UDK 513.83

©2017. **Т. М. Осіпчук**

ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ПРО СИСТЕМИ КУЛЬ, ЯКІ СТВОРЮЮТЬ ТІНЬ В ТОЧЦІ

В даній роботі розглядаються задачі, пов'язані з відшуканням мінімального числа системи куль, які створюють тінь у фіксованій точці багатовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$. Тут вираз "набір куль створює тінь в точці" означає, що кожна пряма, яка проходить через задану точку, перетинає хоча б одну кулю з набору. В роботі встановлено нові властивості системи неперетинних куль з центрами на сфері, що створюють тінь в довільній фіксованій точці внутрішності сфери у просторі $\mathbb{R}^3$. А також, побудовано систему з $n+1$ неперетинних куль з рівними радіусами у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, які створюють тінь у фіксованій точці простору.

MSC: 32F17, 52A30.

Ключові слова: *задача про тінь, система куль, сфера, еліпсоїд обертання, область, багатовимірний дійсний евклідовий простір.*

1. Вступ.

У 1982 році Г. Худайбергановим [1] була поставлена задача про тінь.

Нехай x фіксована точка у багатовимірному дійсному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Скажемо, що кулі $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ в $\mathbb{R}^n$, які не містять x, створюють в цій точці тінь, якщо довільна пряма, що проходить через точку x, перетинає хоча б одну кулю з набору. Тоді задача про тінь може бути сформульована наступним чином: *знайти мінімальне число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль у просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами меншими радіуса сфери, які не містять центр сфери та створюють в ньому тінь.*

Задачу про тінь в такому формулюванні будемо називати класичною. Тут і надалі, під сферою S^{n-1} будемо розуміти множину всіх точок простору $\mathbb{R}^n$, які знаходяться на однаковій відстані від деякої фіксованої точки простору [2].

Класична задача про тінь була розв'язана Г. Худайбергановим при $n = 2$: було показано, що для кола на площині достатньо двох кругів [1]. Там же було зроблено припущення про те, що і для випадку при $n > 2$ мінімальне число таких куль рівне n. Вона також цікава з точки зору опуклого аналізу тим, що є частковим випадком питання про належність точки узагальнено опуклій оболонці сім'ї компактних множин [3].

В [3] Ю. Зелінський довів, що для $n = 3$ трьох куль не достатньо, разом з тим, чотири кулі вже будуть створювати тінь в центрі сфери. Там же встановлено, що для загального випадку у просторі $\mathbb{R}^n$, для довільного $n \geq 3$, мінімальною кількістю є $n+1$ куля. Таким чином, класична задача про тінь повністю розв'язана.

Розглянемо наступні задачі, близькі до класичної задачі про тінь.

Задача 1. *Знайти мінімальне число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль у просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами меншими* *радіуса сфери, які не містять фіксовану точку всередині сфери та створюють в цій точці тінь.*

Задача 2. [4] *Знайти мінімальне число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль з рівними радіусами у просторі $\mathbb{R}^n$, які не містять фіксовану точку простору та створюють в цій точці тінь.*

В даній роботі доводяться дві теореми, які частково розв'язують посталені задачі.

Теорема 1. *Нехай $S^2(r)$ сфера з центром в нулі та радіусрм r у просторі $\mathbb{R}^3$. Позначимо через $n(x)$ найменше число відкритих куль, що не перетинаються, з центрами на сфері $S^2(r)$ і таких, що не містять фіксовану точку $x \in \mathbb{R}^3$ та створюють в цій точці тінь. Тоді $n(x) = 3$, для кожної точки $x \in \mathbb{R}^3$ такої, що $0 \le |x| \le \frac{7}{9}r$.*

Теорема 2. *Нехай $n(x)$ найменше число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль з однаковими радіусами і таких, що не містять фіксовану точку $x \in \mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, та створюють в цій точці тінь. Тоді $n(x) \le n + 1$.*

В [5, 6, 8] зроблено огляд цілої низки результатів, аналогічних до класичної задачі про тінь, та їх узагальнень, отриманих Ю. Б. Зелінським та його учнями.

У наступному розділі зроблено огляд тих результатів, які також частково дають розв'язок задач 1, 2, та тих, які розв'язують деякі інші задачі про тінь. Ці результати будуть сформульовані як леми, оскільки в межах даної роботи вони є допоміжними та використовуються для доведення теорем 1, 2.

2. Допоміжні результати.

Наступний приклад дає один із способів побудови системи з $n+1$ кулі із задачі 1, які створюють тінь в центрі сфери.

Приклад 1. [3] Якщо у сферу вписати правильний n-вимірний симплекс (див. [2]) та розмістити у його вершинах замкнені кулі з радіусами, величини яких дорівнюють половині довжини ребра симплекса, то ця система куль створить тінь в центрі сфери. Однак, кулі будуть попарно дотикатись одна одної, що протирічить умові задачі 1. Нехай a — половина довжини ребра симплекса. Для досить малого $\varepsilon > 0$ розглянемо систему куль, що складається з $n+1$ кулі, величини раіусів яких, відповідно, дорівнюють $a+\varepsilon$, $a-\varepsilon/2$, $a-\varepsilon/2^2$, $a-\varepsilon/2^3$, …, $a-\varepsilon/2^n$. Розмістимо ці кулі так, щоб вони дотикались одна одної, а їх центри утворювали симплекс, який, очевидно, незначно відрізняється від правильного. Тоді через центри цих куль проходить єдина сфера, в центрі якої відкриті кулі з тими ж радіусами створюють тінь. Якщо вихідні замкнені кулі трішки зменшити, то, в силу неперервності, такі кулі також будуть створювати тінь в центрі сфери.

У [7, 8] розглядаються задачі про тінь для куль у просторах $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ з центрами, розташованими на інших поверхнях.

Лемма 1. [7] *Нехай задано видовжений еліпсоїд обертання з великою піввіссю b та малою a і нехай $n(x_0)$ найменше число попарно неперетинних відкритих куль, з центрами на заданому еліпсоїді, які не містять його центр x_0 та створюють в x_0 тінь. Тоді,*

1) $n(x_0) = 3$, якщо $b/a > 2\sqrt{2}$;

2) $n(x_0) > 3$, якщо $b/a \leq 2\sqrt{2}$.

Наступна лема дає розв'язок задачі про тінь для кругів з центрами, розміщеними на довільній замкненій кривій на площині, а також оцінку зверху мінімального числа куль, що створюють тінь в точці, з центрами на довільній замкненій поверхні у просторі $\mathbb{R}^3$.

Лемма 2. [8] *Нехай задано деяку обмежену область $D \subset \mathbb{R}^3$ $\left(D \subset \mathbb{R}^2\right)$ і нехай $n(x)$ найменше число попарно неперетинних відкритих чи замкнених куль, з центрами на ∂D, які не містять фіксовану точку $x \in D$ та створюють в точці x тінь. Тоді $n(x) \leq 4$ $(n(x) = 2)$.*

Для її доведення застосовується наступна лема, яка в даній роботі буде використана також.

Лемма 3. [8] *Нехай задано дві відкриті (замкнені) кулі $\{B_i = B(r_i)\}$, $i = 1, 2$, у просторі $\mathbb{R}^n$, які не перетинаються, з центрами на сфері $S^{n-1}(r)$ та радіусами $r_2 \leq r_1 < r$. Тоді кожна куля, гомотетична кулі B_2 відносно центра сфери, з коефіцієнтом гомотетії k_2, не перетинає кожну кулю, гомотетичну кулі B_1 відносно центра сфери, з коефіцієнтом гомотетії k_1, якщо $k_2 \geq k_1$.*

В [9] розглядається задача про тінь для деякого набору куль з вільно розташованими центрами. Наступна лема дає оцінку знизу для числа неперетинних куль у просторі $\mathbb{R}^n$, які не містять фіксовану точку простору та створюють в ній тінь.

Лемма 4. [9] *Нехай $n(x)$ найменше число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль, які не містять фіксовану точку $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, та створюють в цій точці тінь. Тоді $n(x) = n$.*

В [4] ставиться задача про тінь для набору куль з вільно розташованими центрами, але з рівними радіусами і будується приклад з чотирьох відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль $\{B_i\}$, $i = \overline{1, 4}$, однакового радіуса у просторі $\mathbb{R}^3$, які створюють тінь у фіксованій точці $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \cup_i B_i$. Таким чином встановлена наступна

Лемма 5. [4] *Нехай $n(x)$ найменше число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль з однаковими радіусами і таких, що не містять фіксовану точку $x \in \mathbb{R}^3$ та створюють в цій точці тінь. Тоді $n(x) \leq 4$.*

Неважко показати (в тому числі способом, запропонованим у доведенні теореми 2, що для випадку простору $\mathbb{R}^2$, мінімальною кількістю є дві кулі. В роботі [10] доведено, що ніякі три попарно неперетинні, замкнені (відкриті) кулі з рівними радіусами у просторі $\mathbb{R}^3$ не створюють тінь у фіксованій точці простору по-за кулями. Таким чином, встановлено, що чотири є мінімальною кількістю вказаних куль у просторі $\mathbb{R}^3$.

3. Доведення теорем 1 та 2.

У наступному прикладі запропоновано один із способів побудови системи з трьох відкритих куль, центри яких розташовано на видовженому еліпсоїді обертання з відношенням великої півосі до малої $b/a > 2\sqrt{2}$, і таких, що створюють тінь в центрі еліпсоїда.

Приклад 2. Спочатку розглянемо еліпсоїд з відношенням $b/a = 2\sqrt{2}$ та набір відкритих куль B_i, $i = \overline{1,3}$, заданих наступним чином.

Якщо центр першої кулі B_1 з радіусом, рівним малій півосі a, розмістити в основі цієї півосі, тоді відкритою залишиться тільки площина Σ, дотична до кулі B_1 в центрі еліпсоїда. Розглянемо кулі, дотичні до першої та з центрами на лінії обертання малої півосі. Неважко показати, що, якщо центр такої кулі прямує до точки, діаметрально протилежної до центу кулі B_1, тоді кут, який ця куля закриває для прямих, що проходять через центр еліпсоїда в площині Σ, прямує до свого максимального значення $\pi/2$. Третя куля B_3, дотична до першої B_1 та з центром в основі великої півосі $b = 2\sqrt{2}a$, також закриває кут

$$\varphi = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2+(b)^2}-a}{b}\right) = \pi/2.$$

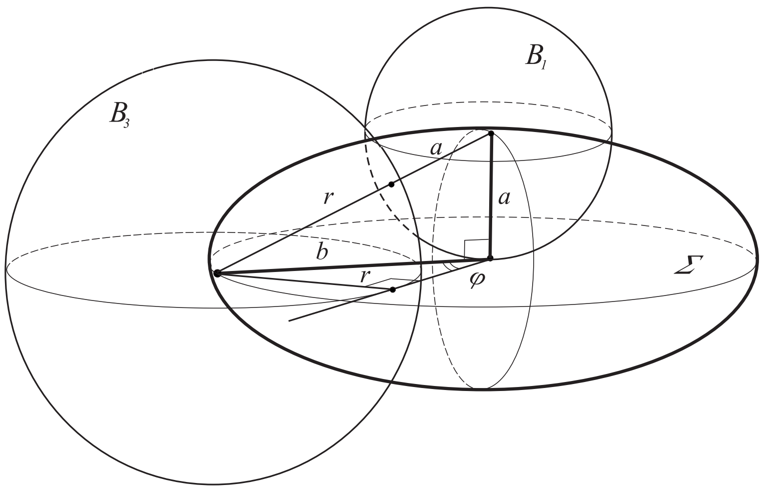

Рис. 1

Далі розглянемо еліпсоїд, центр та мала піввісь якого співпадають з центром та малою піввіссю попереднього еліпсоїда, а велика піввісь $b' > b$. Для таких еліпсоїдів побудуємо систему відкритих куль B'_i, $i = \overline{1,3}$, наступним чином.

$$B'_1 \equiv B_1.$$

Куля B'_3 дотикається до кулі B'_1, а її центр знаходиться в основі великої півосі b'. Тоді B'_3 закриває кут $\varphi(b')$ для прямих, що проходять через центр еліпсоїда в площині Σ, такий що

$$\sin\frac{\varphi(b')}{2} = \frac{\sqrt{a^2+(b')^2}-a}{b'}.$$

Оскільки

$$\frac{d(\sin\varphi(b')/2)}{db'} = \frac{1}{\sqrt{a^2+(b')^2}} - \frac{\sqrt{a^2+(b')^2}-a}{(b')^2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+(b')^2}} - \frac{\left(\sqrt{a^2+(b')^2}-a\right)\left(\sqrt{a^2+(b')^2}+a\right)}{(b')^2\left(\sqrt{a^2+(b')^2}+a\right)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+(b')^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+(b')^2}+a} > 0$$

і $\varphi(b) = \pi/2$, тоді $\varphi(b') > \pi/2$ для $b' > b$.

Нарешті, центр кулі B'_2, яка дотикається до B'_1, розмістимо на лінії обертання малої півосі так, щоб кут, який вона закриває в площині Σ був більший $\pi - \varphi(b')$.

Доведення теореми 1. Зафіксуємо точку x внутрішності сфери $S^2(x_0, r)$ на відстані $h > (7/9)r$ від її центра x_0, рис. 2. Побудуємо видовжений еліпсоїд обертання з центром в точці x, великою піввіссю $b = h + r$, розміщеною на прямій, що проходить через точку x і центр сфери x_0, та малою піввіссю $a = \sqrt{r^2 - h^2}$. Тоді неважко переконатись в тому, що для такого еліпсоїда відношення $b/a > 2\sqrt{2}$. Система із трьох куль, розміщених в точках перетину сфери з еліпсоїдом так, як це зроблено в прикладі 2, є шуканою, оскільки, за лемою 4, не можливо побудувати систему куль, з кількістю менше трьох куль, які створюють тінь в довільній точці сфери. $\square$

Для центра сфери задача про тінь розв'язана в [3]. Для решти точок всередині сфери $n(x) \leq 4$ за лемою 2. Питання про те, чи для таких точок $n(x) = 4$, залишається відкритим.

Доведення теореми 2. Зафіксуємо деяку точку $x \in \mathbb{R}^n$, $2 < n < \infty$, та побудуємо систему з $n+1$ кулі $\{B_i = B(r_i)\}$, $i = 1, \ldots, n+1$, з радіусами r_i, як у прикладі 1, розміщені на сфері з центром в точці x. Нехай, без обмеження загальності, $r_1 > \ldots > r_i > r_{i+1} > \ldots > r_{n+1}$.

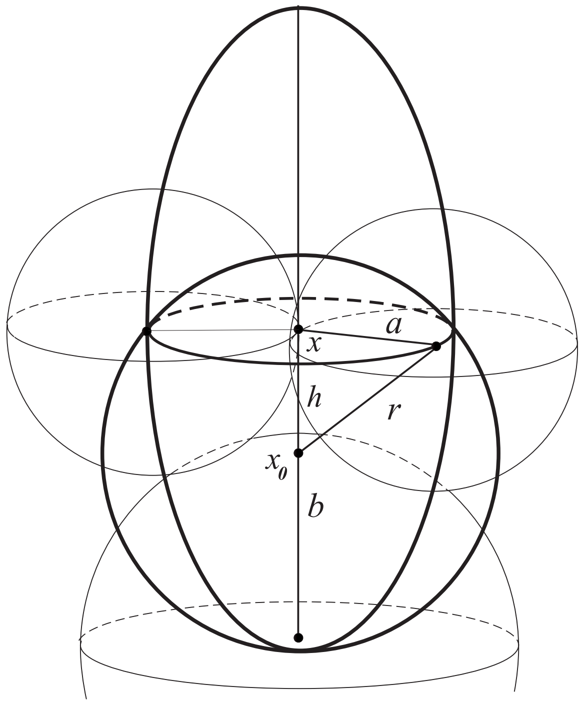

Рис. 2

До кожної кулі B_i застосуємо, відповідно, гомотетію з коефіцієнтом $k_i = r_1/r_i$. Тоді $k_{n+1} > \ldots > k_{i+1} > k_i > \ldots > k_1$ і отримана система складається з куль однакового радіуса, рівного r_1. За лемою 3, отримані кулі попарно не перетинаються і, за побудовою, не містять точку x та створюють в ній тінь. $\square$

Таким чином, лему 5 узагальнено на простір $\mathbb{R}^n$ довільної скінченної розмірності $n \geq 3$.

На даний момент залишається відкритим питання про те, чи справедливо, що в загальному випадку $n(x) = n + 1$. Очевидно лише те, що згідно з лемою 4, це число не може бути меньше n.

Цитована література

1. *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г. № 1772 – 85 Деп.
2. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. – Москва: Наука, 1966. – 668 с.
3. *Зелинский Ю.Б., Выговская И.Ю., Стефанчук М.В.* Обобщённо выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 12. – С. 1658–1666.
4. *Зелинский Ю.Б., Выговская И.Ю., Даккил Х.К.* Задача о тени для шаров фиксированного радиуса // Укр. мат. вісник. — 2016. – Т. 13, № 4. – С. 599–603.

5. *Зелинский Ю.Б.* Обобщенно выпуклые оболочки множеств и задача о тени // Укр. мат. вісник. – 2015. – Т. 12, № 2. – С. 278–289.
6. *Зелинский Ю.Б.* Варіації до задачі про "тінь" // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – Т. 14, № 1. – С. 163–170.
7. *Ткачук М.В., Осіпчук Т.М.* Задача о тени для эллипсоида вращения // Зб. праць Ін-ту математики НАНУ. – 2015. – Т. 12, № 4. – С. 246–253.
8. *Осипчук Т.М., Ткачук М.В.* Задача о тени для областей в евклидовых пространствах // Укр. мат. вісник. – 2016. – Т. 13, № 4. – С. 278–289.
9. *Зелинский Ю.Б.* Задача о тени для семейства множеств // Зб. праць Ін-ту математики НАНУ. – 2015. – Т. 12, № 3. – С. 197–204.
10. *Даккіл Х.К.* Задачі про тінь та відображення постійної кратності // Рукопис дис. канд. фіз.-мат. наук / Інститут математики НАН України. – Київ, 2017.

References

1. *Khudaiberganov, G.* (1982). On the homogeneous polynomially convex hull of a union of balls. M.: VINITI, Manuscr.dep. 21.02.1982, No 1772–85 dep. (in Russian).
2. *Rozenfeld, B.A.* (1966). Multi-dimensional spaces. M.: Nauka (in Russian).
3. *Zelinskii, Y.B., Stefanchuk, M.V., Vyhovskaya, I.Y.* (2015). Generalized convex sets and the problem of shadow. Ukr. Mat. J., 67, No. 12, pp. 1658–1666 (in Russian).
4. *Zelinskii, Y.B., Vyhovskaya, I.Y., Dakhil, H.K.* (2016). The problem of shadow for balls with fixed radius. Ukr. mat. vestnik, 13, No. 4, pp. 599–603 (in Russian).
5. *Zelinskii, Y.B.* (2015). Generally convex hulls of sets and problem of shadow. Ukr. mat. vestnik, 12, No. 2, pp. 278–289 (in Russian).
6. *Zelinskii, Y.B.* (2017). Variations to the problem of "shadow". Zbirn. Prats Inst. Mat. NANU, 14, No. 1, pp. 163–170 (in Ukrainian).
7. *Tkachuk, M.V., Osipchuk, T.M.* (2015). The problem of shadow for ellipsoid of revolution. Zbirn. Prats Inst. Mat. NANU, 12, No. 4, pp. 246–253 (in Russian).
8. *Osipchuk, T.M., Tkachuk, M.V.* (2016). The problem of shadow for domains in Euclidean spaces. Ukr. mat. vestnik, 13, No. 4, pp. 278–289 (in Russian).
9. *Dakhil, H.K.* (2017). The shadow problems and mappings of fixed multiplicity. Manuscr. thesis / Inst. of Math. of NASU. Kyiv (in Ukrainian).
10. *Zelinskii, Y.B.* (2015). Problem of shadow for family of sets. Zbirn. Prats Inst. Mat. NANU, 12, No. 3, pp. 197–204 (in Russian).

T. M. Osipchuk

Some remarks about systems of balls generating shadow at a point.

Problems, related to the determination of the minimal number of balls that generate a shadow at a fixed point in the multi-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n$, are considered in present work. Here, the statement "a system of balls generate shadow at a point" means that any line passing through the point intersects at least one ball of the system. New properties of pairwise-disjoint balls centered on the sphere in space $\mathbb{R}^3$, not containing a fixed point inside of the sphere, and generating shadow at the point are established. And a system of $n+1$ pairwise-disjoint balls with equal radii in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, that do not contain a fixed point of the space and generate shadow at the point is constructed in the work.

Keywords: *problem of shadow, system of balls, sphere, ellipsoid of revolution, domain, multi-dimensional real Euclidean space.*

Т. М. Осипчук

Некоторые замечания о системах шаров, создающих тень в точке.

В данной работе рассматриваются задачи, связанные с отысканием минимального количества шаров, которые создают тень в фиксированной точке многомерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Здесь выражение "набор шаров создает тень в точке" означает, что любая прямая, проходящая через заданную точку, пересекает хотя бы один шар из набора. В работе установлены новые свойства системы непересекающихся шаров с центрами на сфере, которые создают тень в произвольной фиксированной точке внутренности сферы в пространстве $\mathbb{R}^3$. А также, построено систему из $n+1$ непересекающегося шара с равными радиусами в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, которые создают тень в фиксированной точке пространства.

Ключевые слова: *задача о тени, система шаров, сфера, эллипсоид вращения, область, многомерное действительное евклидово пространство.*

Інститут математики Національної академії наук України, Київ, Україна
`osipchuk.tania@gmail.com`

Отримано 05.12.2017