

А. С. Хорошун

О СТАБИЛИЗАЦИИ ВЕРХНЕГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МАЯТНИКА ВРАЩЕНИЕМ ИНЕРЦИАЛЬНОГО МАХОВИКА

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua*

Abstract. A way of control of a flywheel rotation is proposed that ensures an absolute asymptotic stability of an up equilibrium position of pendulum. A robustness of such control is proven and a way of estimating the robustness area in a space of parameters of mechanical system. The findings are illustrated on an example of a real model.

Key words: pendulum, mechanical system, singularly perturbed system, dynamic surface control, sliding surface, low-pass filter.

Введение.

Маятник с маховиком, впервые предложенный к рассмотрению в [11], является примером механической системы с управлением, в которой количество управляющих входов меньше, чем количество переменных, описывающих поведение системы. Системы такого класса широко используются при конструировании различных роботов, аэрокосмических и морских аппаратов, см. [6], поскольку имеют преимущество в меньшем потреблении энергии и меньшей стоимости по сравнению с механическими системами с большим количеством управляющих входов.

В работе [11] также получены первые результаты по стабилизации вращением маховика верхнего неустойчивого положения равновесия маятника применяя гибридное управление. Сначала маятник раскачивается «накачиваясь» энергией и попадает в некоторую окрестность верхнего положения равновесия. Затем управление, полученное с помощью линеаризации системы дифференциальных уравнений, которая описывает поведение маятника, окончательно стабилизирует маятник. Подобный «энергетический» подход использован и в лаборатории мехатроники Института механики МГУ, где был сконструирован опытный образец, см. [2]. Однако, автор указывает, что «... в настоящей работе не получено теоретическое доказательство работоспособности полученного выше закона. Хотя эффективность его отдельных частей доказана. Работоспособность построенного управления в целом удастся показать только при помощи численных и экспериментальных исследований».

В работе [7], используя преобразования переменных, исходная система дифференциальных уравнений, которая описывает поведение маятника с маховиком, сводится к т.н. «каскадному» виду. Из условий глобальной асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия этой системы получен закон управления, обеспечивающий такой же тип устойчивости верхнего положения равновесия маятника. Следует отметить, что полученный закон управления имеет чрезвычайно громоздкий вид, что делает его применение на практике затруднительным.

Эффективным методом построения закона управления для нелинейных систем является метод DSC, см. [9, 12]. Одной из его особенностей является то, что управление, построенное с его помощью, обеспечивает стремление траекторий исследуемой системы дифференциальных уравнений не к равновесным значениям переменных, а к

некоторым наперед заданным траекториям, стремление которых к равновесным значениям переменных постулируется. Также особенностью данного метода является применение фильтров, которые позволяют избежать нарастания сложности элементов системы дифференциальных уравнений, в том числе и закона управления, хотя и увеличивают ее размерность. Кроме того, поскольку временные константы фильтров могут быть выбраны фиксированными но как угодно малыми положительными числами, то исходная система дифференциальных уравнений естественным образом может быть представлена в виде сингулярно возмущенной. Подобный подход к исследованию устойчивости маятника с маховиком реализован в работе [8]. Следует отметить, что удалось установить лишь локальную, хотя и экспоненциальную, устойчивость верхнего положения равновесия маятника с маховиком, которая обеспечивается построенным управлением. Также не была установлена робастность этого управления.

В данной работе, применяя технику DSC, построено управление, обеспечивающее глобальную асимптотическую устойчивость верхнего положения равновесия маятника с маховиком. Также показана робастность построенного управления и определена область такой робастности.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим однозвенный маятник, который может совершать вращение в вертикальной плоскости. Ось его вращения расположена горизонтально и закреплена на неподвижном основании. Свободный конец маятника снабжен симметричным относительно центра маховиком с осью вращения, вокруг которой маховик может поворачиваться в ту или иную сторону, параллельной оси вращения маятника. Маховик приводится в движение электродвигателем постоянного тока, статор которого жестко скреплен с маятником, а ось ротора жестко соединена с осью маховика. На рис. 1 изображена схема маятника с маховиком, где O – точка подвеса маятника; C – центр маховика; q_1 – угол поворота маятника относительно вертикали; q_2 – угол поворота маховика относительно маятника. Управление маятником происходит с помощью вращения маховика, которое задается электродвигателем, поэтому управляющим параметром в системе принимаем момент электромагнитных сил, приложенных к ротору со стороны статора. Задача управления состоит в стабилизации маятника в его верхнем положении равновесия в то время как маховик прекратит свое вращение.

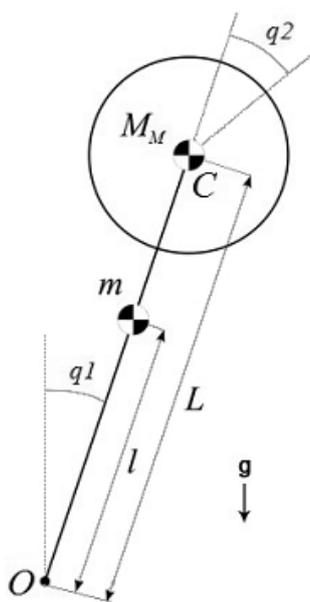


Рис. 1

В данной работе предложено управление, которое реализует поставленную задачу вне зависимости от начального положения маятника и при наличии неточности в параметрах модели. Область такой стабилизации в пространстве параметров также будет определена.

2. Вывод уравнений движения.

Введем обозначения: M_m – масса маховика; m – масса маятника; M_R – масса электродвигателя; J_m , J_M и J_R – моменты инерции маятника, маховика и ротора двигателя, соответственно, относительно их осей вращения; L – длина маятника; l – расстояние от шарнира O до центра масс маятника; τ – момент электромагнитных сил, приложенных к ротору электродвигателя со стороны статора. Предполагаем, что момент сил сопротивления в шарнире мал и им можно пренебречь. Тогда, используя метод Лагранжа, уравнения движения системы «маятник – маховик» получим, см. [2, 8], в виде

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2 & J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega \sin(q_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix} \quad (1)$$

[$J_1 = J_m + (M_M + M_R)L^2 + J_M + J_R$, $J_2 = J_M + J_R$, $\omega = (ml + (M_M + M_R)L)g$, g – ускорение свободного падения].

Принимаем, что некоторые или, возможно, все параметры модели, т.е. числовые величины, от которых зависят коэффициенты системы дифференциальных уравнений (1), заданы неточно и известно только об их принадлежности некоторому замкнутому множеству. В таком случае систему дифференциальных уравнений (1) рассматриваем в виде

$$\begin{pmatrix} J_1(p) & J_2(p) \\ J_2(p) & J_2(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega(p) \sin(q_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $p \in P \subseteq R^n$, $n \in N$.

Следуя [8, 10] воспользуемся преобразованием управления и координат по таким правилам:

$$\tau = \alpha(p)u + \beta(p, q_1); \quad \eta_1 = J_1(p)\dot{q}_1 + J_2(p)\dot{q}_2; \quad \eta_2 = q_1; \quad \eta_3 = \dot{q}_2, \quad (3)$$

где $\alpha(p) = J_2(p) - \frac{J_2^2(p)}{J_1(p)}$; $\beta(p, q_1) = \frac{J_2(p)}{J_1(p)}\omega(p)\sin(q_1)$. Тогда систем дифференциальных уравнений (2) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \omega(p)\sin(\eta_2); \\ \dot{\eta}_2 = \frac{1}{J_1(p)}\eta_1 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)}\eta_3; \\ \dot{\eta}_3 = u. \end{cases} \quad (4)$$

Замечание 1. Предполагаем, что область P содержит только допустимые значения параметров p . Допустимыми считаем те значения параметров, при которых не возникает противоречия с физической природой входящих в состав модели величин, то есть с неотрицательностью масс, длин, осевых моментов инерции. При этом, при всех допустимых значениях параметров справедливы соотношения: $J_1(p) > J_2(p) > 0$, $\omega(p) > 0$.

Замечание 2. Поскольку параметры модели таковы, что $J_1(p) > J_2(p) > 0$, для всех $p \in P$, то преобразование (3) невырожденно.

3. Построение управления.

Для построения управления, которое обеспечит глобальную асимптотическую устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (4) используем технику, предложенную в [12] (DSC). Рассмотрим первое уравнение из (4). Пусть переменная η_2 изменяется по закону $\tilde{\eta}_2 = -\arctan(\eta_1)$. Тогда нулевое состояние равновесия дифференциального уравнения

$$\dot{\eta}_1 = \omega(p)\sin(\tilde{\eta}_2) \quad (5)$$

глобально асимптотически устойчиво. Этот факт легко установить, рассмотрев вспомогательную функцию $V(\eta_1) = 0,5\eta_1^2$ и ее производную по времени в силу (5) $\dot{V}(\eta_1)|_{(5)} = \omega(p)\eta_1 \sin(\tilde{\eta}_2)$, которые удовлетворяют всем условиям теоремы Барбашина – Красовского, см. [1], о глобальной асимптотической устойчивости. Здесь учтено, что $\omega(p) > 0$ для всех $p \in P$. Очевидно, что если переменная η_2 асимптотически стре-

мится к $\tilde{\eta}_2$, то переменная η_1 , которая задается (4), асимптотически стремится к нулю вне зависимости от своего начального значения.

Обозначим величину S_1 следующим образом:

$$S_1 = \eta_2 - \bar{\eta}_2, \quad (6)$$

где $\bar{\eta}_2$ – результат применения фильтра к $\tilde{\eta}_2$, т.е.

$$\tau_2 \dot{\bar{\eta}}_2 + \bar{\eta}_2 = \tilde{\eta}_2; \quad \bar{\eta}_2(0) = \tilde{\eta}_2(0), \quad (7)$$

где τ_2 – произвольная, как угодно малая положительная константа. Дифференцируя (6) по времени, учитывая (4), получаем, что

$$\dot{S}_1 = \dot{\eta}_2 - \dot{\bar{\eta}}_2 = \frac{1}{J_1(p)} \eta_1 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} \eta_3 - \dot{\bar{\eta}}_2,$$

откуда следует, что если переменная η_3 асимптотически стремится к

$$\tilde{\eta}_3 = \frac{J_1(p)}{J_2(p)} \left(K_1 S_1 + \frac{1}{J_1(p)} \eta_1 - \dot{\bar{\eta}}_2 \right),$$

где $K_1 > 0$ некоторая константа, то величина S_1 асимптотически стремится к нулю вне зависимости от своего начального значения.

Поступая аналогично, обозначим величину S_2 следующим образом:

$$S_2 = \eta_3 - \bar{\eta}_3, \quad (8)$$

где $\bar{\eta}_3$ – результат применения фильтра к $\tilde{\eta}_3$, т.е.

$$\tau_3 \dot{\bar{\eta}}_3 + \bar{\eta}_3 = \tilde{\eta}_3; \quad \bar{\eta}_3(0) = \tilde{\eta}_3(0), \quad (9)$$

где τ_3 – произвольная, как угодно малая положительная константа. Дифференцируя (8) по времени, учитывая (4), получаем, что

$$\dot{S}_2 = \dot{\eta}_3 - \dot{\bar{\eta}}_3 = u - \dot{\bar{\eta}}_3.$$

Выбрав управление

$$u = \dot{\bar{\eta}}_3 - K_2 S_2, \quad (10)$$

где $K_2 > 0$ – некоторая константа, обеспечим асимптотическое стремление к нулю величины S_2 при любом ее начальном значении.

Пусть

$$z_1 = \bar{\eta}_2 - \tilde{\eta}_2 \quad (11)$$

и

$$z_2 = \bar{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3 \quad (12)$$

– погрешности фильтров. Тогда из (6) следует, что

$$\eta_2 = S_1 + \bar{\eta}_2 = S_1 + (\bar{\eta}_2 - \tilde{\eta}_2) + \tilde{\eta}_2 = S_1 + z_1 + \tilde{\eta}_2. \quad (13)$$

Продолжим преобразование \dot{S}_1 и \dot{S}_2 . Для производной S_1 по времени, с учетом значения $\tilde{\eta}_3$ и соотношения (12), получим

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= \dot{\eta}_2 - \dot{\bar{\eta}}_2 = \frac{1}{J_1(p)} \eta_1 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} \eta_3 - \dot{\bar{\eta}}_2 = \\ &= \frac{1}{J_1(p)} \eta_1 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} ((\eta_3 - \bar{\eta}_3) + (\bar{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3) + \tilde{\eta}_3) - \dot{\bar{\eta}}_2 = -K_1 S_1 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} S_2 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} z_2, \end{aligned} \quad (14)$$

а для производной S_2 по времени, с учетом выбранного управления в виде (10), справедливо:

$$\dot{S}_2 = -K_2 S_2. \quad (15)$$

Само же управление, с учетом (9) и (12) представим в следующем виде:

$$u = \dot{\tilde{\eta}}_3 - K_2 S_2 = \frac{\tilde{\eta}_3 - \bar{\eta}_3}{\tau_3} - K_2 S_2 = -\frac{z_2}{\tau_3} - K_2 S_2. \quad (16)$$

Определим производные по времени погрешностей фильтров. Принимая во внимание значение $\tilde{\eta}_2$, соотношения (7) и (13), дифференцирование (11) по времени даст следующее значение для \dot{z}_1 :

$$\dot{z}_1 = \dot{\tilde{\eta}}_2 - \dot{\tilde{\eta}}_2 = \frac{\tilde{\eta}_2 - \bar{\eta}_2}{\tau_2} - \dot{\tilde{\eta}}_2 = -\frac{z_1}{\tau_2} + \frac{\omega(p) \sin(S_1 + z_1 - \arctan(\eta_1))}{1 + (\eta_1)^2}. \quad (17)$$

Учитывая значение $\tilde{\eta}_3$ и используя соотношения (7), (9), (11), (13), (14), (17), уравнение, определяющее поведение \dot{z}_2 , получим, дифференцируя равенство (12) по времени, в силу (4):

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = \dot{\tilde{\eta}}_3 - \dot{\tilde{\eta}}_3 &= \frac{\tilde{\eta}_3 - \bar{\eta}_3}{\tau_3} - \dot{\tilde{\eta}}_3 = -\frac{z_2}{\tau_3} - \frac{J_1(p)}{J_2(p)} (K_1 \dot{S}_1 + \frac{1}{J_1(p)} \dot{\eta}_1 - \dot{\tilde{\eta}}_2) = \\ &= -\frac{z_2}{\tau_3} - \frac{J_1(p)}{J_2(p)} [K_1 (-K_1 S_1 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} S_2 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} z_2) + \\ &\quad + \frac{1}{J_1(p)} \omega(p) \sin(S_1 + z_1 - \arctan(\eta_1)) + \frac{d}{dt} (\frac{z_1}{\tau_2})] = \\ &= -\frac{z_2}{\tau_3} - \frac{\omega(p)}{J_1(p)} \sin(S_1 + z_1 - \arctan(\eta_1)) + \frac{J_1(p)}{J_2(p)} K_1^2 S_1 + K_1 S_2 + K_1 z_2 - \\ &\quad - \frac{z_1}{\tau_2^2} + \frac{1}{\tau_2} \frac{\omega(p) \sin(S_1 + z_1 - \arctan(\eta_1))}{1 + (\eta_1)^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, динамика отклонения траектории системы дифференциальных уравнений (4) при управлении (10) от траектории этой системы, которая асимптотически стремится к нулевому состоянию равновесия, описывается дифференциальными уравнениями (5), (14), (15), (17), (18), которые образуют систему

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \omega(p) \sin(S_1 + z_1 - \arctan(\eta_1)); \\ \dot{S}_1 = -K_1 S_1 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} S_2 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} z_2; \\ \dot{S}_2 = -K_2 S_2; \\ \dot{z}_1 = -\frac{z_1}{\tau_2} + F_1(\eta_1, S_1, z_1); \\ \dot{z}_2 = -\frac{z_2}{\tau_3} + F_2(\eta_1, S_1, S_2, z_1, z_2) \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
& \left[F_1(\eta_1, S_1, z_1) = \frac{\omega(p) \sin(S_1 + z_1 - \arctan(\eta_1))}{1 + (\eta_1)^2}, \right. \\
& F_2(\eta_1, S_1, S_2, z_1, z_2) = -\frac{\omega(p)}{J_1(p)} \sin(S_1 + z_1 - \arctan(\eta_1)) + \\
& \left. + \frac{J_1(p)}{J_2(p)} K_1^2 S_1 + K_1 S_2 + K_1 z_2 - \frac{z_1}{\tau_2^2} + \frac{1}{\tau_2} F_1(\eta_1, S_1, z_1) \right].
\end{aligned}$$

Очевидно, что глобальная асимптотическая устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (4) при управлении (10) следует из такого же типа устойчивости нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (19).

Поскольку τ_2 и τ_3 могут быть произвольными положительными как угодно малыми величинами, то предполагая $\tau_2, K_1 > 0, K_2 > 0$ фиксированными константами, которые могут быть выбранными «удобными» в контексте поставленной задачи, а $\tau_3 = \varepsilon$ – малым параметром, заменой переменных $(\eta_1, S_1, S_2, z_1, z_2)^T \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4, y)^T = (x, y)^T, x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ система дифференциальных уравнений (19) может быть сведена к сингулярно возмущенному виду

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = \omega(p) \sin(x_2 + x_4 - \arctan(x_1)); \\
\dot{x}_2 = -K_1 x_2 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} x_3 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} y; \\
\dot{x}_3 = -K_2 x_3; \\
\dot{x}_4 = -\frac{x_4}{\tau_2} + F_1(x_1, x_2, x_4); \\
\varepsilon \dot{y} = -y + \varepsilon F_2(x, y),
\end{cases} \quad (20)$$

исследованию свойств устойчивости нулевого состояния равновесия которой и будет посвящен следующий раздел.

4. Исследование устойчивости.

Рассмотрим скалярную функцию $V(x, y): R^4 \times R \rightarrow R, V(0, 0) = 0$, вида

$$V(x, y) = \frac{x_1^2}{\sqrt{1+x_1^2}} + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + y^2) \quad (21)$$

и определим ее производную по времени в силу системы дифференциальных уравнений (20):

$$\begin{aligned}
\frac{dV(x, y)}{dt} \Big|_{(20)} &= \left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} + \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}(1+x_1^2)} \right) \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 + x_3 \dot{x}_3 + x_4 \dot{x}_4 + y \dot{y} = \\
&= \left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} + \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}(1+x_1^2)} \right) \left(\frac{-\omega(p)x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} + \omega(p) \cos(\hat{x}_2 + \hat{x}_4 - \arctan(x_1)) \right) x_2 + \\
&+ \omega(p) \cos(\hat{x}_2 + \hat{x}_4 - \arctan(x_1)) x_4 + x_2 \left(-K_1 x_2 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} x_3 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} y \right) + x_3 (-K_2 x_3) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +x_4 \left(-\frac{x_4}{\tau_2} - \frac{\omega(p)x_1}{(1+x_1^2)^{3/2}} + \frac{\omega(p)}{1+x_1^2} \cos(\hat{x}_2 + \hat{x}_4 - \arctan(x_1)) \right) x_2 + \\
& \frac{\omega(p)}{1+x_1^2} \cos(\hat{x}_2 + \hat{x}_4 - \arctan(x_1)) x_4 \Big) + y \left(-\frac{1}{\varepsilon} y + \frac{J_1(p)}{J_2(p)} K_1^2 x_2 + \right. \\
& \left. + K_1 x_3 + K_1 y - \frac{1}{\tau_2} x_4 + \frac{\omega(p)}{J_2(p)} \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} - \frac{\omega(p)}{J_2(p)} \cos(\hat{x}_2 + \hat{x}_4 - \arctan(x_1)) x_2 - \right. \\
& \left. - \frac{\omega(p)}{J_2(p)} \cos(\hat{x}_2 + \hat{x}_4 - \arctan(x_1)) x_4 - \frac{\omega(p)}{\tau_2} \frac{x_1}{(1+x_1^2)^{3/2}} + \frac{\omega(p)}{\tau_2(1+x_1^2)} \cos(\hat{x}_2 + \hat{x}_4 - \arctan(x_1)) x_2 + \right. \\
& \left. + \frac{\omega(p)}{\tau_2(1+x_1^2)} \cos(\hat{x}_2 + \hat{x}_4 - \arctan(x_1)) x_4 \right). \quad (22)
\end{aligned}$$

Здесь использована формула конечных приращений Лагранжа

$$\sin(x_2 + x_4 - \arctan(x_1)) =$$

$$= \sin(-\arctan(x_1)) + \cos(\hat{x}_2 + \hat{x}_4 - \arctan(x_1)) x_2 + \cos(\hat{x}_2 + \hat{x}_4 - \arctan(x_1)) x_4,$$

где \hat{x}_2 и \hat{x}_4 – некоторые точки из R . Также учтено, что $\sin(-\arctan(x_1)) = -\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}}$.

Воспользовавшись неравенством $-az^2 + bz \leq -(a/2)z^2 + b^2/(2a)$, которое верно для всех $a, b, z \in R$, $a > 0$, из соотношения (22) получим оценку для производной функции (21) по времени в силу системы (20), т.е.

$$\begin{aligned}
\frac{dV(x, y)}{dt} \Big|_{(20)} & \leq - \left(\frac{\omega(p)}{8(1+x_1^2)} + \frac{\omega(p)}{16(1+x_1^2)^2} \right) x_1^2 - \\
& - \left(\frac{K_1}{2} - \omega(p) - \frac{\omega^2(p)\tau_2}{2} - \frac{J_1^2(p)}{J_2^2(p)} \frac{\varepsilon K_1^4}{2} - \frac{4\omega^2(p)\varepsilon}{J_2^2(p)} - \frac{16\omega^2(p)\varepsilon}{\tau_2^2} - \frac{64J_2^2(p)\varepsilon}{J_1^2(p)} \right) x_2^2 - \\
& - \left(K_2 - \frac{J_2^2(p)}{2J_1^2(p)K_1} - K_1^2 \varepsilon \right) x_3^2 - \left(\frac{1}{2\tau_2} - 5\omega(p) - \frac{2\varepsilon}{\tau_2^4} - \frac{8\varepsilon\omega^2(p)}{J_2^2(p)} - \frac{32\varepsilon\omega^2(p)}{\tau_2^2} \right) x_4^2 - \\
& - \left(\frac{1}{256\varepsilon} - \frac{2\omega(p)}{J_2^2(p)} - \frac{4\omega(p)}{\tau_2^2} - K_1 \right) y^2. \quad (23)
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\cos^2(\hat{x}_2 + \hat{x}_4 - \arctan(x_1)) \leq 1$, для всех $\hat{x}_2, \hat{x}_4, x_1$ из R , и $1/(1+x_1^2)^n \leq 1$, для всех $x_1 \in R, n \in N$.

Сформулируем и докажем утверждение, которое содержит основной результат данной работы.

Утверждение. Для всех значений параметров p из P существуют такие значения величин $\tau_2 > 0$, $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ и $\varepsilon^* > 0$, что нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (20) глобально асимптотически устойчиво для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$.

Замечание 3. Так как из глобальной асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (20) следует аналогичный тип устойчивости нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (4) при управлении (10), что было показано выше, то формулировка утверждения может иметь следующий вид: «Для всех значений параметров p из P существуют такие константы управления $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ и такие временные константы фильтров $\tau_2 > 0$, $\tau_3 = \varepsilon > 0$, что управление вращением инерциального маховика (10) глобально стабилизирует верхнее положение равновесия маятника».

Доказательство. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (20) при произвольном значении параметра p из P . Функция (21), очевидно – бесконечно большая. Для ее производной по времени в силу систем дифференциальных уравнений (20) имеет место, как было показано выше, оценка (23), из которой следует отрицательная определенность указанной производной, если для величин K_1 , K_2 , τ_2 , ε выполняются следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{K_1}{2} - \omega(p) - \frac{\omega^2(p)\tau_2}{2} - \frac{J_1^2(p)}{J_2^2(p)} \frac{\varepsilon K_1^4}{2} - \frac{4\omega^2(p)\varepsilon}{J_2^2(p)} - \frac{16\omega^2(p)\varepsilon}{\tau_2^2} - \frac{64J_2^2(p)\varepsilon}{J_1^2(p)} > 0; \\ K_2 - \frac{J_2^2(p)}{2J_1^2(p)K_1} - K_1^2\varepsilon > 0; \\ \frac{1}{2\tau_2} - 5\omega(p) - \frac{2\varepsilon}{\tau_2^4} - \frac{8\varepsilon\omega^2(p)}{J_2^2(p)} - \frac{32\varepsilon\omega^2(p)}{\tau_2^2} > 0; \\ \frac{1}{256\varepsilon} - \frac{2\omega(p)}{J_2^2(p)} - \frac{4\omega(p)}{\tau_2^2} - K_1 > 0. \end{array} \right. \quad (24)$$

Легко показать, что система неравенств (24) совместна для выбранного p , если

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 > 2,1\omega(p); \\ K_2 > \frac{J_2^2(p)}{4,2J_1^2(p)\omega^2(p)}; \\ \tau_2 < \frac{1}{10\omega(p)}; \end{array} \right. \quad (25)$$

$$\varepsilon \leq \varepsilon^* < \tilde{\varepsilon} = \min\{\alpha(p, K_1, \tau_2); \beta(p, K_1, K_2); \gamma(p, \tau_2); \delta(p, \tau_2)\} \quad (26)$$

$$\left[\alpha(p, K_1, \tau_2) = \frac{\frac{K_1}{2} - \omega(p) - \frac{\omega^2(p)\tau_2}{2}}{\frac{J_1^2(p)}{J_2^2(p)} \frac{K_1^4}{2} + \frac{4\omega^2(p)}{J_2^2(p)} + \frac{16\omega^2(p)}{\tau_2^2} + \frac{64J_2^2(p)}{J_1^2(p)}}; \right.$$

$$\left. \beta(p, K_1, K_2) = \frac{1}{K_1^2} \left(K_2 - \frac{J_2^2(p)}{2J_1^2(p)K_1} \right); \quad \gamma(p, \tau_2) = \frac{\frac{1}{2\tau_2} - 5\omega(p)}{\frac{2}{\tau_2^4} + \frac{8\omega^2(p)}{J_2^2(p)} + \frac{32\omega^2(p)}{\tau_2^2}}; \right.$$

$$\delta(p, \tau_2) = \frac{1}{256 \left(\frac{2\omega(p)}{J_2^2(p)} + \frac{4\omega(p)}{\tau_2^2} + K_1 \right)}$$

и величины в правой части равенства (26), очевидно, положительны.

Таким образом, если выбрать K_1 , K_2 и τ_2 согласно соотношениям (25), то из (26) определяется величина ε^* такая, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ система неравенств (24) совместна. Значит, для рассматриваемого значения параметра p и K_1 , K_2 , τ_2 , ε , выбранных согласно (25), (26), производная функции (21) по времени, в силу системы дифференциальных уравнений (20), отрицательно определена. Т.е. функция (21) является функцией Ляпунова, которая в силу теоремы 12.1, см. [1], позволяет установить глобальную асимптотическую устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (20).

Поскольку p является произвольным значением параметра из P , то утверждение теоремы полностью доказано.

Замечание 4. Доказанная теорема постулирует существование управления вида (10), обеспечивающего глобальную асимптотическую устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (4) при всех значениях параметра p из P . Пусть для некоторого значения параметра p^* из P такое управление построено, т.е. выбраны константы $K_1^* > 0$, $K_2^* > 0$, $\tau_2^* > 0$, $\varepsilon_3^* = \varepsilon^* > 0$. При выполнении неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1^* > 2, 1 \max_{p \in P_1} \omega(p); \\ K_2^* > \max_{p \in P_1} \frac{J_2^2(p)}{4, 2J_1^2(p)\omega^2(p)}; \\ \tau_2^* < \frac{1}{10 \max_{p \in P_1} \omega(p)}; \\ \varepsilon^* < \min_{p \in P_1} (\min\{\alpha(p, K_1, \tau_2); \beta(p, K_1, K_2); \gamma(p, \tau_2); \delta(p, \tau_2)\}) \end{array} \right. \quad (27)$$

построенное управление, очевидно, будет глобально асимптотически стабилизировать нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (4) для всех значений параметра $p \in P_1 \subseteq P$, $p^* \in P_1$. Таким образом, неравенства (27) можно использовать для определения области робастности управления (10).

5. Пример.

Проиллюстрируем полученные результаты на примере реальной модели [2]. Маятник представляет собой однородный стержень, поэтому $l = L/2$ и $J_m = (mL^2)/3$. Длина стержня $L = 0,3$ м, масса $m = 0,04$ кг; момент инерции, следовательно, $J_m = 0,0012$ кг · м². Конструкция маховика такова, что он близок к кольцу, внешний радиус которого $R = 0,042$ м, а внутренний — $r = 0,036$ м. Масса маховика $M_M = 0,05$ кг, равномерно распределена по кольцу, поэтому его момент инерции $J_M = \frac{M_M(r^2 + R^2)}{2} = 7,65 \cdot 10^{-5}$ кг · м². Маховик приводится во вращение двигателем

постоянного тока, параметры которого таковы: $M_R = 0,08$ кг, $J_R = 12 \cdot 10^{-7}$ кг·м². Примем, что величины измерены точно, т.е. не зависят от параметра. В этом случае, параметры управления, согласно соотношениям (26), (27), могут быть выбраны такими: $K_1^* = 2$, $K_2^* = 1$, $\tau_2^* = 0,1$, $\varepsilon^* = 10^{-11}$. Согласно теореме, нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (20) при выбранных параметрах будет глобально асимптотически устойчиво. Перейдем от переменных (x_1, x_2, x_3, x_4, y) к переменным (η_1, η_2, η_3) с помощью формул

$$\begin{cases} \eta_1 = x_1; \\ \eta_2 = x_2 + x_4 - \arctan(x_1); \\ \eta_3 = x_3 + x_5 + \frac{J_1}{J_2} \left(K_1^* x_2 + \frac{1}{J_1} x_1 + \frac{x_4}{\tau_2^*} \right), \end{cases}$$

а от переменных (η_1, η_2, η_3) к переменным (q_1, q_2) с помощью формул

$$\begin{cases} q_1 = \eta_2; \\ \dot{q}_1 = \frac{1}{J_1} \eta_1 - \frac{J_2}{J_1} \eta_3; \\ \dot{q}_2 = \eta_3. \end{cases}$$

Учитываем также, что

$$u = -K_2^* x_3 - \frac{y}{\varepsilon^*}; \quad \tau = \left(J_2 - \frac{J_2^2}{J_1} \right) u + \frac{J_2 \omega}{J_1} \sin(\eta_2).$$

Эволюция переменной q_1 , скорости вращения маятника \dot{q}_1 , скорости вращения маховика \dot{q}_2 и управления τ при начальном положении маятника в нижнем положении равновесия представлены на рис. 2 – 5. Как видим, управление τ решает поставленную задачу стабилизации.

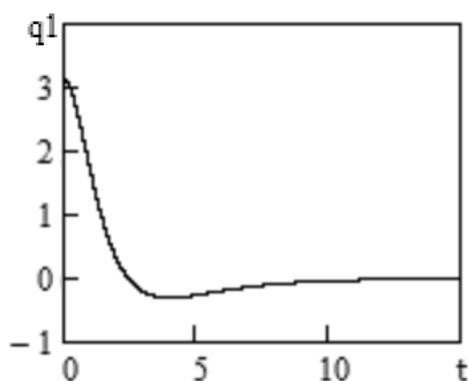


Рис. 2

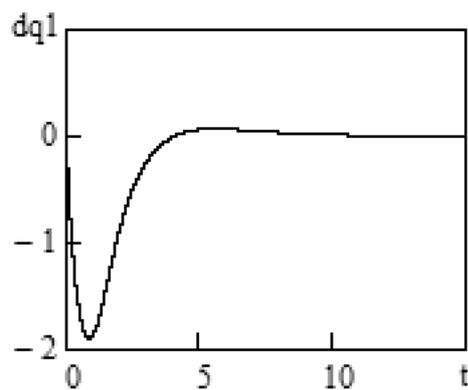


Рис. 3

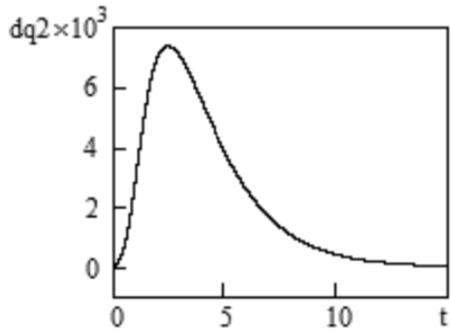


Рис. 4

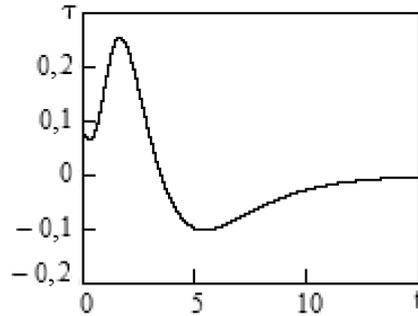


Рис. 5

Предположим, что, например, масса маятника задана неточно и может отклоняться от номинальной. В этом случае примем ее значение зависящим от параметра: $M_M = 0,05 + p$. Установим область P изменения параметра p , чтобы построенное управление глобально асимптотически стабилизировало нулевое состояние равновесия модели при всех p из P . Воспользовавшись соотношениями (27) такая область определена в виде отрезка $p \in [-0,022, 0,17]$. На рис. 6 – 9 представлено поведение модели при значении параметра $p = 0,17$ и начальном положении маятника в нижнем положении равновесия.

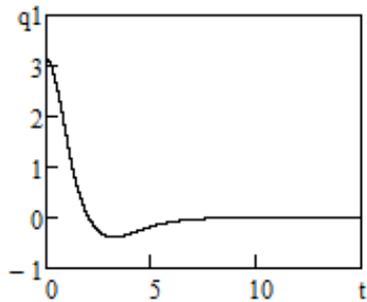


Рис. 6

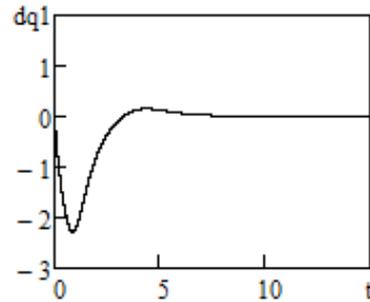


Рис. 7

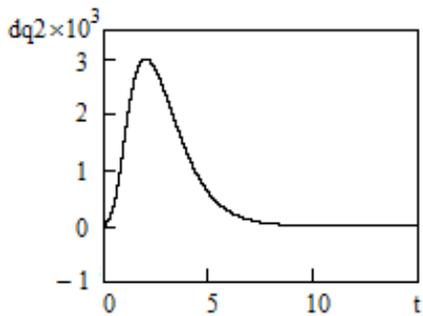


Рис. 8

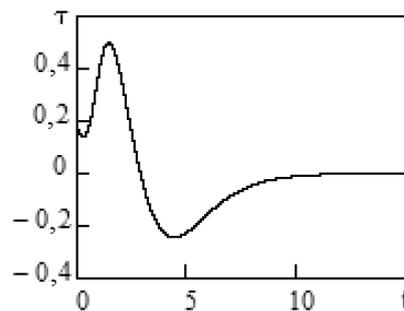


Рис. 9

Заключительные замечания.

В работе, используя технику DSC, получен закон управления вращением инерциального маховика, который обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость верхнего положения равновесия маятника. Доказательство этого факта проведено с помощью метода функций Ляпунова, что позволяет исследовать устойчивость состояния равновесия исследуемой системы дифференциальных уравнений, которая имеет сингулярно возмущенный вид, не разделяя движения на «быстрые» и «медлен-

ные». Даже если данная система и допускает подобное разделение, установить устойчивость состояния равновесия «медленной» подсистемы – задача не менее сложная, нежели установить устойчивость исходной системы, так как она существенно нелинейна, а ее линеаризация, в контексте искомой глобальной устойчивости, смысла не имеет. Кроме того, функция Ляпунова, построенная для полной системы дифференциальных уравнений, позволяет, исходя из условий ее отрицательной определенности, получить ограничение на величину малого параметра ε , который входит в управление. Отметим относительную простоту полученного закона управления, что имеет важность для его практического применения. Также в работе указаны оценки, которые позволяют выбрать параметры управления и временные константы фильтров так, чтобы полученное управление реализовывало поставленную задачу. Доказана робастность такого управления и предложен способ оценки области робастности в пространстве параметров механической системы. Полученные результаты проиллюстрированы на примере реальной модели.

РЕЗЮМЕ. В статті побудовано керування обертанням маятника, яке забезпечує абсолютну асимптотичну стійкість верхнього положення рівноваги маятника. Доведено робастність такого керування і запропоновано спосіб оцінки області робастності у просторі параметрів механічної системи. Отримані результати проілюстровані на прикладі реальної моделі.

1. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости – М.: Наука, 1967. – 223 с.
2. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 235 с.
3. Khoroshun A.S. Using Multicomponent Lyapunov Functions to Analyze the Absolute Parametric Stability of Singularly Perturbed Uncertain Mechanical Systems // Int. Appl.Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 206 – 221.
4. Konosevich B.I. Estimating the Error of an Asymptotic Solution Describing the Angular Oscillations of the Axis of Symmetry of a Rotating Rigid Body // Int. Appl.Mech. – 2014. – **50**, N 4. – P. 446 – 458.
5. Larin V.B., Tunik A.A. On Inertial-Navigation System Without Angular-Rate Sensors // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 4. – P. 488 – 499.
6. Liu Y., Yu H. A survey of underactuated mechanical systems // IET Control Theory Appl. – 2013. – 7, iss.7. – P. 921 – 935.
7. Olfati-Saber R. Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles. – Ph.D. Thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, USA (2001).
8. Qaiser Nadeem, Iqbal N., Hussain A., Qaiser Naeem Exponential stabilization of the inertia wheel pendulum using dynamic surface control // J. of Circuits, Systems and Computers. – 2007. – **16**, N 1. – P. 81 – 92.
9. Song B., Hedrick J.K. Dynamic surface control of uncertain nonlinear systems. An LMI approach. – London: Springer-Verlag, 2011. – 268 p.
10. Spong M.W. Energy based control of a class of underactuated mechanical systems // Proc. of IFAC World Congress. – San-Francisco, 1996. – vol.F. – P. 431 – 435.
11. Spong M.W., Corke P., Lozano R. Nonlinear control of the inertia wheel pendulum // Automatica. – 2001. – **37**. – P. 1845 – 1851.
12. Swaroop D., Hedrick J.K., Yip P.P., Gerdes J.C. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems // IEEE Trans. of Automatic Control. – 2000. – **45**, N 11. – P. 1893 – 1899.

Поступила 20.03.2015

Утверждена в печать 05.07.2016