развитие (в отличие от предыдущего примера) перемещения происходит с изломами, а развитие напряжения сопровождается скачками, что можно наблюдать как в конкретных точках с течением времени (рис. 5, б), так и в конкретные моменты времени при построении графика напряжения как функции глубины  $z$  (рис. 5, в).

Обратим внимание на существенную особенность процесса отражения упругих волн от поверхности, на которой заданы смешанные граничные условия: отраженная волна является волной того же типа, что и падающая волна.

#### **Выводы.**

1. Предложен подход к исследованию нестационарных волновых процессов в упругом слое при смешанных граничных условиях: условиях четвертой краевой задачи теории упругости на лицевой поверхности слоя (поверхности, к которой приложена действующая нагрузка) и условиях второй краевой задачи на тыльной поверхности. При таком выборе условий имеет место некоторое сходство с типичной задачей для слоя с заданной нагрузкой на лицевой поверхности и с жестко закрепленной тыльной поверхностью. Применяются интегральные преобразования Лапласа и Фурье, последовательное обращение которых с применением теорем о свертке либо использование метода Каньяра для их совместного обращения, позволяет получить искомого решение (перемещение, напряжение) в замкнутом аналитическом виде: в виде суммы, первый член которой представляет прямую волну, а каждый  $m$ -й член представляет волну, отраженную  $m$  раз от граничных поверхностей. Удерживая в упомянутой сумме конечное число членов  $N$ , получим в избранной точке значение напряжения с учетом  $N$  отражений, справедливое на интервале времени, определяемом неравенством  $z/\alpha \leq t \leq (2Nh+z)/\alpha$ .

2. Развитый подход позволяет выполнить исследование для практически произвольных действующих нагрузок. В качестве примеров рассмотрены нагрузки, зависимость которых от времени определяется функцией Хевисайда, однако полученные результаты могут быть использованы в качестве исходных при рассмотрении других временных зависимостей. На ряде примеров исследованы особенности возникающих волновых процессов как в конкретных точках слоя, так и вдоль той или другой оси в зависимости от времени.

3. Следует помнить, что принятая формулировка граничных условий (1.3) исключает, в отличие от первой краевой задачи теории упругости (задание вектора напряжений на границе), возникновение поверхностных волн, поэтому в данной работе основной акцент сделан на исследовании волновых процессов в поперечном направлении.

4. Полезность получения точных аналитических решений рассмотренного типа состоит еще и в том, что такие решения могут служить ориентиром при разработке специализированных численных методов. Известно, что наличие больших градиентов искомых решений, таких как скачки напряжений, обуславливают трудности при получении результатов численными методами с приемлемой точностью. Для отработки численных подходов, для которых тип граничных условий не оказывает существенного влияния на эффективность вычислений, точные решения определенных задач могут оказаться весьма полезными.

**РЕЗЮМЕ.** Побудовано аналітичний розв'язок плоскої задачі про дію нестационарного навантаження на поверхню пружного шару в умовах змішаної крайової задачі: на одній границі задані нормальне напруження і дотичне переміщення (четверта крайова задача теорії пружності), на іншій – нормальне переміщення і дотичне напруження (друга крайова задача). Застосовано інтегральні перетворення Лапласа і Фур'є. Обернення інтегральних перетворень виконано точно за допомогою табличних співвідношень і теорем про згортки для різноманітного асортименту діючих нестационарних навантажень. Вирази для напруження і переміщення отримано в явному аналітичному виді. Конкретно розглянуто навантаження, прикладене до області постійних розмірів і до області, розміри якої змінюються по заданому закону. Виконані обчислення демонструють розвиток нормального напруження в залежності від часу і просторових координат. Проаналізовано характерні особливості хвильових процесів.

1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 308 с.
2. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 352 с.
3. Механика контактных взаимодействий // Под ред. И.И.Воровича, В.М.Александрова. – М.: Физматгиз, 2001. – 670с.

4. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
5. Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. – Amsterdam: Elsevier, 1975. – 425 p.
6. Bakker M.C., Kooij M.B.J., Verweij M.D. A knife-edge load traveling on the surface of an elastic half-space // Wave Motion. – 2012. – **49**. – P. 165 – 180.
7. Bateman H., Erdelyi A. Tables of Integral Transforms: in 2 vol. V.1. – NY: McGraw-Hill Book Com. Inc. – 1954. – 344 p.
8. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions: in 4 vol. V.1. – NY: McGraw-Hill Book Com. Inc. – 1953. – 296 p.
9. Bresse L.F., Hutchins D.A. Transient generation of elastic waves in solids by a disk-shaped normal force source // J. Acoust. Soc. Amer. – 1989. – **86**, N 2. – P. 810 – 817.
10. Cagniard L.P.E., Flinn E.A., Dix C.H. Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves. – NY: McGraw-Hill, 1962. – 282 p.
11. De Hoop A.T. A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems // Appl. Sci. Res. Sect. B. 1960. – **8**. – P. 349– 356.
12. De A., Roy A. Transient response of an elastic half space to normal pressure acting over a circular area on an inclined plane // J. Eng. Math. – 2012. – **74**. – P. 119 – 141.
13. Eason G. The stresses produced in a semi-infinite solid by a moving surface force // Int. J. Eng. Sci. – 1965. – **2**, N 6. – P. 581 – 609.
14. Ghosh S.C. Disturbance produced in an elastic half-space by impulsive normal pressure // Pure and Appl. Geophys. – 1970. – **80**, N 1. – P. 71 – 83.
15. Kubenko V.D. Nonstationary Contact of a Rigid Body with an Elastic Medium: Plane Problem (Review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 5. – P. 121 – 129.
16. Kubenko V.D. Stress State of an Elastic Half-Plane under Nonstationary Loading // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 487 – 551.
17. Kubenko V.D. On a non-stationary load on the surface of a semiplane with mixed boundary conditions // ZAMM. – 2015. – **95**, N 12. – P. 1448 – 1460.
18. Kubenko V.D. Non-stationary stress state of an elastic layer at the mixed boundary conditions // ZAMM / DOI 10.1002/zamm.201.500235(2016).
19. Kubenko V.D., Marchenko T.A. Indentation of a Rigid Blunt Indenter into an Elastic Layer: a Plane Problem // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 3. – P. 286 – 295.
20. Kubenko V.D., Yanchevskii I.V. Nonstationary Load on the Surface of an Elastic Half-Strip // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 3. – P. 303 – 310.
21. Laturelle F.G. The stresses produced in an elastic half-space by a normal step loading over a circular area analytical and numerical results // Wave Motion. – 1990. – **12**. – P. 107 – 127.
22. Laturelle F.G. The stresses produced in an elastic half-space by a pressure pulse applied uniformly over a circular area: role of the pulse duration // Wave Motion. – 1991. – **14**. – P. 1 – 9.
23. Mitra M. Disturbance produced in an elastic half-space by impulsive normal pressure // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1964. – **60**, N. 3. – P. 683 – 696.
24. Singh S.K., Kuo J.T. Response of an elastic half-space to uniformly moving circular surface load // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1970. – **37**, N 1. – P. 109 – 115.
25. Verruijt A. An Introduction to Soil Dynamics. – London, NY: Springer, Dordrecht Heidelberg, 2010. – 433 p.

Поступила 04.11.2015

Утверждена в печать 05.07.2016