Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 4, 514 – 531

Диференціально-символьний метод розв'язування двоточкової за часом задачі для рівняння із частинними похідними

Зіновій М. Нитребич, Оксана М. Маланчук

(*Представлена І. І. Скрипніком*)

Анотація. У класах цілих функцій досліджена розв'язність двоточкової за часом задачі для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними. Запропоновано диференціально-символьний метод побудови розв'язків задачі.

2010 MSC. 35G15.

Ключові слова та фрази. Локальні двоточкові умови, диференціально-символьний метод, квазіполіномні розв'язки.

1. Вступ

Задача Коші для диференціального рівняння з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами є коректною крайовою задачею і найбільш дослідженою на сьогодні. Наприклад, класичний розв'язок задачі Коші для рівняння коливань струни

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(t,x) = 0, \quad a > 0, \tag{1.1}$$

$$U(0,x) = \varphi_0(x), \;\; \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_1(x), \tag{1.2}$$

визначається відомою формулою Д'Аламбера [1], є єдиним, а відповідна однорідна задача має лише тривіальний розв'язок. Якщо ж зміщення $U(t,x)$ струни задано в момент часу $t = 0$, а швидкість зміни зміщення в іншій близький момент часу $t = h > 0$, то отримуємо задачу для рівняння (1.1) з двоточковими за часом умовами

$$U(0,x) = \varphi_0(x), \;\; \frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = \varphi_1(x). \tag{1.3}$$

Стаття надійшла в редакцію 10.12.2016

ISSN 1810 – 3200.

На відміну від задачі Коші (1.1), (1.2) двоточкова задача (1.1), (1.3) є некоректною задачею – відповідна однорідна двоточкова задача для рівняння (1.1) має нетривіальні класичні розв'язки, серед яких, зокрема, факторизовані

$$U(t,x,h) = \sin\frac{\pi t}{2h}\cos\frac{\pi x}{2ah}.$$

Зауважимо, що при $h \to 0$ двоточкова задача (1.1), (1.3) вироджується у задачу Коші (1.1), (1.2).

Розв'язність задач із багатоточковими умовами за часовою змінною для лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними на підставі метричного підходу вперше досліджено у статті [2]. Зокрема, у цій праці було вказано на проблему малих знаменників, що притаманна багатоточковим задачам, було також показано, що класи єдиності розв'язку багатоточкової за часом задачі для рівнянь із частинними похідними істотно відрізняються від класів єдиності розв'язку відповідної задачі Коші для цих же ж рівнянь.

Задача (1.1), (1.3) у смузі $(0,h)\times\mathbb{R}$ є задачею з умовами Діріхле–Неймана. Аналогічна задача для диференціального рівняння високого порядку, однорідного за порядком диференціювання, вивчалася у праці [3].

Застосування метричного підходу до дослідження n-точкових задач для рівнянь та систем диференціальних рівнянь із частинними похідними в обмежених областях дозволило в останні роки отримати низку нових результатів (див. праці [4, 5] та бібліографію в них).

Встановленню класів однозначної розв'язності задач із локальними багатоточковими умовами за часом для рівнянь із частинними похідними в необмежених областях (смуга, шар) присвячені дослідження [6, 7].

Зауважимо, що багатоточкова задача для рівняння із частинними похідними бере свій початок від аналогічної багатоточкової задачі для звичайного диференціального рівняння, яка зустрічається в літературі як задача Валле–Пуссена. Перші результати в цьому напрямі отримано у працях [8–10].

Ця стаття присвячена вивченню задачі з неоднорідними локальними двоточковими умовами за часом для однорідного диференціального рівняння другого порядку за часом та довільного (зокрема, нескінченного) порядку за просторовими змінними і є продовженням досліджень [11].

2. Формулювання задачі

Нехай $a(\nu) = \sum\limits_{|k|=0}^{\infty} a_k \nu^k$, $b(\nu) = \sum\limits_{|k|=0}^{\infty} b_k \nu^k$ – цілі функції, $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $k = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{Z}_+^s$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_s) \in \mathbb{C}^s$, $s \in \mathbb{N}$, $\nu^k = \nu_1^{k_1} \ldots \nu_s^{k_s}$, $|k| = k_1 + \ldots + k_s$. Для $x = (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s$ розглянемо диференціальні вирази (скінченного або нескінченного порядку)

$$a\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k, \quad b\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \sum_{|k|=0}^{\infty} b_k \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k.$$

Крім того, нехай $A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами, причому їх символи $A_1(\nu)$, $A_2(\nu)$, $B_1(\nu)$, $B_2(\nu)$ для кожного $\nu \in \mathbb{C}^s$ задовольняють умови:

$$|A_1(\nu)|^2 + |A_2(\nu)|^2 \neq 0, \quad |B_1(\nu)|^2 + |B_2(\nu)|^2 \neq 0.$$

У просторі $\mathbb{R}^{1+s}$ змінних $t, x_1, \ldots, x_s$ розглянемо задачу

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)U(t,x) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\,a\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t} + b\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U = 0, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} l_{0\partial}U(t,x) &\equiv A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(0,x) + A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_0(x), \\ l_{1\partial}U(t,x) &\equiv B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(h,x) + B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = \varphi_1(x), \end{aligned} \tag{2.2}$$

у якій $h > 0$, а $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ – задані функції, причому хоча б одна з них є ненульовою.

Виділимо класи цілих функцій, до яких повинні належати $\varphi_0(x)$ та $\varphi_1(x)$, щоб розв'язок задачі (2.1), (2.2) існував і був єдиним у відповідному класі цілих функцій. При цьому вкажемо диференціально-символьний метод побудови розв'язку задачі.

3. Основні результати

За рівнянням із частинними похідними (2.1), замінивши $\frac{\partial}{\partial x}$ на вектор-параметр ν і символ $\frac{\partial}{\partial t}$ на $\frac{d}{dt}$, запишемо звичайне диференціальне рівняння

$$L\Big(\frac{d}{dt}, \nu\Big)T(t,\nu) = 0, \tag{3.1}$$

причому надалі вважаємо, що $\nu \in \mathbb{C}^s$.

Функції вигляду

$$T_0(t,\nu)=e^{-a(\nu)t}\left\{a(\nu)\frac{\sinh\left[t\sqrt{a^2(\nu)-b(\nu)}\right]}{\sqrt{a^2(\nu)-b(\nu)}}+\cosh\left[t\sqrt{a^2(\nu)-b(\nu)}\right]\right\},$$

$$T_1(t,\nu)=e^{-a(\nu)t}\frac{\sinh\left[t\sqrt{a^2(\nu)-b(\nu)}\right]}{\sqrt{a^2(\nu)-b(\nu)}}$$

утворюють нормальну в точці $t=0$ фундаментальну систему розв'язків рівняння (3.1).

Оскільки коефіцієнти $a(\nu)$, $b(\nu)$ рівняння (3.1) за припущенням є цілими функціями, то згідно з теоремою Пуанкаре ([12], с. 59) функції $T_0(t,\nu)$, $T_1(t,\nu)$ є також цілими функціями стосовно вектор-параметра ν, зокрема, особливості у разі $a^2(\nu)=b(\nu)$ є усувними, причому

$$T_0(t,\nu)=e^{-a(\nu)t}\big\{a(\nu)t+1\big\},\quad T_1(t,\nu)=t\,e^{-a(\nu)t}.$$

Знайдемо розв'язки $\widetilde{T}_0\,(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1\,(t,\nu)$ рівняння (3.1), що задовольняють двоточкові умови

$$\begin{aligned} l_{0\nu}\widetilde{T}_k\,(t,\nu)&\equiv A_1(\nu)\widetilde{T}_k\,(0,\nu)+A_2(\nu)\frac{d\widetilde{T}_k}{dt}\,(0,\nu)=\delta_{0k},\\ l_{1\nu}\widetilde{T}_k\,(t,\nu)&\equiv B_1(\nu)\widetilde{T}_k\,(h,\nu)+B_2(\nu)\frac{d\widetilde{T}_k}{dt}\,(h,\nu)=\delta_{1k},\ k\in\{0,1\}\,, \end{aligned}\tag{3.2}$$

де δ_{jk} — дельта Кронекера.

Шукаємо ці розв'язки у вигляді

$$\widetilde{T}_k(t,\nu)=c_{k1}(\nu)T_0(t,\nu)+c_{k2}(\nu)T_1(t,\nu),\quad k\in\{0,1\},$$

де $c_{01}(\nu)$, $c_{02}(\nu)$, $c_{11}(\nu)$, $c_{12}(\nu)$ — невідомі функції $\nu\in\mathbb{C}^s$.

Умова $\Delta(\nu)\neq0$ є умовою існування функцій $\widetilde{T}_0\,(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1\,(t,\nu)$, де

$$\Delta\,(\nu)=\begin{vmatrix} l_{0\nu}T_0(t,\nu) & l_{0\nu}T_1(t,\nu)\\ l_{1\nu}T_0(t,\nu) & l_{1\nu}T_1(t,\nu)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} A_1(\nu) & A_2(\nu)\\ B_1\,(\nu)\,T_0(h,\nu)+B_2\,(\nu)\dfrac{dT_0}{dt}(h,\nu) & B_1\,(\nu)\,T_1(h,\nu)+B_2\,(\nu)\dfrac{dT_1}{dt}(h,\nu)\end{vmatrix}.$$

Такий визначник будемо називати характеристичним визначником задачі (2.1), (2.2). Його можна подати також у вигляді:

$$\Delta(\nu)=e^{-ah}\Bigg(\Big\{A_1B_1-a\,(A_1B_2+A_2B_1)+bA_2B_2\Big\}\frac{\sinh\Big[h\sqrt{a^2-b}\Big]}{\sqrt{a^2-b}}$$
$$+\Big\{A_1B_2-A_2B_1\Big\}\cosh\Big[h\sqrt{a^2-b}\,\Big]\Bigg),$$

де $a=a(\nu)$, $b=b(\nu)$, $A_1=A_1(\nu)$, $A_2=A_2(\nu)$, $B_1=B_1(\nu)$, $B_2=B_2(\nu)$.

Зазначимо, що функція $\Delta(\nu)$ як суперпозиція цілих функцій є також цілою, зокрема, для $a^2=b$ маємо

$$\Delta(\nu)=e^{-ah}\Big(\big\{A_1B_1-a\,(A_1B_2+A_2B_1)+a^2A_2B_2\big\}h+A_1B_2-A_2B_1\Big).$$

3.1. Випадок, коли множина нулів характеристичного визначника є порожньою

У цьому разі $\Delta^{-1}(\nu)$ є також цілою функцією, а тому функції $\widetilde{T}_0(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)$ визначаються однозначно для довільного $\nu\in\mathbb{C}^s$, є цілими стосовно цього вектор-параметра і мають такий вигляд:

$$\widetilde{T}_0(t,\nu)=\Delta^{-1}(\nu)\Big\{T_0(t,\nu)\,l_{1\nu}T_1(t,\nu)-T_1(t,\nu)\,l_{1\nu}T_0(t,\nu)\Big\}$$
$$=\frac{e^{-a(t+h)}}{\Delta(\nu)}\Bigg[(B_1-aB_2)\,\frac{\sinh\Big[(h-t)\sqrt{a^2-b}\Big]}{\sqrt{a^2-b}}+B_2\cosh\Big[(h-t)\sqrt{a^2-b}\Big]\Bigg],$$
$$\widetilde{T}_1(t,\nu)=\Delta^{-1}(\nu)\Big\{-T_0(t,\nu)\,l_{0\nu}T_1(t,\nu)+T_1(t,\nu)\,l_{0\nu}T_0(t,\nu)\Big\}$$
$$=\frac{e^{-at}}{\Delta(\nu)}\left[(A_1-aA_2)\,\frac{\sinh\Big[t\sqrt{a^2-b}\,\Big]}{\sqrt{a^2-b}}-A_2\cosh\Big[t\sqrt{a^2-b}\,\Big]\right].\qquad(3.3)$$

Зауважимо, що функції (3.3) для $a^2=b$ є такими

$$\widetilde{T}_0(t,\nu)=\frac{e^{-a(t+h)}}{\Delta(\nu)}\left[(B_1-aB_2)(h-t)+B_2\right],$$

$$\widetilde{T}_1(t,\nu)=\frac{e^{-at}}{\Delta(\nu)}\left[(A_1-aA_2)\,t-A_2\right].$$

Порядок цілих функцій $\widetilde{T}_0(t,\nu)\,e^{\nu\cdot x}$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)\,e^{\nu\cdot x}$ за сукупністю змінних $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$ позначимо через p. Зауважимо, що $1\le p\le\infty$.

Позначимо через $A_{p'}$ клас цілих функцій $\varphi(x)$, порядок яких є меншим за p', де $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, якщо $1<p<\infty$. Крім того, вважаємо, що $A_{p'}$ є класом цілих функцій ($p'=\infty$), якщо $p=1$, і класом цілих функцій експоненційного типу ($p'=1$), якщо $p=\infty$.

Через $\mathbb{A}_{p'}$ позначимо клас цілих функцій $U(t,x)$, які для кожного фіксованого $t\in\mathbb{R}$ належать до $A_{p'}$.

Теорема 3.1. *Нехай $\forall\nu\in\mathbb{C}^s$ $\Delta(\nu)\neq 0$ і p — порядок цілих функцій $\widetilde{T}_0(t,\nu)\,e^{\nu\cdot x}$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)\,e^{\nu\cdot x}$ за сукупністю змінних $\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_s$. Якщо $\varphi_0,\varphi_1\in A_{p'}$, то у класі $\mathbb{A}_{p'}$ існує єдиний розв'язок задачі* (2.1), (2.2). *Цей розв'язок можна подати у вигляді*

$$U(t,x)=\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_0(t,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O}+\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_1(t,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O},\tag{3.4}$$

де $\nu\cdot x=\nu_1x_1+\ldots+\nu_sx_s$, $O=(0,\dots,0)\in\mathbb{C}^s$.

Доведення. Для цілих функцій $\varphi_0,\varphi_1\in A_{p'}$ диференціальні вирази нескінченного порядку $\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ та $\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ визначимо шляхом заміни x на $\frac{\partial}{\partial\nu}$ у рядах Маклорена для функцій $\varphi_0(x)$ та $\varphi_1(x)$. Тоді вираз (3.4) є функціональним рядом. Цей ряд визначає цілу функцію $U(t,x)$, яка є квазіполіномом за змінною t і для кожного фіксованого t належить до класу $A_{p'}$ (див. [13] для $s=1$ та [14] для $s>1$).

Покажемо, що ціла функція, визначена рівністю (3.4), задовольняє рівняння (2.1). З того, що функції (3.3) є розв'язками рівняння (3.1), враховуючи комутативність операцій $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial\nu}$, отримаємо:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x)=L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\sum_{j=0}^{1}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_j(t,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O}$$

$$=\sum_{j=0}^{1}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\widetilde{T}_j(t,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O}$$

$$=\sum_{j=0}^{1}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left[e^{\nu\cdot x}\left\{L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\widetilde{T}_j(t,\nu)\right\}\right]\Big|_{\nu=O}=0.$$

Оскільки функції (3.3) задовольняють умови (3.2), то для $j\in\{0,1\}$ отримуємо

$$l_{j\partial}U(t,x)=\sum_{k=0}^{1}\varphi_k\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}\,l_{j\nu}\widetilde{T}_k(t,\nu)\right\}\Big|_{\nu=O}$$

$$=\sum_{k=0}^{1}\varphi_k\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}\delta_{jk}\right\}\Big|_{\nu=O}=\varphi_j(x).$$

Отже, функція (3.4) є розв'язком задачі (2.1), (2.2).

Єдиність розв'язку задачі (2.1), (2.2) доведемо від супротивного. Припустимо, що існує ненульовий розв'язок $U(t,x)$ з класу $\mathbb{A}_{p'}$ однорідного рівняння (2.1), тобто ціла функція вигляду

$$U(t,x) = \sum_{\bar{k}\in\mathbb{Z}_+^{s+1}} u_{\bar{k}}\, t^{k_0} x^k, \quad \bar{k} = (k_0, k) = (k_0, k_1, \ldots, k_s), \; u_{\bar{k}} \in \mathbb{C},$$

змінних t та $x = (x_1, \ldots, x_s)$, де $x^k = x_1^{k_1} \ldots x_s^{k_s}$, що задовольняє однорідні умови (2.2).

Позначимо $U(0,x) = \varphi(x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \psi(x)$. Тоді функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ є ненульовою парою функцій з класу $A_{p'}$. Запишемо розв'язок задачі (2.1), (2.2) згідно з диференціально-символьним методом [15, 16] як єдиний розв'язок задачі Коші з класу $\mathbb{A}_{p'}$ для рівняння (2.1) з початковими даними φ та ψ у вигляді:

$$U(t,x) = \varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O} + \psi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}. \tag{3.5}$$

Оскільки $U(t,x)$ задовольняє однорідні умови (2.2), то маємо систему рівнянь

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\, l_{0\nu}T_0(t,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O} + \psi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\, l_{0\nu}T_1(t,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O} = 0,$$

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\, l_{1\nu}T_0(t,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O} + \psi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\, l_{1\nu}T_1(t,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O} = 0,$$

яку запишемо у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} l_{0\partial}T_0\Big(t, \dfrac{\partial}{\partial x}\Big) & l_{0\partial}T_1\Big(t, \dfrac{\partial}{\partial x}\Big) \\ l_{1\partial}T_0\Big(t, \dfrac{\partial}{\partial x}\Big) & l_{1\partial}T_1\Big(t, \dfrac{\partial}{\partial x}\Big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо

$$\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0, \quad \Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = 0.$$

За умови $\Delta(\nu) \neq 0$ для довільного $\nu \in \mathbb{C}^s$ одержуємо, що існує $\Delta^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, а тому $\varphi \equiv 0$ та $\psi \equiv 0$. Отримали протиріччя з тим, що пара функцій φ та ψ є ненульовою. Теорему доведено. $\square$

Приклад 3.1. В області $(t,x) \in \mathbb{R}^4$ знайти розв'язок двоточкової задачі

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_3\right]^2 U(t,x) = 0,$$
$$\big(2-\Delta_3\big)U(0,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_0(x), \quad U(1,x) = \varphi_1(x), \tag{3.6}$$

в якій $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — тривимірний оператор Лапласа.

∇ Задача (3.6) є задачею (2.1), (2.2), у якій $a(\nu) = -||\nu||^2 \equiv -(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)$, $b(\nu) = a^2(\nu)$, $A_1(\nu) = 2 - ||\nu||^2$, $A_2(\nu) = B_1(\nu) = 1$, $B_2(\nu) = 0$, $h = 1,\ s = 3$.

Характеристичний визначник задачі (3.6) та функції (3.3) мають вигляд:

$$\Delta(\nu) = e^{||\nu||^2},$$
$$\widetilde{T}_0\,(t,\nu) = (1-t)e^{||\nu||^2 t}, \quad \widetilde{T}_1\,(t,\nu) = (2t-1)e^{||\nu||^2(t-1)}. \tag{3.7}$$

Функції (3.7) є цілими (для $t \notin \{0,1\}$) порядку $p = 2$ за сукупністю змінних ν_1, ν_2, ν_3. Якщо $\varphi_0, \varphi_1 \in A_2$, то за теоремою 3.1 у класі $\mathbb{A}_2$ існує розв'язок задачі (3.6), який можна подати у вигляді (3.4), де $\widetilde{T}_0\,(t,\nu)\,, \widetilde{T}_1\,(t,\nu)$ — функції (3.7).

Зокрема, для функцій вигляду $\varphi_0(x) = x_1 e^{x_2 - x_3}$, $\varphi_1(x) = 0$ з класу A_2 за формулою (3.4) знаходимо:

$$U(t,x) = \frac{\partial}{\partial \nu_1}\left\{(1-t)e^{||\nu||^2 t + \nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu_1=0,\,\nu_2=1,\,\nu_3=-1} = (1-t)x_1 e^{2t + x_2 - x_3}.$$

Знайдений розв'язок задачі (3.6) за теоремою 3.1 у класі $\mathbb{A}_2$ є єдиним. $\triangle$

Приклад 3.2. Знайти в області $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ розв'язок рівняння

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial t} + \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + 1\right)\right] U\,(t,x) = 0, \tag{3.8}$$

що задовольняє локальні двоточкові умови:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) U\,(0,x) + \frac{\partial}{\partial t} U\,(0,x) = \varphi_0\,(x)\,,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) U\left(\frac{\pi}{2}, x\right) + \frac{\partial}{\partial t} U\left(\frac{\pi}{2}, x\right) = \varphi_1\,(x)\,. \tag{3.9}$$

∇ Для даної задачі маємо $a(\nu) = \nu_1 + \nu_2$, $b(\nu) = (\nu_1 + \nu_2)^2 + 1$, $A_1(\nu) = B_1(\nu) = \nu_1 + \nu_2$, $A_2(\nu) = B_2(\nu) = 1$, $h = \frac{\pi}{2}$, $s = 2$.

Характеристичний визначник задачі (3.8), (3.9) та функції (3.3) мають вигляд

$$\Delta(\nu) = e^{-(\nu_1+\nu_2)\frac{\pi}{2}},$$

$$\widetilde{T}_0(t,\nu) = e^{-(\nu_1+\nu_2)t}\sin t, \quad \widetilde{T}_1(t,\nu) = -e^{-(\nu_1+\nu_2)(t+\frac{\pi}{2})}\cos t.$$

Множина нулів характеристичного визначника задачі є порожньою, а функції $\widetilde{T}_0(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)$ є цілими функціями, причому першого порядку за сукупністю параметрів ν_1, ν_2.

Розв'язок задачі (3.8), (3.9) згідно з теоремою 3.1 для цілих функцій φ_0, φ_1 можна знайти за формулою (3.4):

$$U(t,x) = \varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-(\nu_1+\nu_2)t+\nu\cdot x}\sin t\right\}\Big|_{\nu=O}$$

$$+\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{-e^{-(\nu_1+\nu_2)(t+\frac{\pi}{2})+\nu\cdot x}\cos t\right\}\Big|_{\nu=O}$$

$$= \varphi_0(x_1 - t,\, x_2 - t)\sin t - \varphi_1\left(x_1 - t - \frac{\pi}{2},\, x_2 - t - \frac{\pi}{2}\right)\cos t.$$

Отриманий розв'язок

$$U(t,x) = \varphi_0(x_1 - t,\, x_2 - t)\sin t - \varphi_1\left(x_1 - t - \frac{\pi}{2},\, x_2 - t - \frac{\pi}{2}\right)\cos t$$

має зміст не лише для цілих функцій φ_0, φ_1. Ця формула також зображує класичний розв'язок задачі (3.8), (3.9) у разі двічі неперервно диференційовних на $\mathbb{R}^2$ функцій φ_0, φ_1. $\triangle$

3.2. Випадок, коли множина нулів характеристичного визначника не є порожньою і не збігається з $\mathbb{C}^s$

У цьому разі встановимо однозначну розв'язність задачі (2.1), (2.2) у поданих нижче класах квазіполіномів K_L та $K_{\mathbb{C},L}$ для деякої підмножини L ($L \neq \varnothing$, $L \neq \mathbb{C}^s$) з простору $\mathbb{C}^s$:

— K_L – це клас квазіполіномів дійсних змінних $x_1, \ldots, x_s$ вигляду

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(x)e^{\alpha_j\cdot x}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad x = (x_1, \ldots, x_s), \tag{3.10}$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ є попарно різними векторами з L, а $Q_1(x), \ldots, Q_m(x)$ — довільні ненульові поліноми з комплексними коефіцієнтами векторзмінної x (вважаємо, що до цього класу належить також нульовий квазіполіном $g = 0$);

— $K_{\mathbb{C},L}$ – клас квазіполіномів дійсних змінних $t, x_1, \ldots, x_s$ вигляду

$$f(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{N} P_{lj}\,(t,x)\, e^{\beta_l t + \alpha_j \cdot x},\ \ m, N \in \mathbb{N},$$

де комплексні числа $\beta_1, \ldots, \beta_N$ є попарно різними, попарно різні комплексні вектори $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ належать до L, причому $P_{11}\,(t,x)\,,\ \ldots,$ $P_{Nm}\,(t,x)$ — поліноми з комплексними коефіцієнтами змінних $t, x_1, \ldots, x_s$ такі, що матриця $(P_{lj})_{l=\overline{1,N},\, j=\overline{1,m}}$ має ненульові елементи у випадку $m = 1$ або $N = 1$ і ненульові стовпці та рядки в іншому випадку (вважаємо, що до $K_{\mathbb{C},L}$ належить також нульовий квазіполіном $f = 0$).

Зауваження 3.1. Кожному квазіполіному $g(x)$ вигляду (3.10) можна поставити у відповідність диференціальний вираз $g\,(\partial/\partial\nu)$, що діє на цілу функцію $\Phi(\nu)$ за формулою

$$g\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Phi(\nu) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Phi(\nu + \alpha_j), \tag{3.11}$$

зокрема,

$$g\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Phi(\nu)\Big|_{\nu=O} = \sum_{j=1}^{m} Q_j\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Phi(\nu)\Big|_{\nu=\alpha_j} = \sum_{j=1}^{m} Q_j\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\Big)\Phi(\alpha_j).$$

Зауваження 3.2. Нульовий квазіполіном $g = 0$ належить як до K_L, так і до $K_{\mathbb{C}^s \setminus L}$, причому $K_L \cap K_{\mathbb{C}^s \setminus L} = \{0\}$. Результатом дії відповідного диференціального виразу $g\,(\partial/\partial\nu)$ на цілу функцію є, очевидно, нульова функція.

Для $\nu \in \mathbb{C}^s \setminus M$, де M — множина нулів характеристичного визначника, тобто

$$M = \{\nu \in \mathbb{C}^s\colon \quad \Delta(\nu) = 0\}, \tag{3.12}$$

функції $\widetilde{T}_0\,(t,\nu)\,, \widetilde{T}_1\,(t,\nu)$ можна знайти однозначно. Вони мають вигляд (3.3), є квазіполіномами за змінною t і мають особливості за вектор-змінною ν на множині M.

Теорема 3.2. *Нехай $\varphi_0, \varphi_1 \in K_L$, де $L = \mathbb{C}^s \setminus M$, а M — множина* (3.12)*, причому $M \neq \mathbb{C}^s$ і $M \neq \varnothing$. Тоді у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},L}$ існує єдиний розв'язок задачі* (2.1), (2.2)*. Цей розв'язок можна подати у вигляді* (3.4)*, де $\widetilde{T}_0\,(t,\nu)\,, \widetilde{T}_1\,(t,\nu)$ — функції* (3.3).

Доведення. Якщо φ_0, $\varphi_1 \in K_{\mathbb{C}^s \backslash M}$, то згідно з (3.11) функція (3.4) є квазіполіномом з класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s \backslash M}$.

Аналогічно як у теоремі 3.1 доводиться, що функція (3.4) задовольняє рівняння (2.1) та умови (2.2).

Єдиність розв'язку задачі (2.1), (2.2) доведемо від супротивного. Припустимо, що існує ненульовий розв'язок $U(t,x)$ з класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s \backslash M}$ однорідного рівняння (2.1), що задовольняє однорідні умови (2.2).

Позначимо $U(0,x) = \varphi(x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \psi(x)$. Тоді функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ є ненульовою парою квазіполіномів з класу $K_{\mathbb{C}^s \backslash M}$. Запишемо розв'язок задачі (2.1), (2.2) згідно з диференціально-символьним методом [15, 16] як єдиний розв'язок задачі Коші з класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s \backslash M}$ для рівняння (2.1) з початковими даними φ та ψ у вигляді (3.5). Повторюючи міркування теореми 3.1 щодо єдиності розв'язку задачі (2.1), (2.2), отримаємо тотожності

$$\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0, \quad \Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = 0.$$

За умови $\Delta(\nu) \neq 0$ для $\nu \in \mathbb{C}^s \backslash M$ одержуємо, що $\varphi \equiv 0$ та $\psi \equiv 0$. Отримали протиріччя з тим, що пара квазіполіномів φ та ψ є ненульовою. Теорему доведено. $\square$

Приклад 3.3. В області $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ розв'язати двоточкову задачу для диференціально-функціонального рівняння (диференціального рівняння нескінченного порядку за змінною x_2)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U(t,x_1,x_2)}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_1}(t,x_1,x_2) + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(t,x_1,x_2+1) = 0, \\ &\frac{\partial U}{\partial x_1}(0,x_1,x_2) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x_1,x_2) = e^{x_1}, \quad U(1,x_1,x_2) = x_2 e^{x_1}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

∇ Задача (3.13) є задачею (2.1), (2.2), у якій $a(\nu) = \nu_1$, $b(\nu) = \nu_1^2 e^{\nu_2}$, $s = 2$, $h = 1$, $A_1(\nu) = \nu_1$, $A_2(\nu) = 1$, $B_1(\nu) = 1$, $B_2(\nu) = 0$, $\varphi_0\,(x) = e^{x_1}$, $\varphi_1\,(x) = x_2 e^{x_1}$.

Характеристичний визначник задачі та відповідна множина M матимуть вигляд:

$$\Delta(\nu) = -e^{-\nu_1} \cosh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right],$$

$$M = \left\{\nu \in \mathbb{C}^2\colon \quad \nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}} = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) i,\ k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad i^2 = -1. \tag{3.14}$$

Запишемо функції (3.3) для задачі (3.13):

$$\widetilde{T}_0\,(t,\nu) = -e^{-\nu_1 t}\frac{\sinh\left[\nu_1\,(1-t)\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]}{\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\cosh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]},$$

$$\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right)=e^{-\nu_1(t-1)}\frac{\cosh\left[\nu_1 t\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]}{\cosh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]}.$$

Оскільки $\varphi_0,\,\varphi_1\in K_{\mathbb{C}^2\setminus M}$, то розв'язок задачі (3.13) знайдемо за формулою (3.4):

$$U\left(t,x\right)=e^{\frac{\partial}{\partial\nu_1}}\left\{e^{\nu_1x_1+\nu_2x_2}\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right)\right\}\Big|_{\nu=O}$$

$$+e^{\frac{\partial}{\partial\nu_1}}\frac{\partial}{\partial\nu_2}\left\{e^{\nu_1x_1+\nu_2x_2}\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right)\right\}\Big|_{\nu=O}$$

$$=e^{x_1}\left\{\widetilde{T}_0(t,1,0)+x_2\widetilde{T}_1(t,1,0)+\frac{\partial\widetilde{T}_1}{\partial\nu_2}(t,1,0)\right\}$$

$$=e^{x_1-t}\left(t-1\right)+\frac{1}{2}e^{x_1-t+1}\left(2x_2-t^2+1\right).$$

Отже, розв'язок задачі (3.13) має вигляд

$$U(t,x)=e^{x_1-t}\left(t-1+ex_2-\frac{et^2}{2}+\frac{e}{2}\right)$$

і є єдиним за теоремою 3.2 у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^2\setminus M}$, де M – множина (3.14). $\triangle$

Приклад 3.4. В області $(t,x)\in\mathbb{R}^4$ знайти розв'язок двоточкової задачі

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right]^2U(t,x)=0,$$
$$\left[2\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+1\right]U(0,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\varphi_0(x),\quad U(1,x)=\varphi_1(x). \tag{3.15}$$

∇ Задача (3.15) є задачею (2.1), (2.2), у якій $a(\nu)=\nu_3-\nu_1\nu_2$, $b(\nu)=a^2(\nu)$, $A_1(\nu)=2\nu_3-\nu_1\nu_2+1$, $A_2(\nu)=B_1(\nu)=1$, $B_2(\nu)=0$, $h=1,\ s=3$.

Для задачі (3.15) маємо

$$\Delta(\nu)=\nu_3e^{-\nu_3+\nu_1\nu_2},\qquad M=\left\{\nu\in\mathbb{C}^3\colon\ \ \nu_3=0\right\},$$

$$\widetilde{T}_0(t,\nu)=\frac{e^{(\nu_1\nu_2-\nu_3)t}}{\nu_3}(1-t),$$

$$\widetilde{T}_1(t,\nu)=\frac{e^{(\nu_1\nu_2-\nu_3)(t-1)}}{\nu_3}[(\nu_3+1)t-1].$$

Нехай в задачі (3.15) $\varphi_0(x) = x_1 e^{x_2 - x_3}$, $\varphi_1(x) = 0$. Ці функції належать до класу $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^3\setminus M}$ (див. зауваження 3.2).

За формулою (3.4) знаходимо розв'язок двоточкової задачі

$$U(t,x) = (1-t)\frac{\partial}{\partial \nu_1}\left\{\frac{e^{(\nu_1\nu_2-\nu_3)t+\nu_1x_1+\nu_2x_2+\nu_3x_3}}{\nu_3}\right\}\Bigg|_{\nu_1=0,\,\nu_2=1,\,\nu_3=-1}$$

$$= (1-t)\left\{\frac{(\nu_2 t + x_1)e^{(\nu_1\nu_2-\nu_3)t+\nu_1x_1+\nu_2x_2+\nu_3x_3}}{\nu_3}\right\}\Bigg|_{\nu_1=0,\,\nu_2=1,\,\nu_3=-1}$$

$$= (1-t)\left\{\frac{(t+x_1)e^{t+x_2-x_3}}{-1}\right\} = (t-1)(t+x_1)e^{t+x_2-x_3}.$$

Знайдений розв'язок

$$U(t,x) = (t-1)(t+x_1)e^{t+x_2-x_3}$$

задачі (3.15) за теоремою 3.2 є єдиним у класі $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^3\setminus M}$. $\triangle$

Серед цілих функцій порядку не більше одиниці розглянемо ще один клас існування та єдиності розв'язку (3.4) задачі (2.1), (2.2) для випадку $s = 1$.

Позначимо через $A_{1,r}$, де $r > 0$, клас цілих функцій дійсної змінної першого порядку і типу меншого, ніж r, або порядку меншого, ніж одиниця. Через $\mathbb{A}_{1,r}$ позначимо клас цілих функцій $U(t,x)$, які для кожного фіксованого $t \in \mathbb{R}$ належать до класу $A_{1,r}$.

Теорема 3.3. *Нехай* $r = \inf\limits_{\nu\in M} |\nu|$, *де* M — *множина* (3.12), *причому* $r \neq 0$, *тобто* $\Delta(0) \neq 0$. *Якщо* $\varphi_0, \varphi_1 \in A_{1,r}$, *то у класі функцій* $\mathbb{A}_{1,r}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (2.1), (2.2), *який можна подати у вигляді* (3.4).

Доведення. Визначимо диференціальні вирази $\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right), \varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ нескінченного порядку шляхом заміни x на $\frac{\partial}{\partial\nu}$ у рядах Маклорена для функцій $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$. Тоді функціональний ряд (3.4) визначає функцію $U(t,x)$, яка є цілою функцією за змінною t і для кожного фіксованого t належить до класу $A_{1,r}$. Останнє випливає з рівностей

$$\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_j(t,\nu)\,e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} = \widetilde{T}_j\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_j(x),$$

де $j \in \{0,1\}$, і леми 1 [3]. Отже, $U \in \mathbb{A}_{1,r}$ і є за теоремою 3.1 розв'язком задачі (2.1), (2.2).

Для доведення єдиності розв'язку задачі (2.1), (2.2) у класі функцій $\mathbb{A}_{1,r}$ треба повторити хід доведення теореми 3.2 і використати умову, що всередині круга радіуса $r = \inf\limits_{\nu \in M} |\nu|$ не міститься нулів $\Delta(\nu)$. Теорему доведено. $\square$

Приклад 3.5. Розглянемо двоточкову задачу

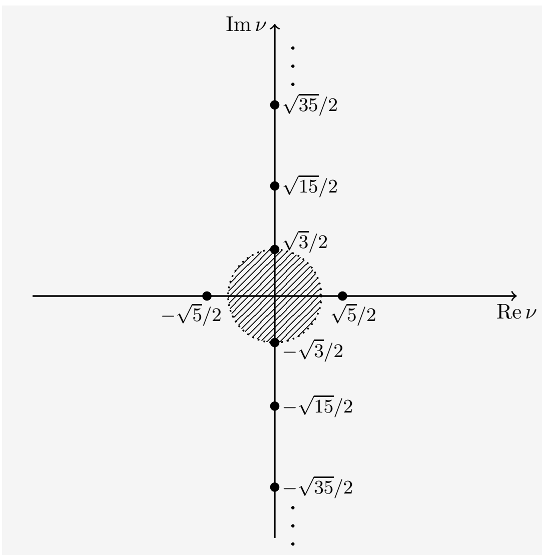
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\right] U\,(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$
$$U(0,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_0(x), \quad U(\pi,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(\pi,x) = \varphi_1(x), \;\; x \in \mathbb{R}. \tag{3.16}$$

∇ Задача (3.16) — це задача (2.1), (2.2), у якій $a\,(\nu) = 0$, $b\,(\nu) = -\nu^2 + \frac{1}{4}$, $A_1\,(\nu) = A_2\,(\nu) = 1$, $B_1\,(\nu) = B_2\,(\nu) = 1$.

Характеристичний визначник задачі (3.16) та множина M є наступними:

$$\Delta\,(\nu) = \frac{\sinh\left[\pi\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}\right]}{\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}}\left(\frac{5}{4} - \nu^2\right), \quad M = \left\{\nu_{k\pm},\, k \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \left\{\nu_{0+},\, \nu_{0-}\right\},$$

де $\nu_{k\pm} = \pm i\frac{\sqrt{4k^2-1}}{2}$, $\nu_{0\pm} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\max\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} |\,\nu_{k\pm}\,| \; = \; |\,\nu_{1\pm}\,| \; = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Якщо $\varphi_0, \varphi_1 \in A_{1,\sqrt{3}/2}$, то розв'язок задачі (3.16) згідно з теоремою 3.3 можна знайти за формулою (3.4), в якій

$$\widetilde{T}_0\,(t,\nu) = \frac{1}{\Delta(\nu)}\left\{\frac{\sinh\left[(\pi - t)\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}\right]}{\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}} + \cosh\left[(\pi - t)\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}\right]\right\},$$

$$\widetilde{T}_1(t,\nu)=\frac{1}{\Delta(\nu)}\left\{\frac{\sinh\left[t\sqrt{\nu^2-\frac{1}{4}}\right]}{\sqrt{\nu^2-\frac{1}{4}}}-\cosh\left[t\sqrt{\nu^2-\frac{1}{4}}\right]\right\}.$$

Зокрема, якщо $\varphi_0(x)=0$, $\varphi_1(x)=e^{-x/2}$, то $\varphi_0,\varphi_1\in A_{1,\sqrt{3}/2}$ і за формулою (3.4) знаходимо

$$U(t,x)=\frac{t-1}{\pi}e^{-x/2}.$$

У класі цілих функцій $\mathbb{A}_{1,\sqrt{3}/2}$ знайдений розв'язок є єдиним. $\triangle$

Зауважимо, що побудові поліномних та квазіполіномних розв'язків диференціальних рівнянь із частинними похідними та крайових задач для них присвячені численні дослідження (див. [17–19] та бібліографію в них).

4. Про побудову часткових розв'язків двоточкової за часом задачі

Розглянемо випадок, коли в умовах (2.2) $\varphi_0,\varphi_1\in K_M$, де M — множина (3.12), що є непорожньою і не збігається з $\mathbb{C}^s$. У цьому разі умови існування і єдиності розв'язку задачі (2.1), (2.2), сформульовані у теоремі 3.2, не виконуються. Виявляється все ж, що розв'язок задачі (2.1), (2.2) існує, але не є єдиним у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},M}$, тобто задача має нетривіальне ядро.

Якщо $\varphi_0,\varphi_1\in K_M$, то з використанням елементів ядра задачі можна вказати нові формули, відмінні від (3.4), за допомогою яких будуть знаходитися часткові розв'язки задачі. Покажемо це на прикладі.

Приклад 4.1. Розглянемо двоточкову задачу (3.15), у якій

$$\varphi_0(x)=1,\ \ \varphi_1(x)=e^{x_1+2x_2}.$$

∇ Оскільки $\varphi_0,\varphi_1\in K_M$, де $M=\left\{\nu\in\mathbb{C}^3\colon\ \nu_3=0\right\}$, то формула (3.4), очевидно, є непридатною. Цю формулу будемо "підправляти" розв'язками задачі (3.15) з відповідними однорідними двоточковими умовами. Неважко безпосередньо переконатися, що функції вигляду

$$\Phi_1(t,x,\nu)=c_1(\nu)(1-t)e^{\nu_1\nu_2t+\nu_1x_1+\nu_2x_2},$$

$$\Phi_2(t,x,\nu)=c_2(\nu)(1-t)e^{\nu_1\nu_2(t-1)+\nu_1x_1+\nu_2x_2},$$

де $c_1(\nu),c_2(\nu)$ — довільні функції вектор-параметра $\nu\in\mathbb{C}^3$, є розв'язками такої однорідної задачі. За рахунок таких елементів ядра задачі можна запропонувати таку формулу для знаходження розв'язку задачі (3.15) у випадку $\varphi_0, \varphi_1 \in K_M$:

$$U(t,x) = (1-t)\,\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu_1\nu_2 t+\nu_1 x_1+\nu_2 x_2}\frac{e^{-\nu_3 t+\nu_3 x_3}-1}{\nu_3}\right\}\Bigg|_{\nu=O}$$

$$+\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$$

$$\times\left\{e^{\nu_1\nu_2(t-1)+\nu_1 x_1+\nu_2 x_2}\frac{e^{-\nu_3(t-1)+\nu_3 x_3}\left[(\nu_3+1)t-1\right]-(t-1)}{\nu_3}\right\}\Bigg|_{\nu=O}.$$

Зокрема, для $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = e^{x_1+2x_2}$ знаходимо

$$U(t,x) = (1-t)\left\{e^{\nu_1\nu_2 t+\nu_1 x_1+\nu_2 x_2}\frac{e^{-\nu_3 t+\nu_3 x_3}-1}{\nu_3}\right\}\Bigg|_{\nu=O}$$

$$+\left\{e^{\nu_1\nu_2(t-1)+\nu_1 x_1+\nu_2 x_2}\frac{e^{-\nu_3(t-1)+\nu_3 x_3}\left[(\nu_3+1)t-1\right]-(t-1)}{\nu_3}\right\}\Bigg|_{\substack{\nu_1=1,\\ \nu_2=2,\nu_3=0}}$$

$$= (1-t)\lim_{\nu_3\to 0}\frac{e^{-\nu_3 t+\nu_3 x_3}-1}{\nu_3}$$

$$+e^{2(t-1)+x_1+2x_2}\lim_{\nu_3\to 0}\frac{e^{-\nu_3(t-1)+\nu_3 x_3}\left[(\nu_3+1)t-1\right]-(t-1)}{\nu_3}$$

$$= (1-t)(x_3-t) + e^{2(t-1)+x_1+2x_2}\Big\{t+(t-1)(x_3-t+1)\Big\}.$$

Зауважимо, що знайдено частковий розв'язок задачі, оскільки у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},M}$ існують нетривіальні елементи ядра задачі, наприклад, вигляду $U(t,x) = A(1-t)$, де $A \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, тобто розв'язками задачі (3.15) у класі $K_{\mathbb{C},M}$ також є однопараметрична множина функцій

$$U(t,x) = (1-t)(A+x_3-t) + e^{2(t-1)+x_1+2x_2}\Big\{t+(t-1)(x_3-t+1)\Big\},$$

де $A \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. △

Висновки

Виділено класи цілих функцій як класи існування та єдиності розв'язку задачі, а також запропоновано диференціально-символьний метод побудови розв'язку. У класах існування неєдиного розв'язку задачі запропоновано формули для знаходження часткового розв'язку задачі. Подано приклади застосування методу.

Література

[1] М. О. Перестюк, В. В. Маринець, *Теорія рівнянь математичної фізики*, К., Либідь, 2014.

[2] Б. Й. Пташник, *Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами* // ДАН УРСР, (1966), No. 10, 1254–1257.

[3] З. М. Нитребич, С. М. Репетило, Б. Й. Пташник, *Задача Діріхле-Неймана для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами у смузі* // Науковий вісник Ужгородського університету, Сер. Математика і інформатика, Випуск 25, (2014), No. 1, 94–105.

[4] Б. И. Пташник, *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными*, К., Наук. думка, 1984.

[5] Б. Й. Пташник, І. Я. Кміть, В. С. Ільків, В. М. Поліщук, *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними*, К., Наук. думка, 2002.

[6] В. М. Борок, *Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое* // ДАН СССР, **183** (1968), No. 5, 995–998.

[7] Z. M. Nitrebich, *A boundary-value problem in an unbounded strip* // J. Math. Sci, **79** (1996), No. 6, 1388–1392.

[8] M. Picone, *Sui valori eccezionali di un parametro do cui dipend un equazione differentiale lineare ordinaria del secondo ordine*, Pisa, 1909.

[9] Я. Д. Тамаркин, *О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*, Пг., 1917.

[10] Ch. J. Vallee-Poussin, *Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n* // Journ. Math. de pura et appl., **9** (1929), No. 8, 125–144.

[11] З. М. Нитребич, О. М. Маланчук, *Однорідна задача з локальними крайовими умовами на границі смуги для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом* // Науковий вісник Ужгородського університету, Сер. Математика і інформатика, Вип. 27 (2015), No. 2, 98–108.

[12] А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников, *Дифференциальные уравнения*, М., Наука, 1980.

[13] А. Ф. Леонтьев, *Обобщение рядов экспонент*, М., Наука, 1981.

[14] П. І. Каленюк, З. М. Нитребич, *Про дію диференціального виразу нескінченного порядку у класах цілих функцій багатьох комплексних змінних* // Доп. НАН України, (2007), No. 6, 11–16.

[15] П. І. Каленюк, З. М. Нитребич, *Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод*, Львів, Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2002.

[16] P. I. Kalenyuk, Z. M. Nytrebych, *On an operational method of solving initial-value problems for partial differential equations induced by generalized separation of variables* // J. Math. Sci., **97** (1999), No. 1, 3879–3887.

[17] Б. А. Бондаренко, *Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных,* Ташкент: ФАН, 1987.

[18] G. N. Hile, A. Stanoyevitch, *Heat polynomial analogous for equations with higher order time derivatives* // J. Math. Anal. Appl., **295** (2004), 595–610.

[19] P. Pedersen, *A basis for polynomial solutions for systems of linear constant coefficient PDE's* // Adv. Math., **117** (1996), 157–163.

Відомості про авторів

Зіновій Миколайович Нитребич

Національний університет
"Львівська політехніка",
Львів, Україна
E-Mail: `znytrebych@gmail.com`

Оксана Михайлівна Маланчук

Львівський національний
медичний університет ім. Д. Галицького,
Львів, Україна
E-Mail: `Oksana.Malan@gmail.com`