

Я. Я. Рущицкий

О ПОСТОЯННЫХ МОДЕЛИ МУРНАГАНА НЕЛИНЕЙНОГО  
ГИПЕРУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The simplest mechanical statical experiments are described that allow to determine the physical constants of Murnaghan's model of nonlinear hyperelastic deformation of materials (density, two Lamé constants, three Murnaghan constants). A theoretical method of analysis is based on the notion of universal deformation of the simple shear, the hydrostatic pressure, and unilateral tension-compression. The necessary theoretical formulas are derived as applied to the Murnaghan's model. Some additional features of these formulas are shown. For example, an analysis of simple shear shows that the Murnaghan's model describes the classical nonlinear Poissoning and Kelvin effects and analysis of the uniform and unidirectional tension-compression shows the similar effects of nonlinear dependence of stresses on the strain parameters. The proposed set of simplest experiments can be used for non-linear description of new classes of elastic materials including the metamaterials.

**Key words:** elastic constants of Murnaghan's nonlinear model, universal deformations, simplest mechanical experiments.

**1. Введение. Необходимые предварительные сведения.**

*1.1. Об основных кинематических и кинетических понятиях, используемых в модели Мурнагана.* Модель Мурнагана описывает нелинейное упругое деформирование материалов при малых, умеренных и больших деформациях. Поэтому при ее описании необходимо требуются многие понятия нелинейной механики твердого деформируемого тела.

В теории деформирования тела как изменения его первоначальной формы используют понятия, связанные с геометрией тела (кинематические) и связанные с действующими на тело и внутри тела силами (кинетические) [1, 2, 5, 16]. Тело в механике задают как область трехмерного пространства  $R^3$ , в каждой точке которого задана плотность массы  $\rho$ . В  $R^3$  может быть задана лагранжева  $\{x_k\}$  или эйлерова системы координат  $\{X_k\}$ .

К понятиям кинематики относят конфигурацию  $\chi$ , вектор перемещения  $\bar{u} = \{u_k\}$ , тензор деформаций  $\varepsilon_{ik}$  и тензор поворотов  $\omega_{ik}$ . К понятиям кинетики относят внешние и внутренние силы, включая тензоры внутренних напряжений.

Конфигурацию тела в момент времени  $t$  называют актуальной, тогда как конфигурацию тела в произвольно выбранный начальный момент времени  $t^0$  называют отсчетной. При описании модели Мурнагана обычно используется тензор деформаций

Коши – Грина, который задается по известному вектору перемещений  $\bar{u}(x_k, t)$  в лагранжевой системе координат  $\{x_k\}$  и в отсчетной конфигурации

$$\varepsilon_{nm}(x_k, t) = (1/2)(u_{n,m} + u_{m,n} + u_{n,i}u_{i,m}). \quad (1)$$

### 1.2. О делении теоретических моделей упругих материалов на три группы.

Классическая механика материалов разделяет теоретические модели упругого деформирования на три группы и выработала для них установившиеся названия: гиперупругие, упругие и гипоупругие материалы. Приставка *гипер*- означает сильное увеличение чего-либо против нормы и приставка *гипо*- означает сильное уменьшение чего-либо против нормы. Поэтому считается, что гиперупругие материалы обладают свойством упругости в большей степени, чем упругие, тогда как гипоупругие обладают свойством упругости в меньшей степени, чем упругие [16].

Модель нелинейного упругого деформирования Мурнагана относится к группе гиперупругих материалов. Гиперупругость материала определяют по признаку, согласно которому удельная внутренняя энергия (энергия упругого деформирования, потенциал)  $e$  является аналитической функцией компонентов тензора деформаций, отнесенных к естественному состоянию. С точки зрения математического формализма аналитичность энергии  $e(\varepsilon_{nm})$  позволяет представлять внутреннюю энергию, зависящую от шести независимых переменных  $\varepsilon_{IK}$ , разложением в ряд Тейлора в окрестности «точки» с нулевыми координатами  $\varepsilon_{IK} = 0$  (при этом полагается, что два первых члена ряда равны нулю) [1 – 4]

$$\begin{aligned} W(\varepsilon_{IK}) = (1/2!) \left[ \left( \partial^2 W / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} \right)_{\varepsilon_{IK}=0} \equiv C_{ijkl} \right] \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \\ + (1/3!) \left[ \left( \partial^3 W / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{mn} \right)_{\varepsilon_{IK}=0} \equiv C_{ijklmn} \right] \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Для изотропных материалов

$$\begin{aligned} C_{ijkl} \equiv \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu I_{ijkl}, \quad I_{ijkl} = (1/2)(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}); \\ C_{ijklmn} = 2C \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + 2B(\delta_{ij} I_{klmn} + \delta_{kl} I_{mnij} + \delta_{mn} I_{ijkl}) + \\ + (1/2)A(\delta_{ik} I_{jlmn} + \delta_{il} I_{jkmn} + \delta_{jk} I_{ilmn} + \delta_{jl} I_{ikmn}). \end{aligned}$$

В обозначениях Фойхта  $C_{ijkl} \equiv C_{IJ}$ ,  $C_{ijklmn} \equiv C_{IJK}$  и для случая изотропии свойств внутренняя энергия (2) имеет вид

$$\begin{aligned} W(\varepsilon_{ik}) = (1/2)C_{12}(\varepsilon_{mm})^2 + (1/2)(C_{11} - C_{12})(\varepsilon_{ik})^2 + \\ + (4/3)C_{456}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + C_{144}(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm} + (1/6)C_{123}(\varepsilon_{mm})^3 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Наиболее применяемы потенциалы Мурнагана, Ривлина – Саундерса, Муни, Джона, Блетца – Ко, Хазановича, Трелоара, Огдена – Саундерса, Синьйорини. Все эти модели предложены на основе умозрительных рассуждений (по выражению Лурье [2]), относятся к теоретическим построениям феноменологического характера и предполагают в конечном счете последующее определение присутствующих в потенциалах физических постоянных способами, не связанными с феноменологическими рассуждениями (главным образом, экспериментальными способами).

### 1.3. Об универсальных деформациях.

Универсальные деформации определяются в рамках однородной изотропной теории упругости. Понятие универсальных деформаций связано с двумя требованиями: возможностью осуществления однородной де-

формации в любом материале и реализацией только с помощью поверхностных нагрузок. Несмотря на свою простоту (однородность), универсальные деформации являются избранными, их особая важность состоит в возможностях их использования для определения свойств материалов из опытов [16]. Именно из-за потребности в экспериментальном определении свойств конструкционных материалов в теории бесконечно малых деформаций подробно изучены такие виды универсальных деформаций как простой сдвиг, простое растяжение, равномерное объемное сжатие. Известно, что в однородных упругих изотропных несжимаемых материалах можно реализовать пять семейств универсальных деформаций.

Еще одна область приложения универсальных деформаций относится к механике композитных материалов. В теории эффективных модулей материалы сложной внутренней структуры с внутренними связями трактуются в большинстве случаев как однородные упругие среды. Возможность создания в последних состояния с универсальными деформациями использована при вычислении эффективных постоянных разными способами и различными авторами. К примеру, метод энергетической эквивалентности включает предположение об универсальных состояниях как необходимую компоненту. Для изотропных композитов оказалось достаточным изучение энергий, накопленных в элементарных объемах при двух видах универсальной деформации: простом сдвиге и объемном сжатии [8, 13, 16].

Третья область применения относится к нелинейной механике материалов. Имеется в виду то нелинейное явление, которое имеет название «эффект Пойнтинга» [2, 16].

**1.4. О делении деформаций на малые, умеренные и большие.** Величина деформации определяется по величине градиентов деформации  $u_{i,k}$ . Если они малые по сравнению с единицей  $|u_{i,k}| \ll 1$ , то соответствующие деформации (1) называют малыми. При этом деформации (1) могут оставаться нелинейными [3], что, в частности, справедливо в случае модели Мурнагана. В случае малых деформаций компоненты тензоров деформации и вращений настолько малые, что формы недеформированного и деформированного тела могут приближенно считаться одинаковыми.

Умеренные деформации задаются различными ограничениями на их величину. К примеру, в работе [5] рассматриваются умеренно большие деформации, в данной работе полагают умеренно малыми такие деформации, которые в случае простого сдвига превышают значения угла сдвига, принятые при замене тангенса угла сдвига самим углом или в случае объемного сжатия приводят к слабому изменению первоначально-го единичного объема.

Большие деформации понимают как такие, когда компоненты тензоров деформации и вращений настолько большие, что форма недеформированного и деформированного тела существенно отличаются.

Как упоминалось ранее, модель Мурнагана применима ко всем трем типам деформаций.

## **2. Модель Мурнагана нелинейного упругого деформирования материалов. Общие сведения.**

Эта модель основана на упругом потенциале (энергии упругого деформирования), предложенном Фрэнсисом Домиником Мурнаганом [15]. В записи через тензор деформации Коши – Грина  $\varepsilon_{ik}$  потенциал имеет вид

$$W(\varepsilon_{ik}) = (1/2)\lambda(\varepsilon_{mm})^2 + \mu(\varepsilon_{ik})^2 + (1/3)A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + B(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm} + (1/3)C(\varepsilon_{mm})^3. \quad (4)$$

Входящие в (4) постоянные величины называют:  $\lambda, \mu$  – упругими постоянными Ляме (постоянными второго порядка);  $A, B, C$  – упругими постоянными Мурнагана (постоянными третьего порядка). Необходимо обратить внимание на то, что выражение (4)

соответствует точно представлению внутренней энергии в виде ряда Тейлора (3). Также существует связь между постоянными  $C_{IJK}$  и  $A, B, C$

$$\begin{aligned} C_{111} &= 2(A + 3B + C); C_{112} = 2(B + C); C_{123} = 2C; \\ C_{144} &= B; C_{166} = (1/2)A + B; C_{456} = (1/4)A. \end{aligned} \quad (5)$$

Модель Мурнагана можно считать классической в нелинейной теории гиперупругих материалов, она учитывает все квадратичные и кубические составляющие из формулы (3) и описывает деформирование большого класса конструкционных и других материалов. Если объединить данные о постоянных модели Мурнагана, приведенные в книгах [1, 2, 17], то получится достаточно полная информация о многих десятках материалов. Как следует из [1, 2, 10, 17], в приведенных там таблицах постоянных модели Мурнагана две постоянные Ляме соответствуют значениям, определенным для исследуемых материалов в рамках модели линейной теории упругости, тогда как три постоянные Мурнагана определялись из опытов по распространению волн.

К примеру, в [1] упругие постоянные  $a = C, b = B, c = A$  определялись из опытов на распространение акустических продольной и поперечных плоских поляризованных волн в материалах с начальными напряжениями. Полученные формулы (далее показана одна, обозначения автора книги [1, том 2, с.55, ф. (1.206)]) имеют вид

$$b = (2\lambda\mu/\sigma_{33}^0) \left\{ \left[ \frac{(C_{Sx_3})^2 - (C_S^0)^2}{(C_S^0)^2} \right] + \left[ \frac{(C_{Sx_2})^2 - (C_S^0)^2}{(C_S^0)^2} \right] ((\lambda + 2\mu)/2\lambda) \right\}.$$

Второй пример взят из книги [17], где показано, как определяются постоянные Мурнагана  $l = B + C, m = (1/2)(A + B), n = A$  из опытов с акустическими волнами. Полученные формулы (далее показана одна, обозначения автора книги [17, с. 530, ф. (24)], АЕС<sub>ik</sub> имеют смысл акустоэлектрических констант) достаточно просты

$$m = [2(\lambda + \mu)/(3\lambda + 2\mu)] [\lambda \text{АЕС}_{32} + 2(\lambda + \mu) \text{АЕС}_{31}] - 2\mu.$$

Следует заметить, что в нелинейных балансовых и определяющих уравнениях для модели Мурнагана можно использовать два тензора напряжений [1, 2, 6, 16]:

несимметричный тензор напряжений Пиолы – Кирхгоффа  $t_{ik}(x_k, t)$ , который образует упорядоченную пару с  $u_{i,k}$  и включает напряжения в момент времени  $t$  на площадках элементарного объема в деформированном состоянии, которые измеряются на единицу площади в недеформированном состоянии;

симметричный тензор напряжений Лагранжа  $\sigma_{ik}(x_n, t)$ , который образует упорядоченную пару с  $\varepsilon_{ik}$  и включает напряжения в момент времени  $t$  на площадках элементарного объема в деформированном состоянии, которые измеряются на единицу площади в деформированном состоянии.

### 3. Модель Мурнагана нелинейного упругого деформирования материалов. Возможность создания универсальных состояний.

**3.1. Универсальное состояние простого сдвига.** Обычно простой сдвиг описывают на примере квадратной в поперечном сечении достаточно длинной балки, в которой на некотором удалении от концов создается однородная деформация. Для этого нижняя сторона балки жестко закрепляется, а к верхней стороне прилагается поверхностная касательная постоянная нагрузка  $T$ . Если выбрать систему координат таким образом, что координатная ось  $Ox_1$  направлена вдоль оси балки и координатная ось  $Ox_2$  вдоль нижней стороны, то деформирование балки можно описать с помощью

только одной ненулевой компоненты градиентов деформации  $u_{1,2} = (\partial u_1 / \partial x_2) \neq 0$ . Геометрически это представляется как деформация элементарного прямоугольника  $ABCD$  с параллельными осям координат сторонами  $dx_1, dx_2$ , в параллелограмм  $AB'C'D'$ , получаемый продольным смещением стороны  $BC$  прямоугольника. Тогда компоненту  $u_{1,2}$  и угол сдвига  $\angle BAB' = \gamma$  можно связать таким образом:

$$u_{1,2} = \tan \gamma = \tau > 0. \quad (6)$$

Если считать угол сдвига малым и полагать поэтому  $\gamma \approx \tan \gamma = \tau$ , что, как известно, справедливо в диапазоне от нуля до  $\tau^* = 5^\circ 9' = 0,09$  (в градусах и радианах), то оказывается возможным оценить, при каких значениях  $\tau$  начинает сказываться нелинейность модели Мурнагана. Для этого следует построить соотношение «напряжение – деформация».

Тензор деформации Коши – Грина характеризуется при простом сдвиге тремя ненулевыми постоянными компонентами

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= (1/2)(u_{2,2} + u_{2,2} + u_{k,2}u_{k,2}) = (1/2)\tau^2; \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= (1/2)(u_{1,2} + u_{2,1} + u_{k,1}u_{k,2}) = (1/2)\tau, \end{aligned} \quad (7)$$

т.е. в материале реализуется однородное напряженно-деформированное состояние. Для вычисления напряжений необходимо записать потенциал Мурнагана (4) с учетом полученных формул (7)

$$\begin{aligned} W(\varepsilon_{ik}) &= (1/2)\lambda(\varepsilon_{22})^2 + \mu[(\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{12})^2 + (\varepsilon_{21})^2] + \\ &+ (1/3)A[\varepsilon_{22}(\varepsilon_{12}\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}\varepsilon_{21} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{21}) + (\varepsilon_{22})^3] + \\ &+ B[(\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{12})^2 + (\varepsilon_{21})^2]\varepsilon_{22} + (1/3)C(\varepsilon_{22})^3; \end{aligned} \quad (8)$$

$$W(\tau) = (1/2)\mu\tau^2 + (1/8)[(\lambda + 2\mu) + A + B]\tau^4 + (1/24)[A + 3B + C]\tau^6. \quad (9)$$

Положительность потенциала как работы внутренних сил (или потенциальной энергии деформирования) при ненулевом  $\tau$  следует из его определения. Тогда имеем

$$\mu + (1/4)\tau^2 \{ [(\lambda + 2\mu) + A + B] + (1/3)[A + 3B + C]\tau^2 \} > 0. \quad (10)$$

Заметим, что для большинства конструкционных материалов определенные экспериментально постоянные  $\lambda, \mu$  положительны и постоянные Мурнагана  $A, B, C$  отрицательны. Однако встречаются материалы, для которых какая-то постоянная Мурнагана положительна. Формула (10) дает критерий для оценки правильности определения той или иной постоянной.

Тензор напряжений Лагранжа определяется по формуле  $\sigma_{ik}(x_n, t) = \partial W / \partial \varepsilon_{ik}$  и имеет две ненулевые и постоянные компоненты

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + A((\varepsilon_{22})^2 + (1/3)(\varepsilon_{12}\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}\varepsilon_{21} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{21})) + \\ &+ B(3(\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{12})^2 + (\varepsilon_{21})^2) + C(\varepsilon_{22})^2; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sigma_{22} = (1/4)(2(\lambda + 2\mu) + (A + 2B))\tau^2 + (1/4)(A + 3B + C)\tau^4; \quad (12)$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} + ((1/3)A(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) + 2B\varepsilon_{12})\varepsilon_{22}; \quad (13)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu\tau + (1/6)(A + 3B)\tau^3. \quad (14)$$

Как следует из (11) – (14), сдвиговые напряжения содержат линейную и нелинейную составляющие и описывают простой сдвиг, тогда как нормальное напряжение описывает изменение объема при деформировании, содержит лишь нелинейные составляющие и свидетельствует об изменении объема при деформировании и о нарушении состояния простого сдвига при нелинейном описании деформирования.

Тензор напряжений Кирхгофа определяется по формуле  $t_{ik}(x_k, t) = \partial W / \partial u_{k,i}$  и имеет одну ненулевую и постоянную компоненту

$$t_{21} = \mu\tau + (1/2)((\lambda + 2\mu) + A + B)\tau^3 + (1/4)(A + 3B + C)\tau^5. \quad (15)$$

Как следует из формулы (15), сдвиговое напряжение  $t_{21}$  подобно напряжению  $\sigma_{21}$  содержит линейную и нелинейную составляющие и описывает простой сдвиг как однородное напряженное состояние. Отсутствие напряжений растяжения-сжатия свидетельствует, что использование тензора Кирхгофа не дает возможности описать нелинейное явление изменения объема при реализации простого сдвига.

Заметим, что кроме понятия простого сдвига в механике существует также понятие чистого сдвига и их следует различать.

**3.2. Универсальное состояние объемного сжатия-растяжения.** Это состояние определяется заданием компонентом градиентов деформации

$$u_{1,1} = u_{2,2} = u_{3,3} = \varepsilon > 0; \quad u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = 3\varepsilon = e; \quad u_{k,m} = (\partial u_k / \partial x_m) = 0 \quad (r \neq m). \quad (16)$$

В этом случае компоненты нелинейного тензора деформаций Коши – Грина равны

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon + (1/2)\varepsilon^2; \quad \varepsilon_{ik} = 0 \quad (i \neq k) \quad (17)$$

и соответствующие алгебраические инварианты записываются в виде

$$I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = e; \quad I_2 = (\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2; \quad I_3 = (\varepsilon_{11})^3 + (\varepsilon_{22})^3 + (\varepsilon_{33})^3. \quad (18)$$

Используем в анализе потенциала (4) полученные формулы для инвариантов и представим потенциал в виде

$$\begin{aligned} W(\varepsilon_{ii}) = & (1/2)\lambda((\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2 + 2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 2\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + 2\varepsilon_{33}\varepsilon_{22}) + \\ & + \mu((\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2) + (1/3)A((\varepsilon_{11})^3 + (\varepsilon_{22})^3 + (\varepsilon_{33})^3) + B((\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2) \times \\ & \times (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + (1/3)C[(\varepsilon_{11})^3 + (\varepsilon_{22})^3 + (\varepsilon_{33})^3 + 3\varepsilon_{11}((\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2) + \\ & + 3\varepsilon_{22}((\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{33})^2) + 3\varepsilon_{33}((\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{11})^2)]; \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(\varepsilon) = & (3/2)(3\lambda + 2\mu)\varepsilon^2 + ((9/2)\lambda + 3\mu + A + 9B + 9C)\varepsilon^3 + \\ & + (3/2)(4(3\lambda + 2\mu) + (A + 9B + 9C))\varepsilon^4 + \\ & + (3/4)(A + 9B + 9C)\varepsilon^5 + (1/8)(A + 9B + 9C)\varepsilon^6. \end{aligned}$$

Компоненты тензора напряжений вычисляются по формуле (ниже показан один, два других получаются циклической заменой индексов)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \partial W / \partial \varepsilon_{11} = & \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11} + A(\varepsilon_{11})^2 + B\left\{\left((\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2\right) + \right. \\ & \left. + 2\varepsilon_{11}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\right\} + C\left[\left(\varepsilon_{11}\right)^2 + \left((\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2\right) + 2\varepsilon_{22}\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{33}\varepsilon_{11}\right]; \end{aligned}$$

$$\sigma_{11} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon + \left((3/2)(3\lambda + 2\mu) + (A + 9B + 7C)\right)\varepsilon^2 + (A + 9B + 7C)\left(\varepsilon^3 + (1/4)\varepsilon^4\right). \quad (20)$$

Как следует из (20), напряжения содержат линейную и нелинейную составляющие и описывают универсальную деформацию всестороннего сжатия-растяжения в линейном и нелинейном приближениях.

Взаимосвязь между первым инвариантом тензора напряжений  $\sigma_{kk}$  и параметром всестороннего растяжения  $\varepsilon$  имеет вид

$$\sigma_{kk} = 3(3\lambda + 2\mu)\varepsilon + 3\left[(3/2)(3\lambda + 2\mu) + (A + 9B + 7C)\right]\varepsilon^2 + 3(A + 9B + 7C)\left(\varepsilon^3 + (1/4)\varepsilon^4\right). \quad (21)$$

При всестороннем растяжении естественно предположить, что параметр  $\varepsilon$  положителен и первый инвариант  $\sigma_{kk}$  тоже положителен. Тогда из (21) следует

$$3(3\lambda + 2\mu) + 3\left[(3/2)(3\lambda + 2\mu) + (A + 9B + 7C)\right]\varepsilon + 3(A + 9B + 7C)\left(\varepsilon^2 + (1/4)\varepsilon^3\right) > 0. \quad (22)$$

Формула (22) дает критерии для оценки допустимости уровня параметра  $\varepsilon$  (малый, умеренный, большой) и правильности определения той или иной постоянной. Также полагаем уместным еще раз заметить, что для большинства конструкционных материалов определенные экспериментально постоянные  $\lambda, \mu$  положительны и постоянные Мурнагана  $A, B, C$  отрицательны. Однако встречаются материалы, для которых какая-то постоянная Мурнагана положительна (к примеру, бронза, латунь, молибден, стекло-пирекс [1, 2, 17]).

**3.3. Однородное состояние растяжения стержня.** В этом случае можно рассматривать стержень в виде прямого круглого длинного цилиндра с осью в направлении оси координат  $Ox_1$  и предположить, что внешняя поверхность стержня свободна от напряжений. Если к торцам стержня прилагать постоянную поверхностную нагрузку (т.е. растягивать в осевом направлении), то за исключением области, прилегающей к торцам, в стержне формируется однородное напряженно-деформированное состояние. Оно характеризуется лишь одним ненулевым компонентом тензора напряжений  $\sigma_{11}$  и тремя ненулевыми компонентами тензора деформаций  $\varepsilon_{kk}$ . В этом случае, определяющие соотношения, соответствующие модели Мурнагана, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11} + A(\varepsilon_{11})^2 + B\left[\left((\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2\right) + \right. \\ & \left. + 2\varepsilon_{11}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\right] + C\left[\left(\varepsilon_{11}\right)^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2 + 2\varepsilon_{22}\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{33}\varepsilon_{11}\right]; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22} + A(\varepsilon_{22})^2 + B\left[\left((\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2\right) + \right. \\ & \left. + 2\varepsilon_{22}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\right] + C\left[\left(\varepsilon_{11}\right)^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2 + 2\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + 2\varepsilon_{22}\varepsilon_{11}\right]; \end{aligned} \quad (24)$$

$$0 = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33} + A(\varepsilon_{33})^2 + B\left[\left(\varepsilon_{11}\right)^2 + \left(\varepsilon_{22}\right)^2 + \left(\varepsilon_{33}\right)^2\right] + 2\varepsilon_{33}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + C\left[\left(\varepsilon_{11}\right)^2 + \left(\varepsilon_{22}\right)^2 + \left(\varepsilon_{33}\right)^2 + 2\varepsilon_{22}\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}\right]. \quad (25)$$

Классическая линейная теория упругости использует ряд преобразований линейных вариантов формул (23) – (25) для получения соотношений, удобных при анализе эксперимента на растяжение стержня. Применение этих преобразований к (23) – (25) тоже полезно. К примеру, вычитание (25) из (24) дает

$$0 = 2\mu(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) + A\left[\left(\varepsilon_{22}\right)^2 - \left(\varepsilon_{33}\right)^2\right] + 2B(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),$$

откуда в силу симметрии задачи (круглый стержень) следует  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$ .

Сложение (23) – (25) имеет следствием формулу

$$\sigma_{11} = (3\lambda + 2\mu)e + (A + 5B + 3C)e^2 - 2(A + 3B + C)\alpha, \quad (26)$$

где введены обозначения:  $e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ ,  $\alpha = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33}$ .

Линейный вариант формулы (26) является основной при введении новых, альтернативных к  $\lambda, \mu$ , упругих постоянных: модуля Юнга  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ . Также с помощью (26) можно получить дополнительные ограничения на все пять упругих постоянных модели Мурнагана.

#### 4. Модель Мурнагана нелинейного упругого деформирования материалов. Анализ постоянных.

Как следует из представления (4), модель содержит пять упругих постоянных и поэтому иногда ее называют пятиконстантной моделью. Однако в задачах динамики она использует еще одну физическую постоянную – плотность. Приведем далее соображения в пользу того, что плотность не всегда является постоянной материала и постоянной модели материала. Также далее будут комментироваться упругие постоянные модели Мурнагана и простейшие способы их определения.

**4.1. Плотность  $\rho$ .** Стандартное определение плотности материала такое: плотность  $\rho$  есть количество массы в единице объема материала. Для определения значения  $\rho$  следует выбрать удобный кусок материала, измерить его вес и объем и дальше поделить первое значение на второе. Однако при деформировании материала его плотность может изменяться. В механике материалов есть два пути учета изменения плотности. Один связан с построением балансовых уравнений, а именно с уравнением баланса массы. Второй возникает, если деформации не малые и форма тела до деформации существенно отличается от формы тела после деформации.

Баланс массы формулируется в виде уравнения, в котором  $\rho(x_k, t)$  является плотностью массы,  $A(x_k, t)$  обозначает источники и стоки массы,  $S(\alpha(x_k, t, \vec{n}))$  обозначает поток массы через границу тела. Классическое уравнение в случае отсутствия двух последних механизмов изменения массы имеет вид  $(\partial\rho/\partial t) + (\rho v_m)_m = 0$ , где  $v_m(x_k, t) = \dot{x}_m(x_k, t)$  – компоненты вектора скорости перемещения.

Если предположить, что деформации конечные и три функции – плотность  $\rho(x_k, t)$  в момент времени  $t$ , плотность  $\rho_0(x_k, t=0)$  в начальный момент времени, якобиан преобразования  $J(x, t)$  – являются достаточно гладкими, то справедливо ра-



венство  $\rho_o = \rho J$ . Именно это равенство и свидетельствует, что в однородном упругом материале при умеренных и больших деформациях плотность изменяется и не является постоянной материала. В той же мере, однако, она и не является постоянной модели.

Относительность понимания плотности как графы в паспорте материала выявляется при изучении композитных материалов. Один и тот же реальный композитный материал может изучаться в рамках разных структурных теорий, которые настолько разные, что не имеют общих физических постоянных. Примером могут служить теория приведенных упругих постоянных и теория двухкомпонентной упругой смеси. Плотность в первой теории соответствует стандартному определению плотности для композитного материала в целом, тогда как теория упругой смеси включает две плотности, которые вычисляются по формулам  $\rho_{11} = c_m \rho_m$  и  $\rho_{22} = c_a \rho_a$  через плотности и объемные концентрации материалов матрицы и армирующих элементов.

**4.2. Модуль Ляме (модуль сдвига)  $\mu$ .** Как известно, в линейной теории упругости упругая постоянная Ляме  $\mu$  анализируется с помощью универсальной деформации простого сдвига и даже название «модуль сдвига» она получает из этого анализа.

Рассмотрим определяющие соотношения (11) – (15) и выберем два из них

$$\sigma_{21} = \mu\tau + (1/6)(A + 3B)\tau^3, \quad t_{21} = \mu\tau + (1/2)((\lambda + 2\mu) + A + B)\tau^3 + (1/4)(A + 3B + C)\tau^5. \quad (27)$$

Обе формулы описывают состояние простого сдвига и свидетельствуют, что при нелинейном подходе простой сдвиг характеризуется несколькими упругими постоянными: в случае определяющих соотношений (11) – (14) (тензор Лагранжа – угол сдвига) постоянной  $\mu$  и группой постоянных  $(1/6)(A + 3B)$ ; в случае определяющих соотношений (15), (тензор Кирхгоффа – угол сдвига) постоянной  $\mu$  и отличными от показанной выше двумя группами постоянных  $(1/2)((\lambda + 2\mu) + A + B)$ ,  $(1/4)(A + 3B + C)$ .

Напомним, что универсальная деформация простого сдвига используется в линейной теории упругости для экспериментального определения модуля сдвига. Она же может быть использована и для нелинейной модели Мурнагана, причем в этом случае следует независимо аппроксимировать формулами (27) две части экспериментально полученной кривой или дискретной системы точек в плоскости «напряжение – угол сдвига».

*Первая часть* эксперимента (*эксперимент 1*) должна использовать начальную стадию деформирования, т.е., случай настолько малых деформаций, когда справедлива линейная модель деформирования. Тогда определяющие соотношения (11) – (15) линейны и найденная в этом эксперименте постоянная является классическим модулем Ляме (модулем сдвига).

*Вторая часть* эксперимента (*эксперимент 2*) должна использовать следующую стадию деформирования, т.е., случай малых деформаций, которые можно считать умеренными и которые не превышают значения угла сдвига, принятые при замене тангенса угла сдвига самим углом, т.е.  $\tau = 0,09$ . При этом модель Мурнагана уже описывает нелинейность деформирования и полученную экспериментально кривую «напряжение – угол сдвига» следует аппроксимировать соотношениями (14) или (15). Поскольку из предыдущего опыта постоянная  $\mu$  уже определена, то в итоге будет получено условие (*условие 1*) на присутствующие в (12), (14) группы постоянных. К примеру, при аппроксимации кривой соотношением  $\sigma_{21} = \mu\tau + (1/6)(A + 3B)\tau^3$  можно получить алгебраическое уравнение  $h = \text{const} = ((1/6)A + B)$ .

В работе автора [12] показано, что для нелинейной модели Мурнагана предельное значение малой деформации, при которой деформирование происходит еще за линейным законом, составляет  $\tau = 0,01$ . Следовательно, умеренные деформации происходят в достаточно большом диапазоне  $\tau \in [0,01; 0,09]$ .

Итак, опыт по созданию состояния простого сдвига и построения зависимости «напряжение – угол сдвига» позволяет определить постоянную Ляме  $\mu$  и дополнительные условия на часть упругих постоянных.

При этом необходимо отметить, что при аппроксимации параболой (27) полученных экспериментально кривых  $\sigma_{21} = f(\tau)$  для случая умеренных углов сдвига следовало бы считать величину  $\mu$  также неизвестной.

Кроме того, формулы (12), (14) могут быть использованы для объяснения известного эффекта Пойнтинга.

*Историческая справка.* Впервые на эффект, который сейчас называют эффектом Пойнтинга, обратил внимание Кулон в 1784 г. Спустя 70 лет явление было экспериментально исследовано и правильно прокомментировано Вертгеймом в 1857 г. Вертгейм исследовал кручение цилиндров и установил, что изменение объема цилиндра пропорционально квадрату угла закручивания при малых деформациях, оценив этот факт как проявление нелинейности. Еще через 50 лет Пойнтинг в публикациях 1909 и 1912 г.г. описал эксперименты об изменении объема полых труб при кручении. Уменьшение диаметра трубы оказалось пропорциональным квадрату угла закручивания. Только в пятидесятых годах Ривлин и Саундерс [2, 16] объяснили эффект Пойнтинга, предложив в публикации 1951 г. нелинейную модель конечных деформаций несжимаемых упругих материалов (модель Ривлина – Саундерса)

$$2W(I_1, I_2) = h_2(I_1 - 3) + \psi(I_2 - 3),$$

где  $h_2$  – постоянная и  $\psi$  – функция.

Итак, в нелинейном случае при простом сдвиге в теле возникает сдвиговое напряжение  $\sigma_{12}$  (14), которое при малом угле сдвига зависит линейно от этого угла и при умеренных углах дополнительно зависит от куба угла. Следовательно, согласно [33], модель Мурнагана описывает эффект Пойнтинга.

Также формула (12)

$$\sigma_{22} = -(1/4)(2(\lambda + 2\mu) - (A + 2B))\tau^2 + (1/4)(A + 3B + C)\tau^4 \quad (28)$$

свидетельствует, что в нелинейном случае при простом сдвиге в теле возникает постоянное нормальное напряжение, нелинейно зависящее от угла сдвига, что в свое время предвидел Кельвин [2]. Таким образом, модель Мурнагана описывает эффект Кельвина и формула (12) выражает этот эффект.

В заключение рассмотрим два конструкционных материала, для которых уже определен ранее [17] весь набор упругих постоянных в рамках нелинейной модели Мурнагана:

сталь Necla ATN и алюминий Al B535 с постоянными (в паскалях):

$$\text{Necla ATN: } \lambda = 8,7 \cdot 10^{10}; \quad \mu = 7,2 \cdot 10^{10}; \quad A = -5,35 \cdot 10^{11};$$

$$B = -7,62 \cdot 10^{11}; \quad C = -4,0 \cdot 10^{11};$$

$$\text{Al: B535 } \lambda = 5,8 \cdot 10^{10}; \quad \mu = 2,6 \cdot 10^{10}; \quad A = -2,23 \cdot 10^{11};$$

$$B = -2,37 \cdot 10^{11}; \quad C = -2,76 \cdot 10^{11}.$$

На рис. 1 (слева для стали, справа для алюминия; прямые линии соответствуют линейному приближению) показаны две теоретические кривые, вычисленные для указанных материалов по формуле (14).

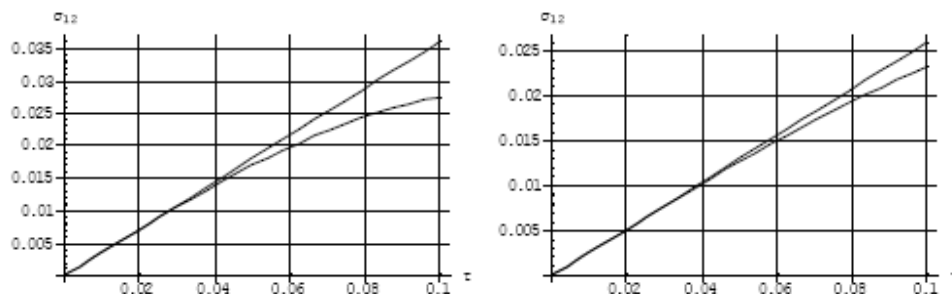


Рис. 1

Итак, нелинейность модели Мурнагана влияет на напряжение сдвига, уменьшая его достаточно ощутимо при увеличении угла сдвига. При этом, модуль сдвига  $\mu$  следует понимать только как коэффициент пропорциональности прямой линии «напряжение – угол сдвига», соответствующей очень малым углам сдвига. Как видно из рис. 1, для разных материалов линейная аппроксимация верна при разных значениях угла сдвига.

**4.3. Модуль объемного расширения  $k$ .** Обратимся к формуле (21), выражающей зависимость между первым инвариантом тензора напряжений  $\sigma_{kk}$  и дилатацией  $e$

$$\sigma_{kk} = 3(\lambda + (2/3)\mu)e - \left[ (3/2)(\lambda + (2/3)\mu) - (1/9)(A + 9B + 7C) \right] e^2 - (A + 9B + 7C)(e^3 - (3/4)e^4). \quad (29)$$

Напомним, что в линейной теории упругости универсальная деформация всестороннего растяжения-сжатия используется для экспериментального определения модуля объемного растяжения-сжатия. Как и в случае универсальной деформации простого сдвига, в данном случае формула (21) может быть использована и для нелинейной модели Мурнагана, причем здесь тоже можно анализировать эксперимент в два шага.

*Первый шаг (эксперимент 3)* должен соответствовать случаю настолько малых деформаций, когда справедлива линейная модель деформирования. Тогда определяющее соотношение (21) линейно  $\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)e = 3(\lambda + (2/3)\mu)e$  и определенная в эксперименте постоянная  $k = \lambda + (2/3)\mu$  является классическим модулем объемного сжатия.

*Второй шаг (эксперимент 4)* должен соответствовать случаю малых деформаций, которые можно считать умеренными. При этом модель Мурнагана уже описывает нелинейность деформирования и полученную экспериментально кривую «гидростатическое напряжение – дилатация» следует аппроксимировать соотношением (21). Поскольку из предыдущего опыта постоянная  $k$  уже определена, то в итоге будет получено еще одно условие (*условие 2*) на присутствующие в (21) группы постоянных.

Итак, эксперимент по созданию универсального состояния всестороннего растяжения-сжатия и построения зависимости «гидростатическое напряжение – дилатация» позволяет определить постоянную всестороннего сжатия  $k$  и наложить дополнительное условие на все пять упругих постоянных.

На самом деле, при аппроксимации параболой (если для умеренной дилатации  $e$  можно пренебречь  $e^3, e^4$ )

$$\sigma_{kk} = 3(\lambda + (2/3)\mu)e - [(3/2)(\lambda + (2/3)\mu) - (1/9)(A + 9B + 7C)]e^2, \quad (30)$$

полученных экспериментально кривых  $\sigma_{kk} = f(e)$  для случая умеренной дилатации следует считать величину  $k$  также неизвестной. Для примера, на рис. 2 показаны две кривые (как и в рис. 1, слева для стали, справа для алюминия; прямые линии соответствуют линейному приближению), полученные на основании формулы (30) для стали Necla ATN и алюминия Al B535.

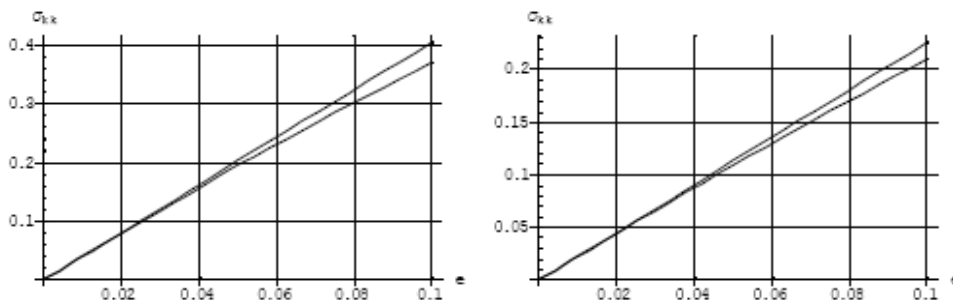


Рис. 2

Итак, нелинейность влияет на гидростатическое напряжение  $\sigma_{kk}$ , уменьшая его достаточно ощутимо при увеличении дилатации  $e$ . Понятие модуля объемного сжатия  $k$  остается приемлемым в модели Мурнагана лишь для очень малых дилатаций, причем разные материалы допускают линейную аппроксимацию при разных значениях дилатации.

**4.4. Модуль Ляме  $\lambda$ .** Прямым экспериментом для определения упругого модуля  $\lambda$  как в линейной, так и в нелинейной теории упругости можно считать эксперимент на всестороннее сжатие, поскольку в нем определяется величина  $(3\lambda + 2\mu)$ . Поэтому в линейной теории упругости при известном модуле сдвига  $\mu$  модуль  $\lambda$  просто пересчитывается по значению  $(3\lambda + 2\mu)$  из эксперимента. При аппроксимации экспериментальных кривых определенное для малых значений дилатации значение модуля  $\lambda$  может несколько отличаться от значения модуля, определенного при умеренных дилатациях. Эти рассуждения применимы и для модели Мурнагана.

**4.5. Модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ .** В линейной теории упругости модуль Юнга и коэффициент Пуассона вводятся с помощью эксперимента (физического или умозрительного) на растяжение цилиндрического образца и даже название «модуль Юнга» и «коэффициент Пуассона» получают из этого анализа.

В случае нелинейной модели Мурнагана анализ эксперимента усложняется.

Сначала рассмотрим линейный случай. Тогда в формулах (23) и (26) можно пренебречь квадратами деформаций и  $\sigma_{11} = (3\lambda + 2\mu)e$ ,  $\sigma_{11} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{11}$ , откуда следует

$$\sigma_{11} = [\mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)]\varepsilon_{11}. \quad (31)$$

Величину  $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$  называют модулем Юнга.

Коэффициент Пуассона вводится как отношение поперечной деформации к продольной, используя линейный вариант формулы (24) и формулу (31)

$$0 = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{22} \rightarrow \lambda[\mu/(\lambda + \mu)]\varepsilon_{11} + 2\mu\varepsilon_{22} = 0 \rightarrow (\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11}) = -[\lambda/2(\lambda + \mu)]. \quad (32)$$

Величину  $\nu = [\lambda/2(\lambda + \mu)]$  называют коэффициентом Пуассона.

Такая же процедура может быть использована и для нелинейной модели Мурнагана. В этом случае следует независимо аппроксимировать формулами (23) – (27) две части экспериментально полученной кривой в плоскости « $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$ » и отношения экспериментально полученного значения поперечной деформации к заданной в эксперименте продольной.

В первом случае (касательно модуля Юнга) для соотношения «напряжение  $\sigma_{11}$  – продольная и поперечная деформации» из формул (23) – (27) можно получить формулу

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = E\varepsilon_{11} + (E/2\mu) \{ [2\lambda(A+3B+C)/(3\lambda+2\mu)] (\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33}) + A(\varepsilon_{11})^2 + \\ + B [ ((\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2) + 2\varepsilon_{11}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) ] + \\ + C ((\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2 + 2\varepsilon_{22}\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{33}\varepsilon_{11}) \}, \end{aligned} \quad (33)$$

из которой видно, что в линейном приближении формула описывает классический результат (31), тогда как нелинейное приближение показывает квадратичную зависимость от продольной и поперечной деформаций.

Во втором случае отношение поперечной деформации к продольной можно получить из формулы (24)

$$\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda(\lambda + \mu) + (2\lambda + \mu)(B+C)\varepsilon_{11} + (B+C)^2(\varepsilon_{11})^2}{2[(\lambda + \mu)^2 + 2(\lambda + \mu)(B+C)\varepsilon_{11} + (B+C)^2(\varepsilon_{11})^2]}. \quad (34)$$

Формула (34) свидетельствует, что когда можно пренебречь вторыми и третьими слагаемыми в числителе и знаменателе по сравнению с первыми слагаемыми с точностью до одного процента, что вполне возможно при умеренно малых  $\varepsilon_{11} \leq 0,1$  (поскольку для большинства материалов значения постоянных  $A, B, C$  на порядок больше значений  $\lambda, \mu$ ), то классическая линейная аппроксимация (32) справедлива. Однако в модели Мурнагана при увеличении продольной деформации утоньшение поперечного сечения уже зависит сложным нелинейным образом от этой деформации и понятие постоянного коэффициента Пуассона теряет смысл.

Формула (33) может быть использована для постановки эксперимента в два шага, как это было показано выше для простого сдвига и объемного сжатия.

*Первый шаг (эксперимент 5)* должен соответствовать случаю настолько малых деформаций, когда справедлива линейная модель деформирования и из эксперимента определяются значения напряжения по известным значениям продольной деформации. Тогда справедлива формула (31) и определенная в эксперименте постоянная  $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$  является классическим модулем Юнга, пригодным для использования в модели Мурнагана при малых деформациях.

*Второй шаг (эксперимент 6)* должен соответствовать случаю малых деформаций, которые можно считать умеренными. При этом модель Мурнагана уже описывает нелинейность деформирования и кривую «напряжение  $\sigma_{11}$  – продольная и поперечная деформации  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ », полученную экспериментально, следует аппроксимировать теоретическим соотношением (33). В этом эксперименте при заданной деформации  $\varepsilon_{11}$  следует определять не только напряжение  $\sigma_{11}$ , но и поперечную деформацию  $\varepsilon_{22}$ . Поскольку из предыдущего опыта постоянная  $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$  уже определе-

на, то в итоге будет получено еще одно условие (*условие 3*) на присутствующие в (33) четыре группы постоянных.

Формула (34) тоже может быть использована для постановки эксперимента в два шага.

*Первый шаг (эксперимент 7)* соответствует случаю таких малых деформаций, когда справедлива линейная модель деформирования и из эксперимента определяются значения поперечной деформации по известным значениям продольной деформации. Тогда справедлива формула (32) и определенное в эксперименте соотношение  $\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11}$  является классическим коэффициентом Пуассона, пригодным для использования в модели Мурнагана при малых деформациях.

*Второй шаг (эксперимент 8)* должен соответствовать случаю умеренных деформаций. Модель Мурнагана уже описывает нелинейность деформирования и соотношение “поперечная деформация – продольная деформация”, полученное экспериментально, следует аппроксимировать теоретическим соотношением (34). В итоге эксперимент даст еще одно условие (*условие 4*) на присутствующие в (33) четыре постоянные.

В заключение отметим, что эксперименты 1,3 могут быть использованы для определения постоянных Ляме, тогда как эксперименты 5,7 – для проверки правильности измерений. Отметим, что показанные простые способы определения постоянных модели Мурнагана могут быть использованы при изучении нелинейных эффектов в новых материалах (в том числе, метаматериалах) [7 – 9, 11, 12, 14, 18].

Ниже показаны зависимости (слева для стали и справа для алюминия) напряжения  $\sigma_{11}$  от деформаций  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  (рис. 3, трехмерные изображения,) и соотношения  $\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11}$  от деформации  $\varepsilon_{11}$  (рис. 4, двумерные изображения, прямая линия соответствует линейному приближению) для материалов, использованных при построении рис.1 и 2.

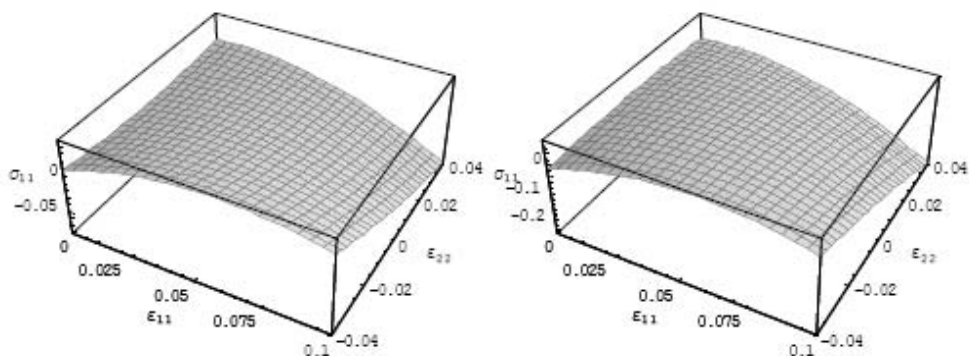


Рис. 3

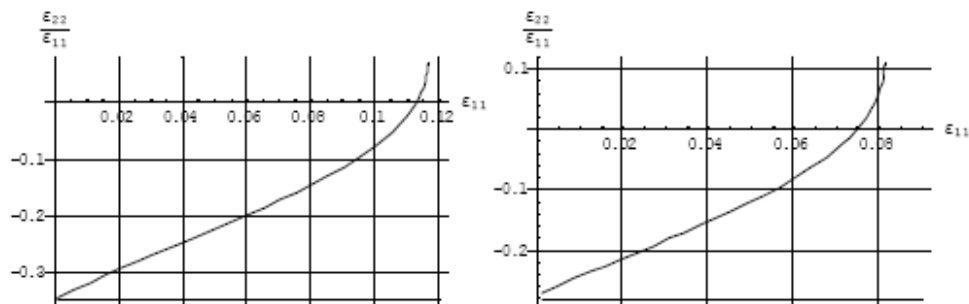


Рис. 4

Как следует из рис. 3, напряжения  $\sigma_{11}$  сначала сильно растут при возрастании продольной деформации (дальнейшее убывание напряжений в сторону отрицательных значений можно прокомментировать как неадекватность формулы (33)) и слабо сначала растут и потом убывают при увеличении поперечной деформации. Рис. 4 показывает, что с увеличением продольной деформации поперечная существенно уменьшается. При этом значение коэффициента Пуассона в линейном приближении справедливо лишь в предельном переходе к нулю значений продольной деформации.

**4.6. Упругие постоянные третьего порядка  $A, B, C$ .** Выпишем полученные выше условия 1 и 2 для определения постоянных  $A, B, C$  :

$$C_1 = ((1/2)A + B), \quad C_2 = [(3/2)(\lambda + (2/3)\mu) - (1/9)(A + 9B + 7C)].$$

Эти два условия позволяют исключить две из трех неизвестных постоянных и оставить неизвестной только постоянную  $A$ . Из первого условия можно определить постоянную  $B$  через постоянную  $A$  и полученную из эксперимента постоянную  $C_1$  :

$$B = C_1 - (1/2)A. \quad (35)$$

Далее из второго условия можно определить постоянную  $C$  через постоянную  $A$  и полученную из эксперимента постоянную  $C_2$  :

$$C = (9/7)[(3/2)(\lambda + (2/3)\mu) - C_2] - (9/7)C_1 + (1/2)A. \quad (36)$$

Постоянная  $C$  может быть определена из аппроксимации формулами (33), (34) экспериментов 7 и 8. Сперва из эксперимента 8 для каждого заданного  $\varepsilon_{11}$  следует определить соответствующее значение  $\varepsilon_{22}$ . Далее необходимо аппроксимировать формулой (33), в которой уже учтены соотношения (35) и (36), полученную экспериментально поверхность  $\sigma_{11} = f(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22})$ . В формуле (33) неизвестным параметром будет упругая постоянная  $A$ .

## 5. Заключение.

В этой работе описаны простейшие статические классические опыты, основанные на понятии универсальной упругой деформации (простой сдвиг, всестороннее растяжение-сжатие, одномерное растяжение-сжатие).

Такие эксперименты позволяют прямое вычисление упругих постоянных и достаточно хорошо отработаны технологически. Применительно к пятиконстантной модели Мурнагана нелинейного гиперупругого деформирования, получены теоретические формулы, позволяющие аппроксимировать данные из описанных трех типов опытов (фактически, шесть опытов для определения пяти постоянных) Эти формулы дают возможность найти ограничения на упругие постоянные и обнаружить что описывает ранее не приписываемые модели Мурнагана нелинейные эффекты. Например, анализ простого сдвига показывает, что модель Мурнагана описывает классические нелинейные эффекты Пойнтинга и Кельвина.

Анализ одномерного растяжения-сжатия и всестороннего сжатия показывает, что модель Мурнагана описывает подобные нелинейные эффекты и в этих случаях. Для двух классических конструкционных материалов предложены теоретические кривые и поверхности в рамках модели Мурнагана, которые можно использовать как характерные для сравнения данных, полученных из указанных в работе опытов для новых типов материалов (в том числе, метаматериалов, проявляющих нелинейное упругое деформирование).

РЕЗЮМЕ. Описано найпростіші статичні класичні досліди, які основані на понятті універсальної пружної деформації (простий зсув, всесторонній розтяг-стиск, одновимірний розтяг-стиск). Такі експерименти дозволяють пряме обчислення пружних постійних і добре опрацьовані технологічно. Стосовно п'ятиконстантної моделі Мурнагана нелінійного гіперпружного деформування отримано теоретичні формули, за допомогою яких можна апроксимувати дані з описаних трьох типів дослідів (фактично, шість дослідів для визначення п'яти постійних). Ці формули дають можливість знайти обмеження на пружні постійні і показати, що модель Мурнагана описує класичні нелінійні ефекти. Наприклад, аналіз простого зсуву показує, що модель Мурнагана описує класичні нелінійні ефекти Пойнтінга і Кельвіна. Аналіз одновимірного розтягу-стиску та всестороннього стиску показує, що модель Мурнагана описує подібні нелінійні ефекти і в цих випадках. Для двох класичних конструкційних матеріалів запропоновано теоретичні криві і поверхні в рамках моделі Мурнагана, які можна використати як характерні для порівняння з отриманими даними з вказаних у роботі дослідів для нових типів матеріалів (у тому числі, метаматеріалів), що виявляють нелінійне пружне деформування.

1. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т.1. Общие вопросы. Т.2. Закономерности распространения. – К.: Наук. думка, 1986. – 376 с., 536 с.
2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
3. Руцицкий Я.Я. Об ограничениях значений градиентов перемещений для упругих материалов // Прикл. механика – 2016. – **52**, N 2. – С.20 – 35.
4. Руцицкий Я. Я., Цурпал С. I. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Ін-т механіки ім. С.П. Тимошенка, 1998. – 377 с.
5. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
6. Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M. Spatial Problems of the Fracture of Materials Loaded along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N5. – P.489 – 560.
7. Carneiro V.H., Meireles J., Puga H. Auxetic Materials - A Review // Materials Science-Poland. – 2013. – **31**, N4. – P. 561 – 571.
8. Cattani C., Rushchitsky J.J. Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro or Nanostructures. – Singapore-London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007. – 466 p.
9. Dudek K.K., Attard D., Caruana-Gauci R., Wojciechowski K.W., Grima J.N. Unimode metamaterials exhibiting negative linear compressibility and negative thermal expansion // Smart Materials and Structures. – 2016. – **25**, N2. – P.025009.
10. Guz A.N. Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials. Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 231 – 252.
11. Guz A.N. Recognition of the Achievements of the S.P.Timoshenko Institute of Mechanics by the World's Scientific Community // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P.1 – 11.
12. Guz A.N., Rushchitsky J.J. On features of continuum description of nanocomposite material // J.of Research in Nanotechnology. – 2015. – **1**, N 1. – P. 50 – 60.
13. Guz I.A., Rodger A.A., Rushchitsky J.J., Guz A.N. Predicting the properties of micro and nanocomposites: from the microwhiskers to bristled nano-centipedes // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2008. – **365**, N 1860. – P.3233 – 3239.
14. Lim T.C. Auxetic Materials and Structures. – Singapore: Springer, 2015. – 835 p.
15. Murnaghan F.D. Finite Deformation in an Elastic Solid. – New York: John Wiley, 1951,1967. – 140 p.
16. Rushchitsky J.J. Nonlinear Elastic Waves in Materials. Series: Foundations of Engineering Mechanics. – Heidelberg: Springer, 2014. – 454 p.
17. Structural and Residual Stress Analysis. Ed. V.Hauk. – Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1997 (e-variant 2006). – 640 p.
18. Zhu R., Liu X.N., Huang G.L. Study of anomalous wave propagation and reflection in semi-infinite elastic metamaterials // Wave Motion. – 2015. – **55**. – P. 73 – 83.

Поступила 28.12.2015

Утверждена в печать 05.07.2016