

В. Л. Карлаш

**ВЛИЯНИЕ РАЗДЕЛЕННЫХ И НЕПОЛНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ
НА ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ СТЕРЖНЕВОГО ТИПА**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: karlashv@ukr.net*

Abstract. An effect of non-uniform electric load on admittance and dynamic electromechanical coupling factor (DECF) of energy transducers is analyzed on examples of well-known problems on the forced vibrations of the narrow piezoceramic plates-rods with the partially placed or split electrodes. It is shown in particular that the anti-phase excitation of vibrations can be an effective tool to separate of the overtones and increase of the resonator operating frequency. At that, presence of sections without electrodes can result in some increasing the DECF of the main resonance. While the part of electrodes being abridged, then both the odd and even longitudinal modes can be excited, which are absent in the case of unbroken electrodes. An analysis of the stress state and admittance is in a good matching with experiments.

Key words: piezoceramic transducer, forced vibrations of piezoresonator, active and reactive components of admittance, stress state of piezoresonator.

Введение.

Проблема управления эффективностью электромеханического преобразования энергии в пьезоэлектрических преобразователях не нова. Кварцевые резонаторы с неполным электродированием [5] и разделенными электродами изучались почти сто лет назад [9]. Подробный анализ первых работ дан в известной монографии [5]. В недавних работах [11, 12, 20] рассмотрены трансформаторы и резонаторы с разделенными или неполными электродами и исследовано влияние положения границы раздела областей на динамический коэффициент электромеханической связи (КЭМС). Авторам [1] удалось выделить первый обертоном продольных колебаний стержня $100 \times 10 \times 2$ мм (моду $L3$) с одновременным подавлением основной моды $L1$ путем разделения электродного покрытия с обеих сторон на три одинаковые области при противофазном их электрическом нагружении.

В работе [18] на основе экспериментального исследования продольных колебаний пьезокерамических стержней с поперечной поляризацией и близким к квадратному поперечным сечением при разделенных на три или четыре участка электродах удалось установить, что распределение внутренних механических напряжений вдоль половины длины по гармоническому закону после разделения электродов сохраняется. Уровень напряжений на каждой отдельной моде колебаний зависит от схемы соединения разделенных электродов. После противофазного включения четырех электродов мода $L2$, которая при сплошных электродах вообще не наблюдается, достигает по КДКЭМС 0,75 уровня моды $L1$. До первого резонанса и между резонансными выбросами уровень выходного потенциала любого пьезотрансформаторного выхода определяется, главным образом, коэффициентом передачи емкостного делителя, образованного междуэлектродными емкостями, и от проявлений пьезоэффекта не зависит.

Почти сорок лет назад в [7] предложено и обосновано так называемый энергетический метод определения эффективных КЭМС [7]. На примерах продольных колебаний частично электродированного тонкого стержня с поперечной поляризацией и стержня с продольной поляризацией при заглубленных электродах было показано,

что динамический КЭМС достигал максимума, когда активная часть составляла 75% объема или площади образца.

Любой, отделенный от основного электродного покрытия участок поверхности электрода, превращает пьезоэлемент на трансформатор напряжения или тока [4, 6, 24]. Наличие безэлектродных областей [8, 12], неполная поляризация отдельных участков, разделение электродного покрытия на несколько частей [1, 25] приводят к неравномерному электрическому нагружению [1, 6 – 9, 11, 12, 15, 20] и сопровождается положительными или отрицательными следствиями.

Много интересных конструкций с неравномерным электрическим или механическим нагружением приведено в обзоре [10].

В данной статье на примерах известных задач о вынужденных колебаниях узких пьезокерамических пластин-стержней с частично электродированными поверхностями или с разрезами электродного покрытия анализируется влияние неравномерного электрического нагружения на адмиттанс и динамический КЭМС преобразователей энергии. Расчеты напряженного состояния и адмиттанса хорошо согласуются с экспериментами автора.

1. Аналитические выражения для компонент полной проводимости стержневых пьезокерамических резонаторов.

Как показано в работах автора [3, 16 – 19], все существующие формулы для полной проводимости (адмиттанса) пьезорезонаторов можно свести к единому выражению

$$Y_{pe} = j\omega C_0 \frac{\Delta_a}{\Delta_r} = \frac{j2\pi f_{01} C_0 x}{x_{01}} \frac{\Delta_a}{\Delta_r} = jax \frac{\Delta_a}{\Delta_r} \left(a = \frac{2\pi f_{01} C_0}{x_{01}} \right), \quad (1)$$

где j – мнимая единица; ω – круговая частота; C_0 – статическая межэлектродная емкость; Δ_r – резонансный определитель; Δ_a – антирезонансный определитель; x – текущее значение комплексной безразмерной частоты; x_{01} – активная составляющая резонансной безразмерной частоты; f_{01} – измеренная частота (в Герцах) максимума полной проводимости.

В частности, для продольных колебаний тонкого стержня длиной l , шириной w при толщине h с поперечной поляризацией и сплошных электродах, полностью покрывающих главные поверхности, имеем

$$\Delta_r(x) = \cos(x); \quad \Delta_a(x) = (1 - k_{31}^2)\Delta(x) + k_{31}^2 \sin x / x; \quad (2)$$

$$s_{11}^E = s_{110}(1 - js_{11m}); \quad \varepsilon_{33}^T = \varepsilon_{330}(1 - j\varepsilon_{33m}); \quad d_{31} = d_{310}(1 - jd_{31m}); \quad (3)$$

$$C_1 = C_{01}(1 - j\varepsilon_{33m}); \quad x = x_0(1 - 0,5js_{11m}); \quad C_{01} = \frac{\varepsilon_{3301}lw}{h}; \quad (4)$$

$$d_{31}^2 = d_{310}^2(1 - 2jd_{31m}); \quad k_{31}^2 = k_{310}^2[1 + j(s_{11m} + \varepsilon_{33m} - 2d_{31m})].$$

Рассмотрим вынужденные колебания тонких узких стержней с неполными или разделенными на три участка электродами (рис. 1). Электроды изображены утолщенными линиями.

Начнем с первой схемы, содержащей электродные и безэлектродные участки. Совместим начало координат с центром пластины. Электродный участок I простирается вдоль $-a \leq y \leq a$, область II (справа) занимает часть $a \leq y \leq l$, а участок III (слева) размещен в пределах $-l \leq y \leq -a$.

Все обозначения совпадают с работами [3, 8, 15 – 19]. Колебания возбуждаются разницей потенциалов $V_0 = V_0 e^{j\omega t}$, множитель $e^{j\omega t}$ опущен. Предполагается, что электродное покрытие удалено с части поверхности после поляризации всего стержня.

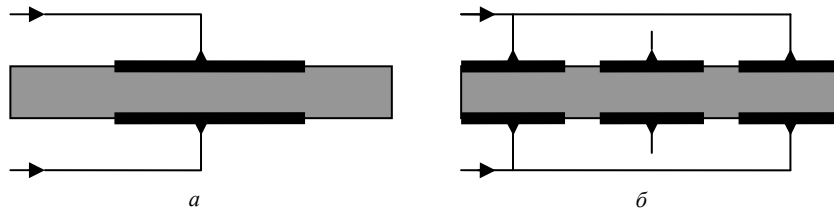


Рис. 1

Уравнения состояния и движения в электродированной области имеют вид [1, 8]

$$\varepsilon_{y1} = \frac{\partial U_{y1}}{\partial y} = s_{11}^E \sigma_{y1} + d_{31} E_{x1}; \quad D_{x1} = \varepsilon_{33}^T E_{x1} + d_{31} \sigma_{y1}; \quad \frac{d^2 U_{y1}}{dy^2} + \rho \omega^2 s_{11}^E U_{y1} = 0, \quad (5)$$

а в безэлектродных участках электрическая индукция равна нулю, поэтому

$$D_{x2} = 0; \quad E_{x2} = -\frac{d_{31} \sigma_{y2}}{\varepsilon_{33}^T};$$

$$\varepsilon_{y2} = s_{11}^E \sigma_{y2} - \frac{d_{31}^2 \sigma_{y2}}{\varepsilon_{33}^T} = s_{11}^E \sigma_{y2} \left(1 - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T} \right) = s_{11}^E (1 - k_{31}^2) \sigma_{y2} = s_{11}^D \sigma_{y2}. \quad (6)$$

Выражения для смещений и деформаций во всех участках одинаковы

$$U_{yi} = A_i \sin k_i y + B_i \cos k_i y; \quad \varepsilon_{yi} = A_i k_i \cos k_i y - B_i k_i \sin k_i y \quad (k_1^2 = \rho \omega^2 s_{11}^E, k_2^2 = \rho \omega^2 s_{11}^D). \quad (7)$$

Продольные деформации и напряжения в областях –

$$\varepsilon_{y1} = s_{11}^E \sigma_{y1} + d_{31} E_{x1}; \quad \sigma_{y1} = \frac{\varepsilon_{y1}}{s_{11}^E} - \frac{d_{31} E_{x1}}{s_{11}^E} = \frac{A_1 k_1 \cos k_1 y - B_1 k_1 \sin k_1 y}{s_{11}^E} - \frac{d_{31} E_{x1}}{s_{11}^E}; \quad (8)$$

$$\varepsilon_{y2} = s_{11}^D \sigma_{y2}; \quad \sigma_{y2} = \frac{\varepsilon_{y2}}{s_{11}^D} = \frac{A_2 k_2 \cos k_2 y - B_2 k_2 \sin k_2 y}{s_{11}^D}; \quad (9)$$

$$\varepsilon_{y3} = s_{11}^D \sigma_{y3}; \quad \sigma_{y3} = \frac{A_3 k_3 \cos k_3 y - B_3 k_3 \sin k_3 y}{s_{11}^D}.$$

На торцах напряжений нет, а на границе областей напряжения и смещения непрерывны, колебания пластины осесимметричны $U_{yi}(-x) = -U_{yi}(x)$, т. е. $i = 1$:

$$\sigma_{y3} |_{y=-l} = \sigma_{y2} |_{y=l} = 0; \quad \sigma_{y1}(a) = \sigma_{y2}(a); \quad U_{y1}(0) = 0; \quad U_{y1}(a) = U_{y2}(a);$$

$$\sigma_{y1}(-a) = \sigma_{y3}(-a); \quad U_{y1}(-a) = U_{y3}(-a). \quad (10)$$

Из соотношений (8) – (10) имеем

$$A_1 = \frac{\lambda d_{31} E_{x1}}{k_1} \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad B_1 = 0; \quad A_2 = \frac{\lambda d_{31} E_{x1}}{k_1} \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad B_2 = \frac{\lambda d_{31} E_{x1}}{k_1} \frac{\Delta_3}{\Delta}; \quad A_3 = A_2; \quad B_3 = -B_2;$$

$$\Delta_1 = \cos(\lambda \kappa - \lambda \gamma \kappa); \quad \Delta_2 = \sin \lambda \kappa \sin \gamma \kappa; \quad \Delta_3 = \sin \gamma \kappa \cos \lambda \kappa \quad (\kappa = k_1 l; \quad \gamma = a / l; \quad \lambda = k_2 / k_1);$$

$$\Delta = \lambda \cos \gamma \kappa \cos(\lambda \kappa - \lambda \gamma \kappa) - \sin \gamma \kappa \sin(\lambda \kappa - \lambda \gamma \kappa)$$

$$\left(\frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{s_{11}^D}{s_{11}^E}}; k_1 a = \gamma \kappa; k_2 l = \lambda \kappa; k_2 a = \gamma \lambda \kappa \right). \quad (11)$$

Электростатическая индукция D_{x1} в электродированной области

$$D_{x1} = \varepsilon_{33}^T E_{x1} + \frac{d_{31} A_1 k_1 \cos k_1 y}{s_{11}^E} - \frac{d_{31}^2 E_{x1}}{s_{11}^E} = \varepsilon_{33}^T E_{x1} (1 - k_{31}^2) + \frac{d_{31} A_1 k_1 \cos k_1 y}{s_{11}^E} \quad (12)$$

дает возможность определить полный пьезозаряд Q_1 , ток I_1 и адмиттанс Y пластины

$$Q_1 = \int_S D_{x1} dS = \varepsilon_{33}^T S_1 E_{x1} \left[1 - k_{31}^2 + \frac{\lambda k_{31}^2 \sin \gamma \kappa \Delta_1}{\gamma \kappa \Delta} \right];$$

$$I_1 = j\omega Q_1 = -j\omega C_0^T V_0 \left[1 - k_{31}^2 + \frac{\lambda k_{31}^2 \sin \gamma \kappa \Delta_1}{\gamma \kappa \Delta} \right];$$

$$Y = I_1 / V_0 = -j\omega C_0^T \left[1 - k_{31}^2 + \frac{\lambda k_{31}^2 \sin \gamma \kappa \Delta_1}{\gamma \kappa \Delta} \right];$$

$$Y = -j\omega C_0^T \frac{\Delta_a}{\Delta_r}; \Delta_r = \Delta; \Delta_a = (1 - k_{31}^2)\Delta + \lambda k_{31}^2 \sin \gamma \kappa \Delta_1 / \gamma \kappa$$

$$\left(C_0^T = \frac{\varepsilon_{33}^T S_1}{\delta}; S_1 = 2a \cdot 2b; \delta = 2h; E_{x1} = -\frac{V_0}{\delta} \right). \quad (13)$$

Все функции и электроупругие константы в соотношениях (4) – (13) являются комплексными [8, 13, 16]. Окончательно для упругих смещений и напряжений вдоль стержня от $y = 0$ до $y = l$ имеем

$$U_{y1} = A_1 \sin k_1 y = \frac{\lambda d_{31} E_{x1} \Delta_1}{k_1 \Delta} \sin k_1 y; U_{y2} = \frac{\lambda d_{31} E_{x1} \Delta_2}{k_1 \Delta} \sin k_2 y + \frac{\lambda d_{31} E_{x1} \Delta_3}{k_1 \Delta} \cos k_2 y; \quad (14)$$

$$\sigma_{y1} = \frac{\lambda d_{31} E_{x1} \Delta_1}{s_{11}^E \Delta} \cos k_1 y - \frac{d_{31} E_{x1}}{s_{11}^E}; \sigma_{y2} = \frac{\lambda d_{31} E_{x1} \Delta_2}{k_1 \Delta} \frac{k_2 \cos k_2 y}{s_{11}^D} - \frac{\lambda d_{31} E_{x1} \Delta_3 k_2 \sin k_2 y}{k_1 s_{11}^D \Delta}.$$

Перейдем к рассмотрению электродной системы рис. 1, б.

Центральный участок I занимает часть $-a \leq y \leq a$, участок II (справа) в пределах $a \leq y \leq l$, а область III (слева) простирается $-l \leq y \leq -a$. Сперва примем, что все три области независимы и в каждой действует свое электрическое поле с напряженностью E_1, E_2, E_3 . Уравнения состояния и движения во всех областях пластины одинаковы (5), поэтому смещения и деформации описываются формулами (7). Граничные условия записываются по аналогии с (10). В силу симметрии продольных смещений постоянная $B_1 = 0$. Для остальных постоянных получаем соотношения

$$A_1 = \frac{d_{31} E_2}{k \cos kl} + \frac{d_{31} (E_1 - E_2)}{k \cos kl} \cos(kl - ka);$$

$$A_2 = \frac{d_{31} E_2}{k \cos kl} + \frac{d_{31} (E_1 - E_2)}{k \cos kl} \sin kl \sin ka;$$

$$B_2 = \frac{d_{31}(E_1 - E_2)}{k \cos kl} \cos kl \sin ka; \quad A_3 = A_2 + \frac{d_{31}(E_3 - E_2)}{k \cos(kl - ka)} \cos kl;$$

$$B_3 = -A_3 \frac{\cos kl}{\sin kl} + \frac{d_{31}E_3}{k \sin kl}; \quad k^2 = \rho \omega^2 s_{11}^E. \quad (15)$$

В случае противофазного электрического нагружения, когда $E_2 = -E_1$ ($E_2 = E_3$) эти соотношения совпадают с выражениями (6) работы [1].

Электростатическая индукция в области I выражается формулой (12), а для наведенных на электродах областей I и II пьезозарядов и токов получаем

$$Q_1 = \int_S D_{x1} dS = \varepsilon_{33}^T S_1 E_1 \left[1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_1}{\gamma \kappa} \sin \gamma \kappa \right]; \quad I_1 = -j \omega C_1^T V_1 \left[1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_1}{\gamma \kappa} \sin \gamma \kappa \right];$$

$$Q_2 = \varepsilon_{33}^T S_2 E_1 \left[(1 - k_{31}^2) \mu_2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_0}{(\kappa - \gamma \kappa) \Delta} \right]; \quad I_2 = -j \omega C_2^T V_1 \left[(1 - k_{31}^2) \mu_2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_0}{(\kappa - \gamma \kappa) \Delta} \right], \quad (16)$$

где

$$\Delta = \cos \kappa; \quad \Delta_1 = \mu_2 + (1 - \mu_2) \cos(\kappa - \gamma \kappa); \quad \left(\mu_2 = \frac{E_2}{E_1}, E_1 = -\frac{V_1}{\delta}, E_2 = -\frac{V_2}{\delta} \right);$$

$$\Delta_2 = \mu_2 + (1 - \mu_2) \sin \gamma \kappa \sin \kappa; \quad \Delta_3 = (1 - \mu_2) \sin \gamma \kappa \cos \kappa;$$

$$\Delta_0 = \Delta_2 (\sin \kappa - \sin \gamma \kappa) + \Delta_3 (\cos \kappa - \cos \gamma \kappa); \quad \left(C_1^T = \frac{\varepsilon_{33}^T S_1}{\delta}; \quad S_1 = 2a \cdot 2b; \quad \delta = 2h; \right.$$

$$\left. C_2^T = \frac{\varepsilon_{33}^T S_2}{\delta}; \quad S_2 = (l - a) \cdot 2b; \quad C_0^T = \frac{\varepsilon_{33}^T 2l \cdot 2b}{\delta} = C_1^T + 2C_2^T; \quad C_1^T = \gamma C_0^T; \quad C_2^T = \frac{1 - \gamma}{2} C_0^T \right). \quad (17)$$

Общий ток I , что проходит через резонатор, как и адмиттанс стержня Y , зависят от способа электрического нагружения его участков. Когда области II и III эквипотенциальны, то

$$I = I_1 + 2I_2 = -j \omega C_1^T V_1 \left[1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_1}{\gamma \kappa} \sin \gamma \kappa \right] - j 2 \omega C_2^T V_1 \left[(1 - k_{31}^2) \mu_2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_0}{(\kappa - \gamma \kappa) \Delta} \right] =$$

$$= -j \omega C_0^T V_1 \left\{ \gamma \left[1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_1}{\gamma \kappa} \sin \gamma \kappa \right] + (1 - \gamma) \left[(1 - k_{31}^2) \mu_2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_0}{(\kappa - \gamma \kappa) \Delta} \right] \right\} \quad (\gamma = a/l). \quad (18)$$

Резонансные и антирезонансные частоты определяются условиями

$$\Delta(\kappa) = \cos(\kappa) = 0 \quad (19)$$

и

$$(1 - k_{31}^2) \Delta \gamma_1 + k_{31}^2 (\Delta_1 \sin \gamma \kappa + \Delta_0) / \kappa = 0; \quad (\gamma_1 = \gamma + (1 - \gamma) \mu_2). \quad (20)$$

Адмиттанс пластины-стержня для разделенных на три участка электродов равен

$$Y = \frac{I}{V_1} = -j \omega C_0^T \left\{ \gamma \left[1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_1}{\gamma \kappa} \sin \gamma \kappa \right] + (1 - \gamma) \left[(1 - k_{31}^2) \mu_2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_0}{(\kappa - \gamma \kappa) \Delta} \right] \right\}. \quad (21)$$

Выражения (15) – (21) являются более общими, чем формулы работы [1], поскольку позволяют анализировать любые случаи электрического нагружения, включая пьезотрансформаторные режимы, когда ток в той или иной области равен заданному.

2. Расчет динамических КЭМС и компонентов полной проводимости.

Приведенные выше выражения (11) и (13) использованы автором для расчетов резонансных и антирезонансных частот в зависимости от соотношения размеров. Табл. 1 и 2 иллюстрируют полученные результаты для мод $L1$, $L3$ гипотетического стержня из статическим КЭМС $k_{3l}^2 = 0,19$ при соответствующем ему отношении волновых чисел 0,9. Частоты обозначены в таблицах через x_{a1} , x_{r1} . Символами x_{a2} , x_{r2} обозначены частоты, полученные без учета разности скоростей звука в электродированных и безэлектродных участках [12].

Таблица 1

γ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	1,0
x_{a1}	1,7453	1,7453	1,7452	1,7448	1,7437	1,7415	1,7374	1,7344	1,7307	1,7209	1,7075
x_{r1}	1,7058	1,6704	1,6405	1,6165	1,5982	1,5853	1,5771	1,5745	1,5727	1,5710	1,5708
k_{d1}^2	0,0453	0,0858	0,1199	0,1471	0,1669	0,1794	0,1845	0,1844	0,1826	0,1742	0,1601
x_{a2}	1,6010	1,6313	1,6603	1,6862	1,7073	1,7219	1,7290	1,7295	1,7283	1,7206	1,7075
x_{r2}	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708
k_{d2}^2	0,0377	0,0741	0,1078	0,1369	0,1599	0,1755	0,1823	0,1835	0,1823	0,1741	0,1601

Таблица 2

γ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	1,0
x_{a1}	5,2359	5,2321	5,2105	5,1504	5,0488	4,9323	4,8360	4,8025	4,7801	4,7633	4,7617
x_{r1}	5,127	5,0721	5,0615	5,0557	5,0141	4,9295	4,8318	4,7895	4,7558	4,7187	4,7124
k_{d1}^2	0,0414	0,0612	0,0572	0,0368	0,0137	0,0011	0,0017	0,0054	0,0102	0,0187	0,0207
x_{a2}	4,7990	4,8593	4,8671	4,8230	4,7616	4,7203	4,7141	4,7222	4,7342	4,7567	4,7617
x_{r2}	4,7124	4,7124	4,7124	4,7124	4,7124	4,7124	4,7124	4,7124	4,7124	4,7124	4,7124
k_{d2}^2	0,0361	0,0605	0,0636	0,0459	0,0207	0,0033	0,0007	0,0042	0,0092	0,0186	0,0207

Квадраты динамических КЭМС (КДКЭМС) определены по формуле Мэзона [1, 3, 8, 12, 14, 18]

$$k_d^2 = \frac{f_a^2 - f_r^2}{f_a^2} \cong \frac{f_n^2 - f_m^2}{f_n^2} \cong \frac{2(f_n - f_m)}{f_n}. \quad (22)$$

Результаты, полученные с учетом и без учета разности скоростей звука, совпадают лишь при $\gamma = 1$ и расходятся тем сильнее, чем меньшая электродная область.

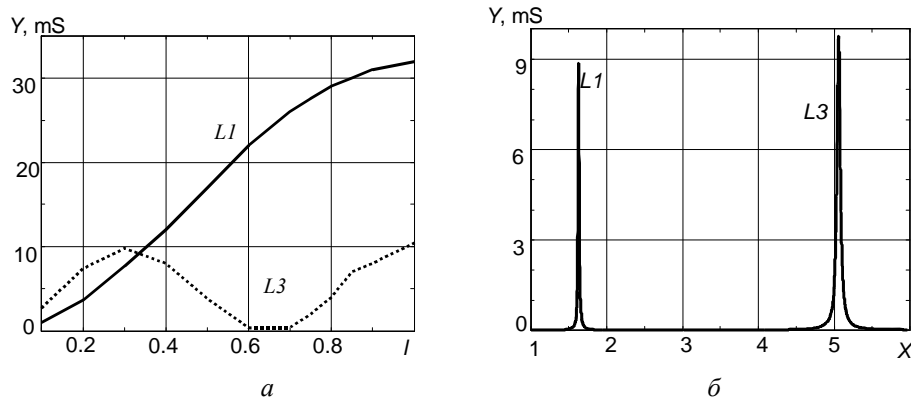


Рис. 2

Адмиттанс стержня $100 \times 10 \times 1$ мм, аналогичного описанному в [1], рассчитан за (1) – (4) и (13) при заданных величинах $\epsilon_{33m} = 0,01$; $\lambda = 0,9$; $\gamma = 0,1 - 0,999$; $s_{11m} = 0,01$; $d_{31m} = 0,01$; $a = 1,31 \text{ мС}$; $k_{31}^2 = 0,19$. За результатами расчетов для мод $L1$ и $L3$ построены графики рис. 2, а. АЧХ адмиттанса (рис. 2, б) получена для $\gamma = 0,33$. Графики хорошо согласуются – моды $L1$ и $L3$ при такой геометрии электродов практически равноценны.

На рис. 3 представлены АЧХ адмиттанса призмы-стержня $70,3 \times 8,1 \times 6,8/7,3$ мм из пьезокерамики ЦТБС-3, рассчитанные при экспериментально полученных данных: $\epsilon_{33m} = 0,0022$; $s_{11m} = 0,0016$; $d_{31m} = 0,003$; $a = 0,129 \text{ мС}$; $k_{31}^2 = 0,074$. Электродное покрытие разделено с обеих сторон на три участка с противофазным нагружением, расчет выполнен в интервале частот $1 \leq x \leq 15$ при $\gamma = 0,333$ и $0,999$, соответственно.

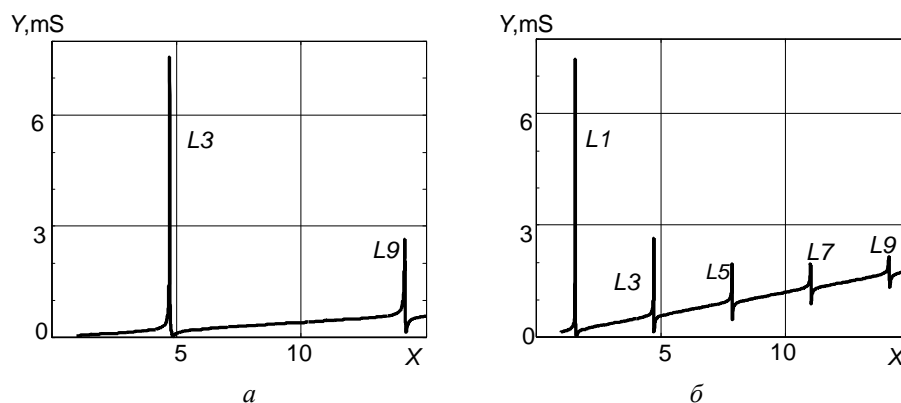


Рис. 3

Нетрудно видеть, что при противофазном нагружении разделенных на три одинаковые участка электродов в стержне увеличивается интенсивность колебаний на первом продольном оберitone $L3$ и высшей моде $L9$, тогда как моды $L1$, $L5$, $L7$ подавляются. Случай $\gamma = 0,999$ практически соответствует сплошным электродам и в том же частотном интервале могут возбуждаться продольные моды $L1 - L9$.

3. Методика эксперимента и полученные результаты.

Для экспериментального исследования вынужденных колебаний пьезопреобразователей в диапазоне частот автором предложена усовершенствованная схема Мэзона [3, 16, 21] с коммутатором, позволяющая последовательно измерять падения напряжений на пьезоэлементе U_{pe} , нагрузочном резисторе U_R и на входе схемы измерений U_{in} . По ним вычисляются полная Y_{pe} , активная Y_{ac} и реактивная Y_{re} проводимости, мгновенная мощность P_{pe} , импеданс Z_{pe} , фазовые сдвиги между током и напряжением

$$Y_{pe} = \frac{I_{pe}}{U_{pe}} = \frac{U_R}{RU_{pe}}; \quad Y_{ac} = Y_{pe} \cos \alpha; \quad Y_{re} = Y_{pe} \sin \alpha = Y_{pe} \sin(\arccos \alpha); \quad (23)$$

$$P_{pe} = U_{pe} I_{pe} = \frac{U_R U_{pe}}{R}; \quad Z_{pe} = \frac{1}{Y_{pe}}; \quad \cos \alpha = \frac{U_{pe}^2 + U_R^2 - U_{in}^2}{2U_{pe} U_R}, \quad (24)$$

где I_{pe} – электрический ток, проходящий через пьезоэлемент и резистор R , α – угол между падениями потенциалов U_{pe} и U_R .

Сначала измерения проведены на образцах со сплошными электродами, которые затем разделялись при помощи острых твердосплавных инструментов на отдельные участки. Полученные электродные области либо соединялись между собой определенным образом, либо оставались свободными.

Ниже приведены зависимости для образцов в форме узких призм длиной 70,3 мм при ширине 8,1 мм из материала ЦТБС-3. В сечении призмы были трапецевидны с основаниями 6,8 и 7,3 мм. Плоскости 70,3 x 8,1 мм покрыты тонкими серебряными электродами. Поляризация по толщине. Исследованы колебания трех призм одинаковых размеров и состава, которые заметно отличались электроупругими свойствами. В первой призме электродное покрытие оставалось сплошным, во второй был сделан двусторонний разрез по центру, а в третьей – два двусторонние разрезы на три равных участка.

В табл. 3 приведены емкости и тангенсы диэлектрических потерь. В верхней строке цифрами 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 3.1 – 3.5, соответственно, обозначены: первая призма сплошные электроды, вторая призма – сплошные, противофазные и закороченные электроды, третья призма – сплошные, противофазные электроды, а также случаи свободных внутренних или внешних электродов. В схеме 3,3 нижние электроды были все соединены вместе, свободным оставался верхний центральный электрод и измерялась емкость между верхними внешними и нижними электродами. В схеме 3,4 измерялась емкость между центральным верхним и всеми нижними электродами. Наконец, в схеме 3,5 измерялась емкость между верхним центральным и соседними с ним внешними электродами. В нижнем ряду таблицы приведены отношения C_i / C_0 измеренных емкостей к емкостям соответствующих призм при сплошных электродах.

Таблица 3

Схема	1,1	2,1	2,2	2,3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
C , pF	1296	1300	1443	780	1228	1570	978	561	478
$\text{tg } \delta$	0,0022	0,0026	0,0029	0,0031	0,0022	0,003	0,0026	0,0028	0,003
C_i / C_0	1,0	1,0	1,11	0,6	1,0	1,278	0,796	0,45	0,389

При выводе соотношений (17) емкости C_1^T , C_2^T , C_0^T определены по формуле плоского конденсатора через отношение площади к толщине, умноженное на диэлектрическую постоянную ϵ_{33}^T . После разделения емкости полученных областей должны относиться к полной емкости образца так, как относятся площади соответствующих электродов.

Как следует из таблицы, статические емкости призм при сплошных (схема 1.1) или синфазных (схемы 2,1 и 3,1) отличаются лишь на 6%. Противофазное соединение с одним двусторонним разрезом (схема 2,2) ведет к увеличению измеренной емкости на 11%, а с двумя разрезами (схема 3,2) – на 28%. При коротком замыкании половины электродного покрытия (схема 2,3) измеренная емкость не равна половине от C_0^T , как следовало ожидать, а составляет $780/1300 = 0.6$. Не равны $2/3$ и $1/3$ и отношения емкостей в схемах 3,3 и 3,4, а значительно больше. В схеме 3,5 отношение емкостей достигает 0,389, хотя ожидаемая величина должна быть близка к нулю. Объяснение наблюдаемого феномена следует искать, скорее всего, в появлении дополнительных «паразитных» емкостей на границах раздела, так как ширина разделов лишь сотые доли миллиметра. Именно в этом, наверное, и проявляется влияние разрезов на колебания пьезопреобразователей, чего стержневая одномерная модель не учитывает.

Измеренные частоты максимумов и минимумов адмиттанса в килогерцах, а также КДКЭМС для схем 1,1 – 3,3 приведены в табл. 4. Символами $L2^*$ и $L6^*$ обозначены слабые «спутники», появляющиеся при противофазных или закороченных электродах в схемах 2,2 и 2,3. Пустые клетки означают, что указанная мода в эксперименте не зарегистрирована.

Вдоль половины длины призмы с одним двусторонним разрезом посреди поверхности 70,3 x 8,1 мм в электродном покрытии одного из оснований были отделены 11 пьезотрансформаторных датчиков [8, 18]. Их положения по отношению к центру поверхности следующие: 0; 3,2; 6,5; 9,5; 12,5; 15,5; 18,7; 21,5; 25; 28,2 и 32,2 мм. Средняя величина емкости датчиков относительно основных электродов равна 135,2 пФ, наибольшие отклонения от среднего достигают 11 %. Основной причиной отклонения от среднего является неодинаковая ширина зазора при отделении датчиков. Наличие датчиков может быть одной из причин появления слабых «спутников» $L2^*$ и $L6^*$

справа от мод $L2$ и $L6$. Пьезотрансформаторные датчики применялись для изучения напряженного состояния призмы, поскольку их потенциалы пропорциональны механическим напряжениям под ними [8, 15, 18]. Этот вопрос для призмы с одним двусторонним разрезом электродного покрытия подробно изучен в [18].

Таблица 4

Схема	f	$L1$	$L2$	$L2^*$	$L3$	$L5$	$L6$	$L6^*$
	f_m	25,623			75,731	123,863		
1,1	f_n	26,398			76,013	124,028		
	k_d^2	0,059			0,0074	0,0026		
	f_m	25,744			76,022	124,432		
2,1	f_n	26,363			76,242	124,668		
	k_d^2	0,047			0,0064	0,0026		
	f_m	25,735	51,071	53,172			146,057	148,219
2,2	f_n	25,795	52,092	53,244			146,910	148,811
	k_d^2	0,0047	0,0392	0,0027			0,0116	0,0021
	f_m	25,741	51,047	53,029	75,941	124,119	146,150	
2,3	f_n	26,033	51,686	53,275	76,312	124,606	148,836	
	k_d^2	0,0224	0,0246	0,0092	0,0097	0,0078	0,0093	
	f_m	26,268			77,639	127,067		
3,1	f_n	27,097			77,899	127,336		
	k_d^2	0,061			0,0067	0,0041		
	f_m				77,459			
3,2	f_n				79,439			
	k_d^2				0,051			
	f_m	26,604			78,105	126,748		
3,3	f_n	27,075			79,032	127,158		
	k_d^2	0,0348			0,0235	0,0064		

На рис. 4 представлены экспериментальные зависимости от частоты адмиттанса призмы с одним двусторонним разрезом электродного покрытия при сплошных (a), противофазных (b) и коротко замкнутых ($в$) электродах.

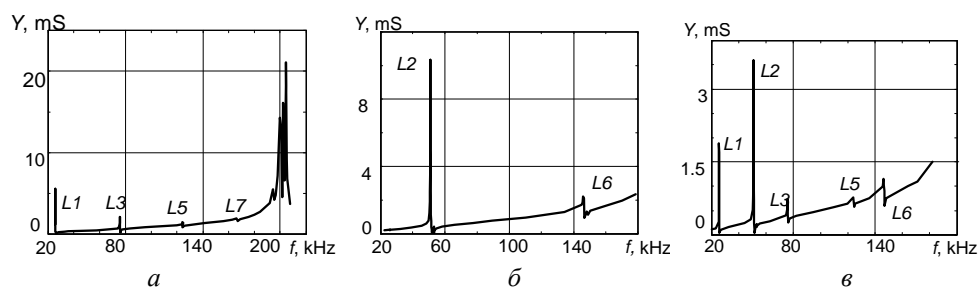


Рис. 4

В диапазоне ультразвуковых частот генератора Г3-56/1 20 – 207 кГц при сплошных электродах наблюдаются продольные моды $L1$, $L3$, $L5$ и $L7$, а также несколько интенсивных мод, о характере которых говорить трудно. Интенсивные моды маскируют собой высшие обертона продольных колебаний и для стержня выбранной геометрии приходится ограничиваться модой $L7$.

В случае противофазного нагружения выделяются моды $L2$, $L6$, а справа от них появляются слабые «спутники» $L2^*$ и $L6^*$. При закорачивании половины электродного покрытия регистрируются как «нечетные», так «четные» моды. Нет лишь «четной» моды $L4$, для ее выделения необходимо делить электродное покрытие на четыре одинаковых участка и соединять электроды противофазно.

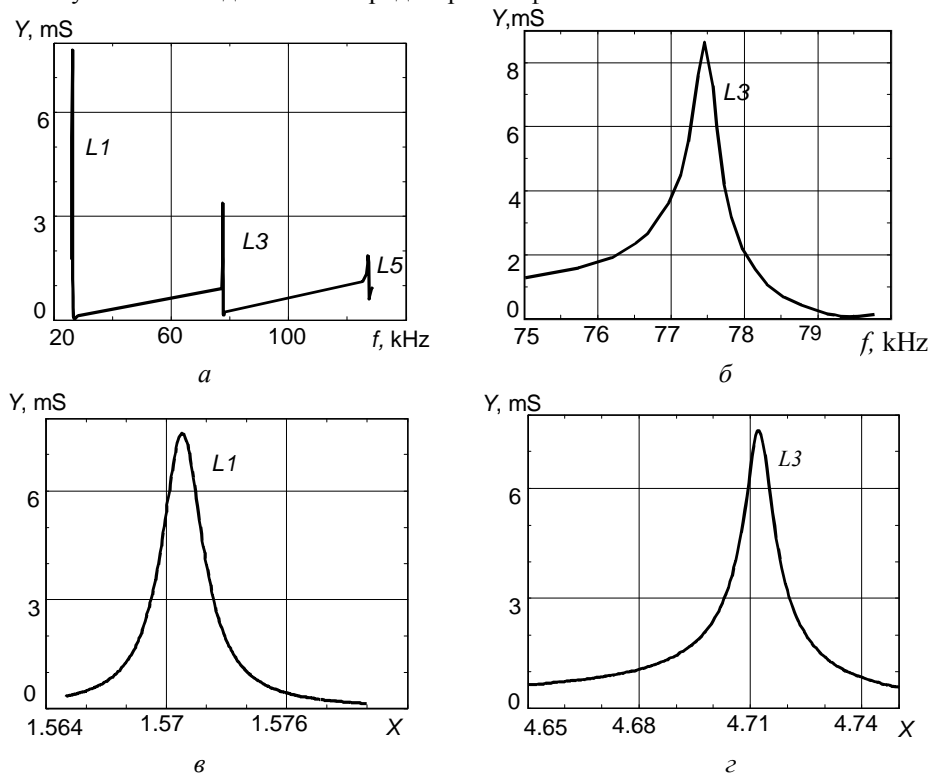


Рис. 5

АЧХ падений потенциала в призме с тремя одинаковыми электродными участками снимались для синфазного и противофазного нагружения, а также при свободном одном из центральных электродов. Рис. 5 иллюстрирует полученные экспериментальные и расчетные результаты. Экспериментальные данные приведены в случае сплошных электродов для мод $L1$, $L3$, $L5$ (рис. 5, а). Так как моды $L1$, $L5$ при противофазном питании не регистрировались, то измерения велись в суженном частотном диапазоне 75 – 80 кГц (рис. 5, б). Расчеты для моды $L1$ при синфазных электродах (рис. 5, в) и для моды $L3$ при противофазных электродах (рис. 5, г) проведены по формулам (18), (23). Расчетные и экспериментальные кривые хорошо согласуются между собой.

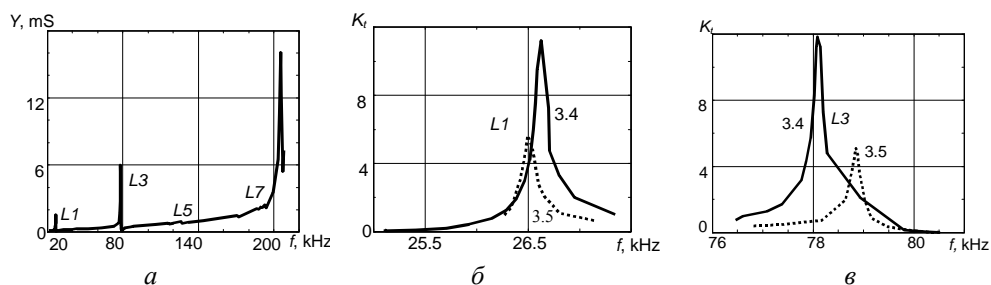


Рис. 6

Частотные зависимости адмиттанса призмы с двумя двусторонними разрезами и соединением электродов по схеме 3,3, когда центральный верхний электрод оставался свободным (рис. 6, а), показывают, что наибольшую интенсивность имеет мода $L3$. Ее адмиттанс увеличился по сравнению со случаем сплошных электродов с 3,5 мС до 6 мС. Адмиттанс же основной продольной моды $L1$ снизился, по сравнению со сплошными электродами (рис. 5, а), с 7,6 мС до 1,57 мС. Моды $L5, L7$ ослабились еще больше. В режиме пьезотрансформатора, выходом которого являются центральный (рис. 6, б) или периферийные (рис. 6, в) электроды, коэффициенты трансформации мод $L1$ и $L3$ близки по величине. Цифрами 3,4 и 3,5 обозначены схемы нагружения, когда свободными есть верхний центральный или крайние электроды, соответственно.

На рис. 7 приведены графики частотных зависимостей выходных потенциалов многоэлектродного пьезотрансформатора на модах $L1, L2, L3$. Призма (рис. 1, б) имела три пары электродов – два центральных, два у левого края и два возле правого. К генератору присоединялись два расположенных слева электрода. Остальные четыре электрода оставались свободными. Коэффициент передачи зависит от местоположения выходного электрода и моды колебаний. На первом продольном резонансе $L1$ более высокими являются электрические напряжения на верхнем и нижнем центральных электродах (кривые 1 и 2 на рис. 7, а).

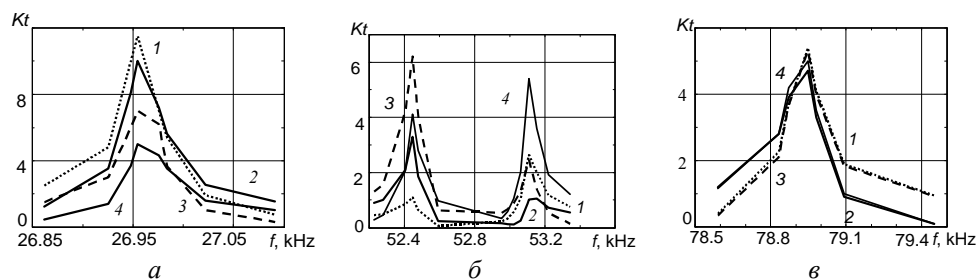


Рис. 7

На моде $L3$ наблюдается незначительная зависимость выходного потенциала от положения электрода (рис. 7, в), тогда как мода $L2$, которой вообще нет при сплошных электродах, демонстрирует наибольшую зависимость от положения электродов. Она имеет два максимума выходного напряжения на частотах 52,446 и 53,109 кГц (рис. 7, б).

Причиной наблюдаемого «раздвоения» резонансной частоты может быть, скорее всего, значительное влияние выходных электродов на входные. Об этом свидетельствует также заметное повышение частот максимумов коэффициентов передачи на модах $L1$ 26,95 кГц и $L3$ 78,95 кГц в режиме многоэлектродного пьезотрансформатора по сравнению с частотами максимумов адмиттанса тех же мод при сплошных электродах – соответственно, 26,268 и 77,639 кГц (табл. 4).

Отдельно следует остановиться на влиянии разрезов электродного покрытия на механическую добротность Q_m . Хотя упомянутые выше три призмы были изготовлены одновременно и из одного материала, имели практически одинаковые статические емкости при сплошных электродах, они существенно отличались своими поперечными КЭМС k_{31}^2 и добротностями.

Определенные по известной формуле [4, 14]

$$\frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} = \frac{\pi}{2} \frac{f_n}{f_m} \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{f_n - f_m}{f_n} \right)$$

коэффициенты составляли 0,072 (призма со сплошными электродами), 0,074 (призма с двумя разрезами при синфазном включении) и 0,058 (призма с одним разрезом при синфазном питании электродов). Механические добротности Q_m определены по АЧХ адмиттанса на уровне – 3дБ [3] и для тех же условий равны: 962,5; 627 и 525,6. Не исключено, что причиной снижения добротности в призмах с разрезами электродного покрытия и было именно разделение.

Поведение любого пьезоэлектрического преобразователя существенно зависит также от способа электрического нагружения, т. е. от того, что поддерживается постоянным по амплитуде в процессе измерений: ток, напряжение, мощность или колебательная скорость.

В [2] показано, что в режиме заданного падения напряжения на пьезоэлементе при приближении к резонансу мгновенная мощность увеличивается, а вблизи от антирезонанса – снижается. Наоборот, в режиме заданного тока через пьезоэлемент при приближении к резонансу мгновенная мощность снижается, а вблизи от антирезонанса увеличивается.

Это обстоятельство может быть причиной обнаруженной в [22, 23] значительной нелинейности адмиттанса стержня со сплошными электродами в условиях высокой мощности, как и невозможность обеспечить режим заданного тока на антирезонансе.

Заключение.

1. Применяя частично электродированные пьезоэлектрические преобразователи, можно подбирать как КДКЭМС, так и изменять адмиттанс, что необходимо для согласования с нагрузкой. Влиять таким образом можно лишь на основной резонанс, поскольку обертона при частичных электродах ослаблены.

2. Разделяя электроды с последующим их неоднородным электрическим нагружением, можно не только «усиливать» отдельные обертона, но и «подавлять» нежелательные резонансы, включая основную моду. Поступать так можно до тех пор, пока избранный для «усиления» обертона не станет «маскироваться» более интенсивными поперечными и/или толщинными резонансами.

3. В высокочастотных преобразователях наличие узких разрезов электродного покрытия и свободных электродных участков может привести не только к снижению механической добротности, но и к появлению «спутников», особо заметных вблизи «четных» мод, которые при сплошных электродах вовсе не наблюдаются. Отмечено также заметное увеличение измеренной величины статической емкости при противофазном и коротко замкнутом включении. Такое увеличение эквивалентно подключению параллельно к изучаемому пьезоэлементу дополнительных конденсаторов.

4. Примененная автором одномерная стержневая модель хорошо описывает начальный участок спектра колебаний при сплошных и разделенных электродах, даже таких непростых конструктивных элементов из пьезокерамики, как длинные призмы с трапециевидным поперечным сечением. Интенсивные высокочастотные резонансы таких систем требуют дополнительных аналитических и экспериментальных исследований.

5. На вопрос, почему «раздваиваются» только «четные» моды, ответа не существует.

РЕЗЮМЕ На прикладах відомих задач про вимушені коливання вузьких п'єзокерамічних пластин-стрижнів з частково електродованими поверхнями або з розрізами электродного покриття аналізується вплив нерівномірного електричного навантаження на адмітанс і динамічний коефіцієнт електромеханічного зв'язку (КЕМЗ) перетворювачів енергії. Показано, зокрема, що протифазне збудження коливальних мод може бути ефективним засобом для виділення обертонів і підвищення робочих частот резонаторів, наявність же безелектродних ділянок може призвести до деякого підвищення КЕМЗ основного резонансу. При закорочуванні частини електродів можуть збуджуватися як непарні, так і парні поздовжні моди, яких немає при суцільних електродах. Розрахунки напруженого стану й адмітансу добре узгоджуються з експериментами.

1. Андрущенко В.О., Борисейко О. В., Немченко Д.С., Улітко І.А. Експериментальне вивчення ефективності перетворення енергії на резонансних коливаннях п'єзокерамічного стержня з розрізними електродами при керованому електричному збудженні // Сб. пр.: Акустичний симпозиум „КОНСОНАНС-2009” (Київ, 29 вересня - 1 жовтня 2009). – Київ: Ін-т гідромеханіки НАНУ. – С. 38 – 43.
2. Безверхий О. І., Зінчук Л. П., Карлаш В. Л. Вплив електричного навантаження на вимушені коливання поперечно поляризованих п'єзокерамічних стержнів // Електроніка та зв'язок. – 2015. – 20, N 4 (87). – С.77 – 88.

3. *Карлаш В. Л.* Методи визначення коефіцієнтів зв'язку і втрат енергії при коливаннях резонаторів із п'єзокераміки // Акуст. вісник. – 2012. – **15**, № 4. – С. 24 – 38.
4. *Катц Г. В.* Магнитные и диэлектрические приборы. Ч. I. – М.; Л.: Энергия, 1964. – 416 с.
5. *Кэди У.* Пьезоэлектричество и его практическое применение. – М.: Ин. Лит., 1949. – 718 с.
6. *Лавриненко В. В.* Пьезоэлектрические трансформаторы. – М.: Энергия, 1975. – 112 с.
7. *Улитко А. Ф.* К теории электромеханического преобразователя энергии в неравномерно деформируемых пьезокерамических телах // Прикл. механика. – 1977. – **13**, № 10. – С. 115 – 123.
8. *Шульга М. О., Карлаш В. Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наук. думка, 2008. – 272 с.
9. *Cady W. G.* Theory of longitudinal vibrations of viscous rods // Phys. Rev. – 1922. – **19**, N 1. – P. 1 – 6.
10. *Dong Sh.* Review on piezoelectric, ultrasonic and magnetoelectric actuators // J. Adv. Dielect. – 2012. – **2**, N 1. – 1230001-1.
11. *Erhart J.* Parameters and design optimization of the ring piezoelectric ceramic transformer // J. Adv. Dielect. – 2015. – **5**, N 3, 1550022.
12. *Erhart J., Tutu S.* Effective electromechanical coupling for the partially electroded ceramic resonators of different geometries // Annals “DUNAREA DE JOS” Univ. of Galati Fascicle IX, Metallurgy and Material Science. – 2015. – N 2. – P. 7 – 16.
13. *Holland R.* Representation of dielectric, elastic and piezoelectric losses by complex coefficients // IEEE Trans. SU. – 1967. – **SU-14**. – P. 18 – 20.
14. *IRE Standards on Piezoelectric Crystals: Measurements of Piezoelectric Ceramics.* 1961 // Proc. IRE. – 1961. – **49**. – P. 1161 – 1169.
15. *Karlash V.* Longitudinal and lateral vibrations of a planar piezoceramic transformer // Jpn. J. Appl. Phys. – 2005. – **44**, N 4A. – P. 1852 – 1856.
16. *Karlash V. L.* Energy losses in piezoceramic resonators and its influence on vibrations' characteristics // Electronics and communication. – 2014. – **19**, N 2 (79). – P. 82 – 94.
17. *Karlash V. L.* Modeling of energy-loss piezoceramic resonators by electric equivalent networks with passive elements // Mathematical Modeling and Computing. – 2014. – **1**, N 2. – 163 – 177.
18. *Karlash V. L.* Forced Electromechanical Vibrations of Rectangular Piezoceramic Bars with Sectionalized Electrodes // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 3. – P. 360 – 368.
19. *Karlash V. L.* Forced Vibrations of an Open Cylindrical Shell Made of Piezoceramics // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P. 577 – 582.
20. *Tutu S., Erhart J.* Bar piezoelectric ceramic transformers working in longitudinal mode // Ferroelectrics. – 2015. – **486**, N 1. – P. 13 – 24.
21. *Shul'ga N. A., Karlash V. L.* Measuring the Amplitudes and Phases of Vibrations of Piezoceramic As-structural Elements // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 3. – P. 350 – 359.
22. *Uchino K., Zhuang Yu., Ural S. O.* Loss determination methodology for a piezoelectric ceramic: new phenomenological theory and experimental proposals // J. Adv. Dielect. – 2011. – **1**, N 1. – P. 17 – 31.
23. *Ural S. O., Tuncdemir S., Zhuang Yu, Uchino K.* Development of a high power piezoelectric Characterization system and its application for resonance/antiresonance mode characterization // Jpn. J. Appl. Phys. – 2009. – 48 056509
24. US Patent 439 992 1954 / Rosen C.A. – 29.06.1954.
25. *Van der Veen B.* The equivalent network of a piezoelectric crystal with divided electrodes // Phillips. Res. Rep. – 1956. – **11**. – P. 66 – 79.

Поступила 10.03.2016

Утверждена в печать 05.07.2016