Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 4, 532 – 542

Задача о тени для областей в евклидовых пространствах

Татьяна М. Осипчук, Максим В. Ткачук

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В работе исследуется задача о тени, обобщенная на области пространства $\mathbb{R}^n$, $n \le 3$. Под задачей о тени подразумевается нахождение минимального количества шаров, удовлетворяющих некоторым условиям, и таких, что каждая прямая, проходящая через заданную точку, пересечет хотя бы один шар из набора. Доказано, что для того, чтобы создать тень в каждой заданной точке произвольной области пространства $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$) набором замкнутых или открытых шаров, попарно не пересекающихся, не содержащих заданную точку и с центрами на границе области, достаточно четырех (двух) таких шаров.

2010 MSC. 32F17, 52A30.

Ключевые слова и фразы. Задача о тени, выпуклость, линейная выпуклость, шар, сфера.

1. Введение

В 1982 году Г. Худайбергановым была поставлена задача о тени [9], которая может быть сформулирована следующим образом: *найти минимальное число замкнутых (открытых) шаров в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые попарно не пересекаются, с центрами на сфере S^{n-1} и радиусами, меньше радиуса сферы и таких, что произвольная прямая, проходящая через центр сферы, пересекает хотя бы один из этих шаров.*

Если для m шаров это имеет место, то говорят, что m замкнутых (открытых) шаров в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые попарно не пересекаются, с центрами на сфере S^{n-1} и радиусами, меньшими радиуса сферы *создают тень в центре сферы.*

Статья поступила в редакцию 05.12.2016

ISSN 1810 – 3200.

Эта задача была решена Г. Худайбергановим для случая сферы при $n = 2$: было показано, что для окружности на плоскости достаточно двух кругов [9]. Там же было сделано предположение о том, что и для случая $n > 2$ минимальное число таких шаров равно n. С задачей можно ознакомиться в [1, 2]. Она также интересна с точки зрения выпуклого анализа тем, что является частичным случаем задачи о принадлежности точки обобщенно выпуклой оболочке семьи компактных множеств [2].

В [3] Ю. Зелинский со своими учениками доказал, что для $n = 3$ трех шаров не достаточно, вместе с тем, четыре шара уже будут создавать тень в центре сферы. Там же доказывается, что в общем случае необходимо и достаточно $n + 1$ шара. Таким образом, предположение Г. Худайберганова оказалось ошибочным. В [3] также предложен другой подход к решению задачи для $n = 2$, который дает некоторые числовые оценки радиусов шаров.

В [5] задача обобщена на произвольную точку внутренности круга для случая $n = 2$. Доказана следующая

Теорема 1.1. *Для того, чтобы семья попарно непересекающихся открытых (замкнутых) кругов с центрами на окружности и радиусами, меньшими радиуса окружности, создавала тень в каждой точке внутренности окружности, необходимо и достаточно трех кругов.*

Для случая $n > 2$ эта задача остается открытой.

Можно изучать обобщенные задачи о тени, если вместо сферы рассматривать другую поверхность.

В [7, 8] рассматривается вытянутый эллипсоид вращения (далее эллипсоид). Для задач с эллипсоидом, в дальнейшем, под словом “шары” будем понимать *открытые (замкнутые) шары с центрами на эллипсоиде, которые попарно не пересекаются и не содержат центр эллипсоида.* Возникает вопрос о создании тени шарами в центре эллипсоида.

Сначала рассматриваются открытые шары. Если центр первого открытого шара с радиусом равным малой полуоси эллипсоида разместить на круге, образованном при вращении малой полуоси, тогда открытой останется только плоскость, касательная к шару в центре эллипсоида. Далее, если выбрать большую полуось эллипсоида достаточно длинной, то шар с центром в основании этой полуоси и касающийся первого шара закроет сколь угодно большой угол $< \pi$, что позволит третьему шару, находящемуся на линии вращения малой полуоси, закрыть остаток угла. В случае замкнутых шаров, достаточно сначала рассматривать шары из предыдущих рассуждений замкнутыми, а потом ненамного уменьшить их радиусы. Очевидно, что двух шаров для создания тени в центре эллипсоида не достаточно. Итак, *для того, чтобы создать тень шарами в центре эллипсоида с достаточно длинной большой полуосью по отношению к малой, необходимо и достаточно трех шаров.*

Тогда возникает следующая задача: *найти минимальное отношение d_{min} длин большой к малой полуоси эллипсоида, при котором трех шаров достаточно для того, чтобы создать тень в его центре.* В [7, 8] показано, что $d_{min} = 2\sqrt{2}$, причем оно не достигается и, таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть задан удлиненный эллипсоид вращения с отношением d большой полуоси к малой строго большим $2\sqrt{2}$. Для того, чтобы создать тень в центре заданного эллипсоида семьей попарно непересекающихся замкнутых (открытых) шаров с центрами на эллипсоиде и таких, что не содержат его центр, необходимо и достаточно трех шаров. Для эллипсоидов с $d <= 2\sqrt{2}$ трех шаров не достаточно.*

Оставался открытым вопрос о том, как разместить четыре шара на эллипсоиде с отношением d большой к малой оси $d <= 2\sqrt{2}$ так, чтобы они создавали тень в центре эллипсоида. Теорема 2.2 данной работы дает ответ в том числе и на этот вопрос.

Следующее обобщение задачи о тени возникает, если требовать, чтобы тень создавалась не шарами, а некоторыми другими множествами.

Пусть три шара создают тень в центре эллипсоида. Если изменить масштаб вдоль большой оси эллипсоида так, чтобы эллипсоид перешел в сферу, тогда шары перейдут в эллипсоиды вращения с параллельными осями. Очевидна такая теорема.

Теорема 1.3. *([7]) Для создания тени в центре сферы достаточно трех попарно непересекающихся эллипсоидов с центрами на сфере, каждый из которых не содержит центр сферы. При этом элипсоиды могут быть попарно гомотетичными.*

Следующий результат получен для шаров, центры которых не привязаны ни к одному заранее заданному множеству.

Теорема 1.4. *([6]) Для того, чтобы создать тень в заданной точке n-мерного евклидова пространства при $n >= 2$ семьей попарно непересекающихся замкнутых (открытых) шаров, не содержащих заданную точку, необходимо и достаточно n шаров.*

Для доказательства достаточно выбрать n двусторонних конусов с единой вершиной в заданной точке, каждый из которых содержит противоположные грани куба, чей центр находится в той же точке. Дальше в эти конусы вписывается система непересекающихся шаров.

С некоторыми приведенными здесь и другими обобщениями задачи о тени можно ознакомиться в обзорной работе [4].

2. Основные результаты

В данной работе задача о тени обобщена со сферы на произвольные области пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Рассматриваются шары с центрами на границе данной области, которые попарно не пересекаются, и такие, которые не содержат некоторую фиксированную точку области. В теоремах 6, 7 найдено число таких шаров, достаточное для того, чтобы создать тень в каждой фиксированной точке данной области пространства $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, соответственно. Для доказательства теорем используются свойства шаров из задачи о тени для сферы, которые отражены в следующих леммах и следствиях к ним.

Лемма 2.1. *Пусть заданы два замкнутых или открытых шара в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые не пересекаются, с центрами на сфере S^{n-1} и радиусами меньше радиуса сферы. Тогда, каждый шар с центром вне сферы, гомотетичный меньшему шару (в случае, если шары равны — гомотетичный одному из шаров) относительно центра сферы, не пересекает второй шар.*

Доказательство. Не уменьшая общности, будем рассматривать единичную сферу. Обозначим шары, как $B_1(O_1, R)$, $B_2(O_2, r)$ с радиусами R, r и центрами O_1, O_2 соответственно и пусть

$$r \leq R. \tag{2.1}$$

Пусть расстояние между центрами шаров равно d, тогда, условие о том, что шары не пересекаются, равносильно неравенству

$$r + R \leq d. \tag{2.2}$$

Дальше будем рассматривать угол α (рис. 1) между отрезком OO_2, что соединяет центры сферы и шара B_2, и между лучом, который выходит из центра сферы и касается шара B_2 в точке A, а также угол φ между отрезком OO_2 и перпендикуляром к d. Случай, когда треугольник O_1OO_2 вырождается в отрезок O_1O_2, не рассматриваем, поскольку он соответствует диаметрально противоположному размещению шаров B_1, B_2, для которых утверждение леммы справедливо.

Легко видеть, что $\angle\alpha \le \angle\varphi$. Действительно, рассмотрим прямоугольные треугольники OAO_2 и ODO_2. Из них $\sin\alpha = r$, $\sin\varphi = \dfrac{1}{2}d$. С неравенств (2.1), (2.2) вытекает, что $r \le \dfrac{1}{2}d$, поэтому

$$\sin\alpha \le \sin\varphi,$$

а значит, $\angle\alpha \le \angle\varphi$.

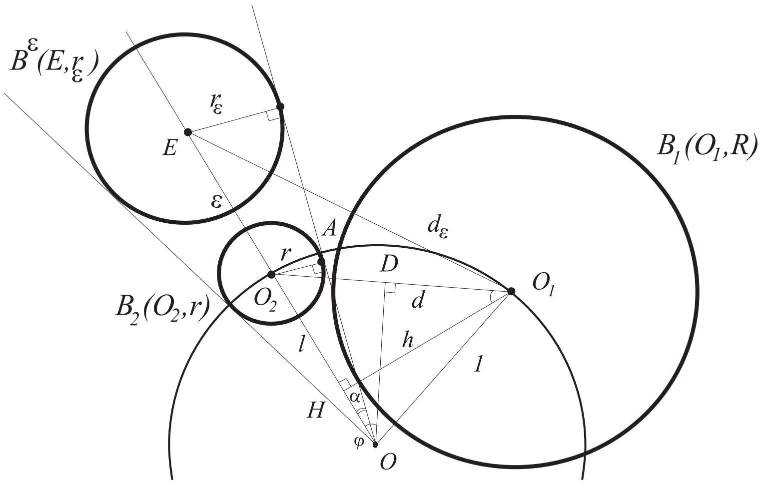

Рис. 1

Теперь рассмотрим любой шар $B^{\varepsilon}(E, r_{\varepsilon})$ с центром за сферой в точке E на расстоянии ε от центра шара B_2, гомотетичный шару B_2 относительно центра сферы O и радиусом r_{ε}. Покажем, что для этого шара справедливо неравенство

$$r_{\varepsilon} + R \le d_{\varepsilon},$$

где d_{ε} — расстояние между центрами шаров B^{ε}, B_1.

Сначала отметим, что из того, что $r_{\varepsilon} = r + \varepsilon \sin\alpha$ и с (2.2) имеем

$$r_{\varepsilon} + R \le d + \varepsilon \sin\alpha.$$

Дальше, в $\triangle O_1OO_2$ опустим высоту $O_1H = h$ с вершины O_1 на сторону OO_2, тогда $\angle O_2O_1O = \varphi$ и

$$HO_2 = l = d\sin\varphi.$$

Из $\triangle O_1HO_2$

$$d^2 = h^2 + l^2,$$

а из $\triangle O_1HE$ и двух предыдущих формул

$$d_\varepsilon^2 = h^2 + (l+\varepsilon)^2 = d^2 + \varepsilon^2 + 2l\varepsilon = d^2 + \varepsilon^2 + 2d\varepsilon\sin\varphi. \qquad (2.3)$$

Рассмотрим выражение

$$(d + \varepsilon\sin\alpha)^2 = d^2 + \varepsilon^2\sin^2\alpha + 2d\varepsilon\sin\alpha. \qquad (2.4)$$

Из (2.3), (2.4) теперь легко видеть, что

$$d + \varepsilon\sin\alpha \le d_\varepsilon,$$

а значит $r_\varepsilon + R \le d_\varepsilon$, что и нужно было показать. Лемма доказана. □

Несложно привести контрпример, для шаров, гомотетичных меньшему шару относительно центра сферы и с центрами внутри нее.

Следствие 2.1. *Пусть задано два замкнутых или открытых шара в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые не пересекаются, с центрами на сфере S^{n-1} и радиусами меньше радиуса сферы. Тогда, каждый шар с центром внутри сферы, гомотетичный большему шару (в случае, если шары равны — гомотетичный одному из шаров) относительно центра сферы, не пересечет второй шар.*

Следствие 2.2. *Пусть задано два замкнутых или открытых шара в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые не пересекаются, с центрами на сфере S^{n-1}и радиусами меньше радиуса сферы. Тогда, произвольный шар, гомотетичный меньшему шару (в случае, если шары равны — гомотетичный одному из шаров) относительно центра сферы, с коэффициентом гомотетии k_1, не пересечет произвольный шар, гомотетичный большему шару относительно центра сферы, с коэффициентом гомотетии k_2, если $k_1 \ge k_2$.*

Доказательство обоих следствий является очевидным.

В [5] было доказано, что в центре сферы S^{n-1} можно создать тень четырьмя заданными шарами в пространстве $\mathbb{R}^n$, предложив один из способов размещения их центров на сфере. В следующей лемме мы приводим свой способ, удобный для дальнейших изложений.

Лемма 2.2. *Существуют четыре замкнутых или открытых шара в пространстве $\mathbb{R}^3$, которые не пересекаются, с центрами в вершинах правильной треугольной пирамиды и радиусами меньше радиуса сферы, описанной вокруг пирамиды, которые создают тень в центре сферы. При этом три шара, размещенные в вершинах основания пирамиды, имеют одинаковые радиусы, а четвертый имеет наибольший радиус.*

Доказательство. Не уменьшая общности, будем рассматривать единичную сферу S^2, центр которой, для удобства, разместим в точке $O_1 = (0, -1, 0)$ (рис. 2). Поместим центр единичного открытого шара $B_1(O, 1)$ в начале координат, $O = (0, 0, 0)$. Тогда, шар B_1 создаст тень в центре сферы везде, кроме экваториальной плоскости сферы $\Sigma = \{(x, y, z) : y = -1\}$, касательной к шару B_1 в точке O_1. Установим зависимость угла φ, под которым из точки O_1 видно пересечение плоскости Σ с любым шаром $B^X(X, r(X))$, касательным к шару B_1 с центром в точке $X \in \mathbb{R}^3$ и радиусом r, от точки X.

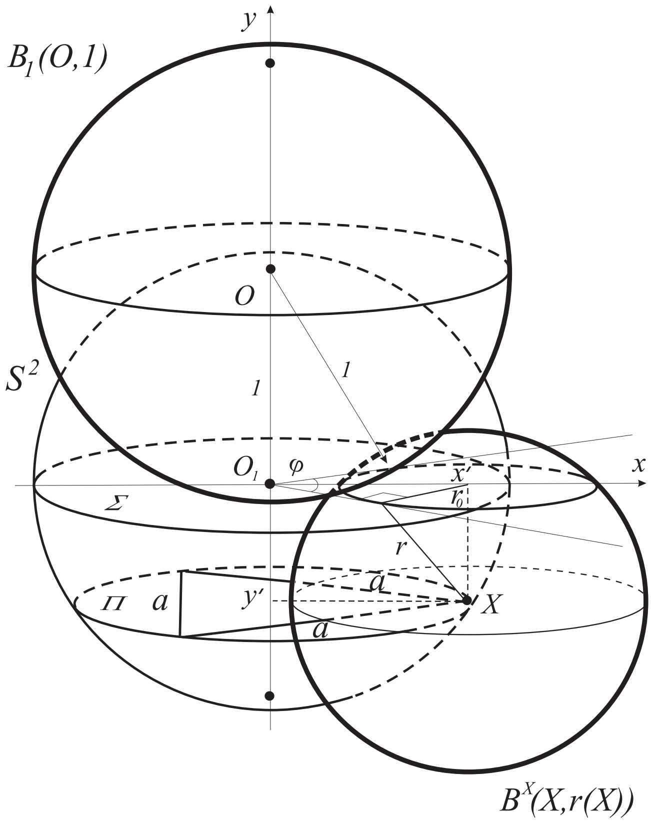

Рис. 2

Не уменьшая общности, будем рассматривать открытые шары B^X, с центрами в точках $X = (x, y, 0)$ полуплоскости xOy, $x > 0$, и такие, что имеют с плоскостью Σ непустое пересечение. Тогда, этим пересечением будет открытый круг с центром в точке $(x, -1, 0)$ и некоторым радиусом r_0. Получим:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{r_0}{x},$$

$$r_0 = \sqrt{r^2 - (-y-1)^2},$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} - 1.$$

Опуская промежуточные вычисления, получим:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{x^2 - 2y - 2\sqrt{x^2+y^2}}}{x}, \;\; x > 0.$$

$$\frac{1}{4}x^2 cos^2\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{cos^2\frac{\varphi}{2}} = y. \tag{2.5}$$

Далее, среди всех шаров B^X, будем рассматривать только те, чьи центры находятся на сфере. Получим систему:

$$\begin{cases} \sin\frac{\varphi}{2} = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2y - 2\sqrt{x^2+y^2}}}{x}, \\ x^2 + (y+1)^2 = 1, \\ x > 0, \end{cases}$$

которая эквивалентна уравнению

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{-y^2 - 4y - 2\sqrt{-2y}}{-y^2 - 2y}, \;\text{ при } \; -2 < y < 0, \tag{2.6}$$

либо уравнению

$$\cos^2\frac{\varphi}{2} y^2 + 2\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2\right) y + \frac{4}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 0 \;\text{ при } \; -2 < y < 0.$$

Найдем значение координаты y центра шара B^X, которая закрывает угол $\angle\varphi = \frac{\pi}{3}$. Получим:

$$y' = \frac{1}{3}(\sqrt{57} - 11) \approx -1,15.$$

При этом,

$$x' = \frac{4}{3}\sqrt{\sqrt{57} - 7} \approx 0,99.$$

Итак, каждый шар, касающийся шара B_1, с центром на сфере на уровне $y = y'$, будет закрывать в плоскости Σ сектор с $\angle\varphi = \frac{\pi}{3}$. При этом, легко видеть, что радиус такого шара $r' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} - 1 \approx 0,52$ меньше половины стороны $a = \sqrt{3}x' \approx 1,71$ правильного треугольника, вписанного в окружность на сфере в плоскости $\Pi = \{(x,y,z) : y = y'\}$. Таким образом, три шара, касающиеся шара

B_1, с центрами в вершинах данного треугольника, попарно не пересекаются.

Теперь рассмотрим плоскость $\Pi_\varepsilon = \{(x, y, z) : y = y' - \varepsilon\}$. В вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность, которая есть пересечением плоскости Π_ε со сферой, разместим центры трех шаров, касательных к шару B_1. При этом, $\varepsilon > 0$ выберем достаточно малым для того, чтобы эти шары все еще не пересекались. Поскольку, функция $\sin^2 \dfrac{\varphi}{2}$ в (2.6) является убывающей, тогда, каждый такой шар в плоскости Σ будет закрывать сектор $\angle\varphi > \dfrac{\pi}{3}$, а значит, вместе они создадут тень в центре сферы в плоскости Σ, а также, в поверхности каждого конуса з вершиной в точке O_1 с углом, достаточно близким к π. Теперь, уменьшим радиус шара B_1 так, чтобы угол конуса над ней оставался достаточно близким к π. И, таким образом, получим набор шаров, которые удовлетворяют условиям леммы 2.2.

Лемма 2.2 доказана. □

В [2] вводятся множества, подобные выпуклым. Они описываются следующими двумя определениями.

Определение 2.1. *([2]) Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется m-выпуклым относительно точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, если существует m-мерная плоскость L, такая что $x \in L$ и $L \cap E = \emptyset$.*

Определение 2.2. *([2]) Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется m-выпуклым если оно m-выпукло относительно каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.*

Нетрудно убедиться, что каждое из определений удовлетворяет аксиоме выпуклости: пересечение каждого подсемейства из семейства таких множеств также удовлетворяет определению. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ можно рассматривать минимальное m-выпуклое множество, содержащее E и которое называют m-оболочкой множества E.

Тогда задачу о тени можно рассматривать как частный случай принадлежности точки 1-оболочке объединения некоторого набора шаров или других множеств.

Далее, под областью будем понимать открытое связное множество.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы любая фиксированная точка x_0 области $D \subset \mathbb{R}^2$ принадлежала 1-оболочке замкнутых (открытых) кругов, которые попарно не пересекаются, не содержат точку x_0 и с центрами на границе области D, необходимо и достаточно двух таких кругов.*

Доказательство. Рассмотрим окружность S^1 с центром в точке x_0 максимального радиуса, такого, что его внутренность содержится в области D. Тогда, для такой окружности, построим семью из двух замкнутых (открытых) кругов, которые попарно не пересекаются, не содержат точку x_0 и с центрами на окружности так, как это было сделано в [9], при этом, разместим центр большего круга в точке $x \in \partial D \cap S^1$. Теперь, построим круг, гомотетичный меньшему, относительно точки x_0 и с центром на ∂D. Тогда, по лемме 2.1, этот круг не пересечет больший круг. Очевидно, что для создания тени в точке x_0 одного круга не достаточно. Теорема доказана. □

Теорема 2.2. *Для того, чтобы любая фиксированная точка x_0 области $D \subset \mathbb{R}^3$ принадлежала 1-оболочке замкнутых (открытых) шаров, которые попарно не пересекаются, не содержат точку x_0 и с центрами на границе области D, достаточно четырех таких шаров.*

Доказательство. Рассмотрим сферуS^2 с центром в точке x_0 максимального радиуса, такого, что его внутренность содержится в области D. Для такой сферы построим семью из четырех замкнутых (открытых) шаров, которые попарно не пересекаются, не содержат точку x_0 и с центрами на сфере так, как это было сделано в лемме 2, при этом, расположим центр большего шара в точке $x \in \partial D \cap S^2$. Теперь, применим гомотетию к каждому из остальных трех шаров относительно точки x_0 так, чтобы центры гомотетичных шаров находились на границе области D. Тогда, по лемме 2.1, каждый из этих шаров не пересечет большой шар, а по следствию 2.2, эти шары будут попарно не пересекаться между собой. Теорема доказана.

□

Существует область пространства $\mathbb{R}^3$ и точка такой области, которая принадлежит 1 - оболочке трех замкнутых (открытых) шаров, которые попарно не пересекаются, не содержат данную точку и с центрами на границе области. Такой областью, например, есть вытянутый эллипсоид вращения со значением отношения большой к малой полуоси строго больше $2\sqrt{2}$, а точкой — центр эллипсоида ([7], [8]).

Литература

[1] Ю. Б. Зелинский, *Многозначные отображения в анализе*, К., Наукова думка, 1993.

[2] Ю. Б. Зелинский, *Выпуклость. Избранные главы. Праці Інституту математики НАНУ*, К., Інститут математики НАНУ, **92** (2012).

[3] Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук, *Обобщённо выпуклые множества и задача о тени* // Укр. мат. журн., **67** (2015), No. 12, 1658–1666.

[4] Ю. Б. Зелинский, *Обобщенно выпуклые оболочки множеств и задача о тени* // Укр. мат. вісник, **12** (2015), No. 2, 278–289.

[5] Ю. Б. Зелінський, М. В. Стефанчук, *Узагальнення задачі про тінь* // Укр. мат. журн., **68** (2016), No. 6, 757–762.

[6] Ю. Б. Зелинский, *Задача о тени для семейства множеств* // Зб. праць Ін-ту математики НАНУ, **12** (2015), No. 3, 197–204.

[7] М. В. Ткачук, Т. М. Осіпчук, *Задача о тени для эллипсоида вращения* // Зб. праць Ін-ту математики НАНУ, **12** (2015), No. 4, 246–253.

[8] M. Tkachuk, T. Osipchuk, *On the shadow problem and its generalizations to ellipsoids*, arXiv preprint arXiv:1501.06747, 2015.

[9] Г. Худайберганов, *Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров* // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г. № 1772 – 85 Деп.

Сведения об авторах

Татьяна Михайловна Осипчук
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: `otm82@mail.ru`

Максим Владимирович Ткачук
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: `mvtkachuk@mail.ru`