

УДК 533.6.013.42

©2017. А. А. Лимарь, Ю. Н. Кононов

ОБ УТОЧНЕНИИ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ИДЕАЛЬНЫЕ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С ЖЕСТКИМИ ОСНОВАНИЯМИ

В линейной постановке выведено уточненное, на случай осесимметричных колебаний, частотное уравнение собственных совместных колебаний прямоугольной мембраны и жидкости. Мембрана горизонтально разделяет идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями. Частотное уравнения для симметричных и несимметричных совместных колебаний мембраны и жидкости представлено в единой форме. Уточнены ранее полученные приближенные условия устойчивости колебаний мембраны и жидкости. Показано, что для несимметричных частот приближенное значение критического натяжения является заниженным в $4/5$ раза, а для симметричных – в 0.818 раз.

MSC: 34N05.

Ключевые слова: гидроупругость, прямоугольная мембрана, идеальная несжимаемая жидкость, плоские колебания, устойчивость.

1. Введение.

На основании единого Лагранжевого подхода задача о колебании и устойчивости упругой прямоугольной пластины между идеальными жидкостями разной плотности в жестком прямоугольном канале, по видимому, впервые была рассмотрена в статье [1] и в монографии [2]. В работе [3] эта задача была рассмотрена на основании Лагранжа-Эйлера подхода. Наиболее полное исследование свободных колебаний мембраны на свободной поверхности жидкости в прямоугольном канале было проведено в статье [4]. В работах [5, 6] эта задача была обобщена на случай двухслойной жидкости с мембранами на свободной и внутренней поверхностях, а в статье [7] – на случай упругого дна. Наиболее общие исследования колебаний резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена пластина или мембрана, было проведено в монографии [7]. Из последних работ следует отметить работы [8–12]. В статьях [13–14] рассмотрена задача об осесимметричных колебаниях упругой мембраны, разделяющей двухплотностную жидкость в жестком круговом цилиндрическом резервуаре применительно к современным капиллярным системам отбора жидкости (КСОЖ).

2. Постановка задачи.

Рассмотрим плоские колебания упругой прямоугольной мембраны горизонтально разделяющей идеальные несжимаемые жидкости плотности ρ_i ($i = 1, 2$)

Исследования проведены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U002522) и при грантовой поддержке ДФФД (проект № Ф71/47-2017).

в жестком прямоугольном канале шириной b ($b = 2a$). Мембрана подвержена растягивающим усилиям интенсивности Γ в срединной поверхности. Контуры мембраны закреплены. Верхняя жидкость плотности ρ_1 заполняет сосуд до глубины h_1 , а нижняя жидкость плотности ρ_2 до глубины h_2 . Систему координат $Oxuz$ расположим так, чтобы плоскость Oxu находилась на невозмущённой срединной поверхности мембраны, ось Oy была направлена вдоль канала, а ось Oz - противоположно вектору ускорения силы тяжести \vec{g} . Колебания мембраны и жидкости будем рассматривать в линейной постановке, считая совместные колебания пластины и жидкости безотрывными, а движения жидкостей потенциальными. Уравнения плоских колебаний упругой мембраны и жидкости имеют вид [10–11]

$$k_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + g \Delta \rho W = \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + Q \text{ при } z = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \text{ при } z = 0, \quad (3)$$

$$W|_{x=\pm a} = 0, \quad (4)$$

$$\int_{-a}^a W dx = 0, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right|_{x=\mp a} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h_1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h_2. \quad (7)$$

Здесь $k_0 = \rho_0 h_0$; $W(x, t)$, ρ_0 , h_0 – соответственно нормальный прогиб, плотность и толщина мембраны; $\Phi_i(x, z, t)$ – потенциал скоростей i -ой жидкости ($i = 1, 2$); $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$; $Q = Q_2 \rho_2 - Q_1 \rho_1$, Q_i – произвольная функция времени.

3. Метод решения.

Представим функции $\Phi_i(x, z, t)$ в виде рядов Фурье по собственным функциям $\psi_n(x)$

$$\Phi_i(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{in}(t) e^{k_n z} + B_{in}(t) e^{-k_n z} \right] \psi_n(x) \quad (i = 1, 2), \quad (8)$$

где функции $\psi_n(x) = \cos k_n(x + a)$, а соответствующие им собственные числа $k_n = \pi/2a$ [3].

Представление функций $\Phi_i(x, z, t)$ в виде (8) позволяет удовлетворить уравнению (2) и граничным условиям (6).

Подставив ряды (8) в (3) и (7) и, воспользовавшись ортогональностью функций ψ_n , получаем линейную систему уравнений относительно неизвестных A_{in} , B_{in} и \dot{W}_n . Разрешим ее относительно \dot{W}_n :

$$\begin{aligned} A_{1n} &= -\frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, & B_{1n} &= -\frac{\dot{W}_n e^{\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, \\ A_{2n} &= \frac{\dot{W}_n e^{\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}, & B_{2n} &= \frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{1}{N_n^2} \int_{-a}^a W \psi_n dx, \\ N_n^2 &= \int_{-a}^a \psi_n^2 dx = a, \quad \kappa_{in} = h_i k_n. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом соотношений (8)–(10) уравнение (1) примет вид

$$k_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + g \Delta \rho W = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \ddot{W}_n}{k_n} \psi_n + Q, \quad (11)$$

где $a_n = \rho_1 \coth \kappa_{1n} + \rho_2 \coth \kappa_{2n}$.

Таким образом, совместные колебания упругой мембраны и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (10)–(11), граничных условий (4), условий сохранения объема несжимаемой жидкости (5) и заданных начальных условий.

4. Собственные частоты совместных колебаний упругой мембраны и жидкости.

Для нахождения собственных частот совместных колебаний упругой мембраны и жидкости положим:

$$W(x, t) = w(x) e^{i\omega t}, \quad Q = C_0 e^{i\omega t}. \quad (12)$$

Подставив (12) в (10)–(11), в граничные условия (4) и условия (5), получим

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + qw = -\frac{\omega^2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n w_n}{k_n} \psi_n + C, \quad (13)$$

$$w_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w \psi_n dx, \quad (14)$$

$$w|_{x=\pm a} = 0, \quad (15)$$

$$\int_{-a}^a w dx = 0. \quad (16)$$

Здесь $q = (k_0\omega^2 - g\Delta\rho)/T$, $C = -C_0/T$.

Общее решение уравнения (13) будем искать в виде общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного [7]

$$w = \sum_{k=1}^2 A_k^0 w_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \psi_n + w_0, \quad (17)$$

где w_k^0 ($k = \overline{1, 2}$) – фундаментальная система решений однородного уравнения

$$\frac{d^2 w_k^0}{dx^2} + q w_k^0 = 0. \quad (18)$$

Здесь A_k^0 , \tilde{C}_n и w_0 – неизвестные константы.

Подставив (17) в уравнение (13), и воспользовавшись соотношением $\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} = -k_n^2 \psi_n$, получим

$$\tilde{C}_n = \frac{\omega^2 a_n}{k_n d_n} w_n, \quad C = q w_0 \quad (19)$$

где $d_n = T k_n^2 + g\Delta\rho - k_0\omega^2$.

Подставив (17) в (14), и принимая во внимание (19), найдем выражение для w_n через неизвестные константы A_k^0

$$w_n = \frac{k_n d_n}{k_n d_n - \omega^2 a_n} \sum_{k=1}^4 A_k^0 E_{kn}^0. \quad (20)$$

Здесь

$$E_{kn}^0 = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w_k^0 \psi_n dx. \quad (21)$$

С учетом (16), (19) и (20) окончательное выражение для формы прогиба пластины w , примет вид

$$w = \sum_{k=1}^2 \left(w_k^0 - \tilde{w}_k^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n E_{kn}^0}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} \psi_n \right) A_k^0, \quad (22)$$

где $\tilde{w}_k^0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a w_k^0 dx$, $\tilde{a}_n = a_n + k_n k_0$, $\tilde{d}_n = T k_n^2 + g\Delta\rho$.

В отличие от работ [10–11] в формуле (22) появляется константа \tilde{w}_k^0 , которая для несимметричных совместных колебаний мембраны и жидкости равна нулю, а для симметричных колебаний отлична от нуля.

В (22) входит две неизвестные константы A_k^0 . Из граничных условий закрепления мембраны (15) имеем два линейных однородных уравнений относительно A_k^0

$$\sum_{k=1}^2 \left(B_{jk} - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 B_{jn}^* \right) A_k^0 = 0, \quad (j = 1, 2). \quad (23)$$

Здесь $\alpha_n = a_n / (\omega^2 a_n - k_n d_n) = a_n / (\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n)$, $B_{jk} = w_k^0|_{x=\pm a} - \tilde{w}_k^0$,

$$B_{jn}^* = \begin{cases} 1, & x = -a \quad (j = 1), \\ (-1)^n, & x = a \quad (j = 2). \end{cases}$$

Из равенства нулю определителя однородной системы (23) следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой мембраны и жидкости

$$\left| \|C_{qk}\|_{j,k=1}^2 \right| = 0, \quad (24)$$

где $C_{jk} = B_{jk} - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 B_{jn}^*$ ($j, k = \overline{1, 2}$).

Собственные формы колебаний будут найдены из однородной системы (23) и выражения (22).

Воспользовавшись разложением функций w_k^0 в ряд по полной и ортогональной системе функций ψ_n , условием $\int_{-a}^a \psi_n dx = 0$ и обозначением (21), уравнение (24) можно переписать так [10-11]

$$\left| \|C_{qk}\|_{j,k=1}^2 \right| = 0, \quad (25)$$

где $C_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 B_{jn}^*$ ($j, k = \overline{1, 2}$), $\beta_n = 1 + \alpha_n = \frac{k_n d_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n}$.

Таким образом, рассматриваемая задача имеет бесконечный дискретный спектр собственных значений ω_l^2 , являющихся корнями характеристических уравнений (24) и (25), а соответствующие им собственные функции $w_l(x)$ образуют полную ортогональную систему функций на отрезке $[-a, a]$. Однако, следует отметить, что при определенных соотношениях параметров механической системы частотные уравнения могут не иметь положительных корней, т.е. плоская форма равновесия упругой мембраны может быть неустойчивой [10-11].

Решения однородного уравнения w_k^0 и значения коэффициента E_{kn}^0 зависят от знака величины q .

При $q > 0$ фундаментальная система решений w_k^0 имеет вид $w_k^0 = \{\sin px, \cos px\}$, а коэффициенты E_{kn}^0 и C_{jk} –

$$E_{kn}^0 = \frac{Tp}{ad_n} \{ [(-1)^n - 1] \cos \tilde{p}, [(-1)^n + 1] \sin \tilde{p} \},$$

$$C_{11} = \frac{pT}{a} \cos \tilde{p} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n - 1] \tilde{\beta}_n, \quad C_{12} = \frac{pT}{a} \sin \tilde{p} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + 1] \tilde{\beta}_n,$$

$$C_{21} = \frac{pT}{a} \cos \tilde{p} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] \tilde{\beta}_n, \quad C_{22} = \frac{pT}{a} \sin \tilde{p} \sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n] \tilde{\beta}_n,$$

и частотное уравнение (25) запишется так

$$C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = \frac{4p^2T^2}{a^2} \sin 2\tilde{p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m-1} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m} \right) = 0. \quad (26)$$

Здесь $p^2 = q$, $\tilde{p} = pa$.

При $q < 0$ фундаментальная система решений w_k^0 имеет вид

$$w_k^0 = \{ \sinh \tilde{p}x, \cosh \tilde{p}x \},$$

а коэффициенты E_{kn}^0 и C_{jk} –

$$E_{kn}^0 = \frac{T\tilde{p}}{ad_n} \{ [(-1)^n - 1] \cosh \tilde{p}_1, [(-1)^n + 1] \sinh \tilde{p}_1 \},$$

$$C_{11} = \frac{T\tilde{p} \cosh \tilde{p}_1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n - 1] \tilde{\beta}_n, \quad C_{12} = \frac{T\tilde{p} \sinh \tilde{p}_1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + 1] \tilde{\beta}_n,$$

$$C_{21} = -\frac{T\tilde{p} \cosh \tilde{p}_1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n - 1] \tilde{\beta}_n, \quad C_{22} = \frac{T\tilde{p} \sinh \tilde{p}_1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + 1] \tilde{\beta}_n,$$

и частотное уравнение принимает вид

$$C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = -\frac{qT^2}{4a^2} \sinh 2\tilde{p}_1 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m-1} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m} \right) = 0, \quad (27)$$

где $\tilde{p}^2 = -q > 0$, $\tilde{p}_1 = \tilde{p}a$.

Так как $\sin 2\tilde{p} \neq 0$ и $\sinh 2\tilde{p}_1 \neq 0$, то из вида уравнений (26) и (27) следует, что частотное уравнение (25) имеет вид $\left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m-1} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m} \right) = 0$, не зависит от условий $k_0\omega^2 - g\Delta\rho > 0$ или $k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho < 0$, распадается на четные и нечетные частоты и может быть записано в единой форме для этих частот [10-11] $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n = 0$ или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} = 0. \quad (28)$$

Несложно показать, что нули знаменателя левой части уравнения (28) описывают частоты колебаний незакрепленной мембраны.

Таким образом, если $n = 2m - 1$, то уравнение (28) описывает нечетные частоты, а если $n = 2m$, то – четные частоты. Следует отметить, что такого упрощения удалось достигнуть за счет разложения функции w_k^0 в ряд по полной и ортогональной системе собственных функций ψ_n и рассмотрении уравнения (25). При использовании уравнения (24) значительно возросли бы аналитические вычисления, и такого упрощения можно было бы достигнуть, если разложить тригонометрические и гиперболические функции на простейшие дроби так, как это сделано, например, в работах [4–6].

Левая часть уравнения (28) является монотонно возрастающей функцией параметра ω^2 на интервале $(k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n, k_{n+1} \tilde{d}_{n+1} / \tilde{a}_{n+1})$ ($n = 1, 2, \dots$), принимающая на нем значения от $-\infty$ до ∞ . Следовательно, между двумя последовательными значениями $k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n$ лежит только один корень уравнения (28). Этим заранее определяются интервалы, в которых находятся собственные частоты.

5. Устойчивость колебаний упругой мембраны, разделяющей жидкости разной плотности.

Если в ряде уравнения (28) удерживать два члена, то из неравенства $\omega^2 > 0$ следует условие устойчивости плоской формы равновесия мембраны $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 > 0$. Для нечетных и четных форм колебаний оно соответственно примет вид [10–11]

$$T > \frac{4g(\rho_1 - \rho_2)a^2}{5\pi^2}, \quad (n = 1, 3) \quad (29)$$

$$T > \frac{2g(\rho_1 - \rho_2)a^2}{5\pi^2}, \quad (n = 2, 4). \quad (30)$$

Условия устойчивости (29)–(30) не зависят от глубин заполнения жидкостей и массы мембраны. Из этих условий видно, что для устойчивости несимметричных колебаний нужна значительно большая величина предварительного натяжения, чем для симметричных. Неравенства (29)–(30) можно уточнить с учетом трех и более членов ряда, но при этом придется воспользоваться условиями положительности корней полиномов n -ой степеней, что значительно усложнит аналитические исследования. Из условий (29)–(30) следует, что, с учетом принятой точности, при $g \geq 0$ и естественной стратификации $\rho_1 \leq \rho_2$ частотное уравнение (28) всегда имеет положительные корни и плоская форма равновесия упругой мембраны устойчива. Неустойчивость может иметь место только в случае $g\Delta\rho < 0$, а при $g > 0$ только если нарушается естественная стратификация, т.е. при условии $\rho_1 > \rho_2$. Выписанные неравенства (29)–(30) совпадают с неравенствами, полученными при наличии свободной поверхности у верхней жидкости в статье [3] и при $T = 0$ с неравенствами работы [1–2].

Для нахождения критических значений механических параметров при которых происходит потеря устойчивости в частотном уравнении (28) положим $\omega^2 = 0$ и

оно примет вид $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\tilde{d}_n = 0$ или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Tk_n^2 + g\Delta\rho} = 0. \quad (31)$$

Из уравнения (31) следует, что при $\Delta\rho \geq 0$ ($g > 0$) оно не имеет решений и в этом случае механическая система всегда будет устойчива. Неустойчивость может возникнуть только при $\Delta\rho < 0$.

Перепишем уравнение (31) в безразмерном виде при $\Delta\rho < 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = 0, \quad (32)$$

где

$$\alpha^2 = -\frac{4g\Delta\rho a^2}{T\pi^2} > 0.$$

Числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 - \alpha^2)$ для нечетных и четных значений n могут быть представлены следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 - \alpha^2} = \frac{\pi}{4\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2}, \quad (33)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - \alpha^2} = -\frac{1}{4\alpha^2} \left(\pi\alpha \cot \frac{\pi\alpha}{2} - 2 \right). \quad (34)$$

Решение уравнения (32) при $n = 2k - 1$ с учетом (33) имеет вид $\alpha = 2l$, а критическое значение натяжения $T = g(\rho_1 - \rho_2) a^2 / \pi^2 l^2$, которое при $l = 1$ даст следующее точное условие устойчивости

$$T > \frac{1}{\pi^2} g(\rho_1 - \rho_2) a^2 = 0.101321g(\rho_1 - \rho_2) a^2. \quad (35)$$

Приближенное значение, выписанное из условия (29), запишется так

$$T > \frac{4}{5\pi^2} g(\rho_1 - \rho_2) a^2 = 0.081057g(\rho_1 - \rho_2) a^2. \quad (36)$$

Условие устойчивости (35), полученное для несимметричных частот, уточняет ранее полученное условие (36). Из неравенств (35)–(36) следует, что приближенное значение критического натяжения является заниженным в 4/5 раза.

Первый корень уравнения (32) при $n = 2k$ с учетом (34) имеет вид $\frac{\pi\alpha}{2} = 4.493409458$ из которого следует следующее точное условие устойчивости

$$T > 0.049528g(\rho_1 - \rho_2) a^2. \quad (37)$$

Приближенное значение, выписанное из условия (30) при $n = 2k$, примет вид

$$T > \frac{2}{5\pi^2} g (\rho_1 - \rho_2) a^2 = 0.040528g (\rho_1 - \rho_2) a^2. \quad (38)$$

Условие устойчивости (38), полученное для четных частот, уточняет ранее полученное условие (37). Из неравенств (37)–(38) следует, что приближенное значение критического натяжения является заниженным в 0.818 раз, что на 2.3% больше, чем для несимметричных частот.

Таким образом, уточнено ранее полученное частотное уравнение для случая осесимметричных колебаний и уточнены приближенные условия устойчивости. Показано, что учет двух членов в ряде частотного уравнения дает достаточную для практики точность.

Цитированная литература

1. Ильгамов М.А., Сахабутдинов Ж.М. Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности // Изб. проблемы прикл. механики. Сб. статей к шестидесятилетию акад. Н. Челомея. – М., 1974. – С. 341–346.
2. Ильгамов М.А. Введение в нелинейную гидроупругость. – М.: Гостехиздат, Наука, 1991. – 200 с.
3. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале // Теор. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 170–176.
4. Троценко В.А. Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, № 8. – С. 74–80.
5. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на “свободной” и внутренней поверхностях // Акустичний вісник. – 2003. – Т. 6, № 4. – С. 44–52.
6. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном // Прикладная механика. – 2008. – Т. 10, № 1. – С. 23–32.
7. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
8. Троценко В.А. Свободные колебания жидкости в канале с упругой мембраной на свободной поверхности // Укр. мат. вестник. – 2007. – Т. 4, № 2.- С. 215–228.
9. Богун Р.І., Троценко В.А. Колебания прямоугольной мембраны, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. Праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т. 6, № 3.- С. 53–76.
10. Кононов Ю.Н., Лимарь А.А. Вільні коливання рідини в прямокутному каналі з довільним симетричним дном та пружною мембраною на вільній поверхні // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2015. – № 1–2. – С. 97–108.
11. Кононов Ю.Н., Лимарь А.А. Об устойчивости колебания прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2016. – Т. 25. – С. 69–84.
12. Кононов Ю.Н., Лимарь А.А. Oscillations of rectangular plate separating ideal liquids of different density in a rectangular channel with else basis // International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications, October 17–19, 2017, Cherkasy, Ukraine. Book of Abstracts. – Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2017. – P. 31–33.

13. Гончаров Д.А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения. Электронное научно-техническое издание: Наука и образование. – 2013. – № 11. DOI: 10.7463/1113.0619258 [Электронный ресурс] URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html> (дата обращения: 19.02.2014).
14. Пожалоостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Вып. 12. [Электронный ресурс] URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html> (дата обращения: 19.02.2014).

References

1. Ilgamov, M.A., Sakhabutdinov Zh.M. (1974). On the stability of an elastic plate between liquids of different density. *Izv. problems prikl. mechanics. Sat. articles for the sixtieth birthday of Acad. N. Chelomey. M.* (in Russian).
2. Ilgamov, M.A. (1991). *Introduction to nonlinear hydroelasticity.* M.: Nauka (in Russian).
3. Kononov, Yu.N., Tatarenko, E.A. (2002). Free vibrations of a two-layer liquid separated by an elastic plate in a rectangular channel. *Theory. and prikl. Mechanics*, 36, pp. 170–176 (in Russian).
4. Trotsenko, V.A. (1995). Free oscillations of a liquid in a rectangular channel with an elastic membrane on a free surface. *Prikl. Mechanics*, 31, No. 8, pp. 74–80 (in Russian).
5. Kononov, Yu.N., Tatarenko, E.A. (2003). Free oscillations of a liquid in a rectangular channel with an elastic membrane on a free surface. Free vibrations of a two-layer liquid with elastic membranes on “free” and inner surfaces. *Acoustical Visnik*, 6, No. 4, pp. 44–52 (in Russian).
6. Kononov, Yu.N., Tatarenko, E.A. (2008). Free vibrations of elastic membranes and a two-layer liquid in a rectangular channel with an elastic bottom. *Applied hydromechanics*, No. 1, pp. 23–32 (in Russian).
7. Dokuchaev, L.V. (1987). *Nonlinear dynamics of aircraft with deformable elements.* M.: Mechanical Engineering (in Russian).
8. Trotsenko, V.A. (2007). Free Vibrations of a Liquid in a Channel with an Elastic Membrane on a Free Surface. *Problems of the Dynamics of the System of Bagatom Systems: Zb. prats Institute of Mathematics NAS of Ukraine*, 4, No. 2, pp. 215–228 (in Russian).
9. Bohun, R. I., Trotsenko, V. A. (2009). Free fluid fluctuations in a rectangular channel with arbitrary symmetric bottom and an elastic membrane on a free surface. *Problems of Dynamics and Static Systems of Multidimensional Systems: Zb. prats Institute of Mathematics NAS of Ukraine*, 6, No. 3, pp. 53–76 (in Russian).
10. Kononov, Yu.N., Limar, A.A. (2015). Oscillations of a rectangular membrane separating ideal fluids of different density in a rectangular channel with rigid bases. *Bulletin of the Donetsk University. Ser A. Natural sciences*, No. 1–2, pp. 97–108 (in Russian).
11. Kononov, Yu.N., Limar, A.A. (2016). On the stability of the oscillation of a rectangular plate separating ideal liquids of different density in a rectangular channel with rigid bases. *Problems of the computational mechanics and design*, 25, pp. 69–84 (in Russian).
12. Kononov, Yu.N., Lymar, A.A. (2017). Oscillations of a rectangular plate separating the ideal liquids of different density in a rectangular channel. *International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications, October 17-19, 2017, Cherkasy, Ukraine. Book of Abstracts.* Vinnytsia: Vasyl’ Stus Donetsk National University, pp. 31–33.
13. Goncharov, D.A. (2013). Dynamics of a two-layer fluid separated by an elastic partition taking into account the surface tension forces. *Electronic scientific and technical publication: Science and Education.* No. 11. DOI: 10.7463 / 1113.0619258 [Electronic resource] URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html> (date of circulation: February 19, 2014) (in Russian).
14. Pozhalostin, A.A., Goncharov, D.A. (2013). Free axisymmetric oscillations of a two-layer liquid with an elastic separator between layers in the presence of surface tension forces. *Engineering Journal: Science and Innovation.* Vol. 12. [Electronic resource] URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html> (reference date: February 19, 2014) (in Russian).

A. A. Lymar, Yu. N. Kononov

On the update of the conditions of the stability of vibrations of the membrane separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations.

In the linear formulation, the frequency equation of the proper joint oscillations of a rectangular membrane and a liquid, corrected for the case of axisymmetric oscillations, is derived. The membrane horizontally separates ideal incompressible fluids of different densities in a rectangular channel with rigid bases. The frequency equation for symmetric and asymmetrical joint vibrations of a membrane and a liquid is presented in a uniform form. The previously obtained approximate conditions for the stability of the vibrations of a membrane and a fluid are refined. It is shown that for asymmetric frequencies the approximate value of the critical tension is $4/5$ times lower, and for symmetric frequencies it is 0.818 times.

Keywords: *hydroelasticity, rectangular membrane, ideal incompressible fluid, flat oscillations, stability.*

О. О. Лимар, Ю. М. Кононов

Про уточнення умов стійкості коливань мембрани, яка поділяє ідеальні рідини в прямокутному каналі з жорсткими основами.

У лінійній постановці виведено уточнене, на випадок осесиметричних коливань, частотне рівняння власних спільних коливань прямокутної мембрани і рідини. Мембрана горизонтально розділяє ідеальні нестисливі рідини різної щільності в прямокутному каналі з жорсткими основами. Частотне рівняння для симетричних і несиметричних спільних коливань мембрани і рідини представлено в єдиній формі. Уточнено раніше отримані наближені умови стійкості коливань мембрани і рідини. Показано, що для несиметричних частот наближене значення критичного натягу є заниженими в $4/5$ рази, а для симетричних – в 0.818 раз.

Ключові слова: *гідропружність, прямокутна мембрана, ідеальна нестислива рідина, плоскі коливання, стійкість.*

Николаевский нац. аграрный ун-т, Николаев
Донецкий нац. ун-т им. Василя Стуса, Винница
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

Получено 25.12.17