УДК 519.21

Ю.В. ЖЕРНОВЫЙ

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ДВУКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЭРЛАНГОВСКИМ ВРЕМЕНЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Аннотация. Предложен метод исследования систем обслуживания $M/E_s/2/m$, $M/E_s/2/\infty$, в том числе систем с применением случайного отбрасывания заявок. Получены рекуррентные соотношения для вычисления стационарного распределения числа заявок в системе и стационарных характеристик. Построенные алгоритмы проверены на имитационных моделях, созданных с помощью инструментальных средств GPSS World.

Ключевые слова: двуканальная система обслуживания, эрланговское время обслуживания, случайное отбрасывание заявок, метод фиктивных фаз, рекуррентные соотношения, стационарные характеристики.

ВВЕДЕНИЕ

Для исследования систем обслуживания с эрланговскими распределениями, в частности системы $M/E_s/n/\infty$, применяется метод фиктивных фаз, разработанный А.К. Эрлангом [1]. Для эрланговского распределения порядка s времени обслуживания предполагается, что каждая заявка последовательно проходит s фаз обслуживания, длительности которых распределены по показательным законам с параметрами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$.

Учет фаз требует фиксации соответствующих состояний и приводит к увеличению громоздкости описания системы обслуживания с распределениями фазового типа. Непосредственное решение системы уравнений для стационарных вероятностей состояний может оказаться невозможным ввиду большой размерности матрицы коэффициентов системы. Наиболее целесообразен алгоритмический подход, предполагающий получение решения систем уравнений либо в виде рекуррентных формул, либо в виде матрично-рекуррентных соотношений и алгоритмов. Матрично-геометрический подход, предложенный в [2–4], основан на предварительном анализе решаемой системы уравнений, в результате которого она разбивается на подсистемы меньшего порядка, связанные между собой рекуррентными зависимостями. Если матрицы коэффициентов этих подсистем удается обратить, то вследствие их рекуррентной связанности можно получить рекуррентные формулы в матричном или скалярном виде для решений исходной системы.

Разработанный в [5–7] матричный рекуррентно-итерационный метод решения векторно-матричных уравнений баланса переходов между состояниями для систем обслуживания с распределениями фазового типа имеет ряд недостатков: выполнение условий сходимости итераций приводит к дополнительным требованиям, предъявляемым к матрицам переходов между состояниями, а наличие самих итераций увеличивает время счета.

Цель настоящей работы — построение рекуррентных алгоритмов для вычисления стационарного распределения числа заявок в системах обслуживания $M/E_s/2/m$, $M/E_s/2/\infty$ как стандартных, так и в системах с применением случайного отбрасывания заявок. Случайное отбрасывание заявок используется в системах обслуживания в целях предотвращения перегрузок и состоит в том, что каждая поступающая заявка может быть отброшена с определенной вероятностью, зависящей от длины очереди в момент поступления заявки, даже если буфер еще полностью не заполнен [8–12]. Предлагаемый метод основан на использовании прямых рекуррентных соотношений, следующих непосредственно из уравнений системы для стационарных вероятностей. В отличие от рекуррентно-итерационного метода он не содержит итераций, а в отличие от матрично-геометрического подхода не предполагает предварительных преобразований решаемой системы уравнений. Аналогичный подход использовался ранее в [11, 12], где разработаны рекуррентные алгоритмы для систем $M/E_2/2/m$, $M/E_2/2/\infty$, $M/E_2/3/m$ и $M/E_2/3/\infty$ и таких же систем со случайным отбрасыванием заявок.

СИСТЕМА $M/E_s/2/m$ СО СЛУЧАЙНЫМ ОТБРАСЫВАНИЕМ ЗАЯВОК

Рассмотрим систему $M/E_s/2/m$, где m — максимальное число заявок, которые одновременно могут находиться в очереди. Входящий поток заявок простейший, т.е. интервалы времени между моментами поступления соседних по времени заявок — независимые случайные величины, показательно распределенные с параметром λ. Время обслуживания каждой заявки распределено согласно обобщенному закону Эрланга порядка s, т.е. представляет собой сумму s независимых случайных величин, показательно распределенных с параметрами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$.

Введем следующие обозначения для состояний системы: s_0 — в системе нету заявок; $s_{k(ij)}$ — в системе имеется k заявок ($1 \le k \le m+2$), две обслуживаемые заявки пребывают на i-й и j-й фазах обслуживания соответственно ($1 \le i \le s$, $i \le j \le s$). Состояния $s_{1(0j)}$ ($1 \le j \le s$) соответствуют одному работающему каналу j-й фазы обслуживания. Пусть p_0 и $p_{k(ij)}$ — стационарные вероятности пребывания системы в состояниях s_0 и $s_{k(ij)}$ соответственно.

Предположим, что в целях предотвращения перегрузок в системе обслуживания осуществляется случайное прореживание входящего потока заявок в зависимости от длины очереди. Пусть $f_\lambda(k)$ — зависимость интенсивности потока заявок, полученного после прореживания, от числа заявок в системе k. Считаем, что интенсивность остается неизменной для каждого из состояний $s_{k(ij)}$ при фиксированном значении k, т.е. $f_\lambda(k) = \begin{cases} \lambda, & k=1,2; \\ \lambda_k, & 3 \le k \le m+1. \end{cases}$

Прореживание входящего потока заявок может осуществляться путем случайного отбрасывания заявок согласно правилу: если в момент поступления заявки число заявок в системе обслуживания равно $k \in \{2,3,\dots,m+2\}$ (рассматриваемая не учитывается), то заявка принимается на обслуживание с вероятностью β_k ($0 < \beta_k \le 1$, $\beta_{m+2} = 0$) и получает отказ (отбрасывается) с вероятностью $1-\beta_k$. Иногда рассматривают частный случай этой стратегии, фиксируя пороговое значение h ($4 \le h \le m$) и предполагая, что $\beta_k = 1$ при $3 \le k \le h-1$ и $\beta_k = \beta$ ($0 < \beta < 1$) для $h \le k \le m+1$. При выполнении условия $0 < \beta_k < 1$, где k — число заявок в системе в момент поступления заявки, интенсивность простейшего потока заявок, принимаемых на обслуживание, составляет $\lambda_k = \lambda\beta_k$.

Считая, что $p_{1(0j)} = p_{1(1j)}$ ($1 \le j \le s$), для определения стационарных вероятностей системы $M/E_s/2/m$ со случайным отбрасыванием заявок получаем систему уравнений:

$$-\lambda p_0 + \mu_s p_{1(0s)} = 0;$$

$$-(\lambda + \mu_1) p_{1(01)} + \lambda p_0 + \mu_s p_{2(1s)} = 0;$$

$$-(\lambda + \mu_j) p_{1(0j)} + \mu_s p_{2(js)} + \mu_{j-1} p_{1(0,j-1)} = 0, \ 2 \le j \le s-1;$$

$$-(\lambda + \mu_s) p_{1(0s)} + 2\mu_s p_{2(ss)} + \mu_{s-1} p_{1(0,s-1)} = 0;$$

$$-(f_\lambda(k) + 2\mu_1) p_{k(11)} + f_\lambda(k-1) p_{k-1(11)} + \mu_s p_{k+1(1s)} = 0, \ 2 \le k \le m+1;$$

$$-2\mu_1 p_{m+2(11)} + f_\lambda(m+1) p_{m+1(11)} = 0;$$

$$-(f_\lambda(k) + \mu_1 + \mu_2) p_{k(12)} + f_\lambda(k-1) p_{k-1(12)} + \mu_s p_{k+1(2s)} +$$
$$+2\mu_1 p_{k(11)} = 0, \ 2 \le k \le m+1;$$

$$-(\mu_1 + \mu_2) p_{m+2(12)} + f_\lambda(m+1) p_{m+1(12)} + 2\mu_1 p_{m+2(11)} = 0;$$

$$-(f_\lambda(k) + \mu_1 + \mu_j) p_{k(1j)} + f_\lambda(k-1) p_{k-1(1j)} + \mu_s p_{k+1(js)} +$$

$$+\mu_{j-1}p_{k(1,j-1)}=0,\ 2\le k\le m+1,\ 3\le j\le s-1;$$
$$-(\mu_1+\mu_j)p_{m+2(1j)}+f_\lambda(m+1)p_{m+1(1j)}+\mu_{j-1}p_{m+2(1,j-1)}=0,\ 3\le j\le s;$$
$$-(f_\lambda(k)+\mu_1+\mu_s)p_{k(1s)}+f_\lambda(k-1)p_{k-1(1s)}+2\mu_s p_{k+1(ss)}+$$
$$+\mu_{s-1}p_{k(1,s-1)}=0,\ 2\le k\le m+1;$$
$$-(\mu_1+\mu_s)p_{m+2(1s)}+f_\lambda(m+1)p_{m+1(1s)}+\mu_{s-1}p_{m+2(1,s-1)}=0;$$
$$-(\lambda+2\mu_i)p_{2(ii)}+\mu_{i-1}p_{2(i-1,i)}=0,\ 2\le i\le s;$$
$$-(\lambda+\mu_i+\mu_{i+1})p_{2(i,i+1)}+2\mu_i p_{2(ii)}+\mu_{i-1}p_{2(i-1,i+1)}=0,\ 2\le i\le s-1;$$
$$-(\lambda+\mu_i+\mu_j)p_{2(ij)}+\mu_{i-1}p_{2(i-1,j)}+\mu_{j-1}p_{2(i,j-1)}=0,\ 2\le i\le s-2,\ i+2\le j\le s;$$
$$-(f_\lambda(k)+2\mu_i)p_{k(ii)}+f_\lambda(k-1)p_{k-1(ii)}+\mu_{i-1}p_{k(i-1,i)}=0,\ 3\le k\le m+1,\ 2\le i\le s;$$
$$-2\mu_i p_{m+2(ii)}+f_\lambda(m+1)p_{m+1(ii)}+\mu_{i-1}p_{m+2(i-1,i)}=0,\ 2\le i\le s;$$
$$-(f_\lambda(k)+\mu_i+\mu_{i+1})p_{k(i,i+1)}+f_\lambda(k-1)p_{k-1(i,i+1)}+2\mu_i p_{k(ii)}+$$
$$+\mu_{i-1}p_{k(i-1,i+1)}=0,\ 3\le k\le m+1,\ 2\le i\le s-1;$$
$$-(\mu_i+\mu_{i+1})p_{m+2(i,i+1)}+f_\lambda(m+1)p_{m+1(i,i+1)}+2\mu_i p_{m+2(ii)}+$$
$$+\mu_{i-1}p_{m+2(i-1,i+1)}=0,\ 2\le i\le s-1;$$
$$-(f_\lambda(k)+\mu_i+\mu_j)p_{k(ij)}+f_\lambda(k-1)p_{k-1(ij)}+\mu_{i-1}p_{k(i-1,j)}+$$
$$+\mu_{j-1}p_{k(i,j-1)}=0,\ 3\le k\le m+1,\ 2\le i\le s-2,\ i+2\le j\le s;$$
$$-(\mu_i+\mu_j)p_{m+2(ij)}+f_\lambda(m+1)p_{m+1(ij)}+\mu_{i-1}p_{m+2(i-1,j)}+$$
$$+\mu_{j-1}p_{m+2(i,j-1)}=0,\ 2\le i\le s-2,\ i+2\le j\le s; \tag{1}$$

$$p_0+\sum_{j=1}^{s}p_{1(0j)}+\sum_{k=2}^{m+2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=i}^{s}p_{k(ij)}=1. \tag{2}$$

Вводя обозначения

$$\alpha_i=\frac{\lambda}{\mu_i},\ 1\le i\le s;\ \eta_i=\frac{\mu_i}{\mu_1},\ 1\le i\le s;$$
$$g_\alpha(k)=\begin{cases}\alpha_1, & k=1,2;\\ \alpha_{k1}, & 3\le k\le m+1;\end{cases}\quad \alpha_{k1}=\frac{\lambda_k}{\mu_1},\ 3\le k\le m+1;$$
$$\tilde p_{k(ij)}=\frac{p_{k(ij)}}{p_0},\ 1\le k\le m+2,\ 1\le i\le s,\ i\le j\le s;$$
$$\tilde p_{k(is)}=p_{ki},\ 2\le k\le m+2,\ 1\le i\le s,$$

с помощью уравнений (1) находим:

$$\tilde p_{1(0s)}=\alpha_s,\ \tilde p_{1(01)}=\frac{1}{\alpha_1+1}(\alpha_1+\eta_s p_{21}),$$
$$\tilde p_{1(0j)}=\frac{1}{\alpha_1+\eta_j}(\eta_{j-1}\tilde p_{1(0,j-1)}+\eta_s p_{2j}),\ 2\le j\le s-1;$$
$$\tilde p_{k(11)}=\frac{1}{g_\alpha(k)+2}(g_\alpha(k-1)\tilde p_{k-1(11)}+\eta_s p_{k+1,1}),\ 2\le k\le m+1;$$
$$\tilde p_{m+2(11)}=\frac{g_\alpha(m+1)}{2}\tilde p_{m+1(11)};$$

$$\widetilde{p}_{k(12)}=\frac{1}{g_\alpha(k)+\eta_2+1}(g_\alpha(k-1)\widetilde{p}_{k-1(12)}+2\widetilde{p}_{k(11)}+\eta_s p_{k+1,2}),\ 2\le k\le m+1;$$

$$\widetilde{p}_{m+2(12)}=\frac{1}{\eta_2+1}(g_\alpha(m+1)\widetilde{p}_{m+1(12)}+2\widetilde{p}_{m+2(11)});$$

$$\widetilde{p}_{k(1j)}=\frac{1}{g_\alpha(k)+\eta_j+1}(g_\alpha(k-1)\widetilde{p}_{k-1(1j)}+\eta_{j-1}\widetilde{p}_{k(1,j-1)}+$$

$$+\eta_s p_{k+1,j}),\ 2\le k\le m+1,\ 3\le j\le s-1;$$

$$\widetilde{p}_{m+2(1j)}=\frac{1}{\eta_j+1}(g_\alpha(m+1)\widetilde{p}_{m+1(1j)}+\eta_{j-1}\widetilde{p}_{m+2(1,j-1)}),\ 3\le j\le s-1;$$

$$\widetilde{p}_{2(ii)}=\frac{\eta_{i-1}}{\alpha_1+2\eta_i}\widetilde{p}_{2(i-1,i)},\ 2\le i\le s-1;$$

$$\widetilde{p}_{k(ii)}=\frac{1}{g_\alpha(k)+2\eta_i}(g_\alpha(k-1)\widetilde{p}_{k-1(ii)}+\eta_{i-1}\widetilde{p}_{k(i-1,i)}),\ 3\le k\le m+1,\ 2\le i\le s-1;$$

$$\widetilde{p}_{m+2(ii)}=\frac{1}{2\eta_i}(g_\alpha(m+1)\widetilde{p}_{m+1(ii)}+\eta_{i-1}\widetilde{p}_{m+2(i-1,i)}),\ 2\le i\le s-1;$$

$$\widetilde{p}_{2(i,i+1)}=\frac{1}{\alpha_1+\eta_i+\eta_{i+1}}(2\eta_i\widetilde{p}_{2(ii)}+\eta_{i-1}\widetilde{p}_{2(i-1,i+1)}),\ 2\le i\le s-2;$$

$$\widetilde{p}_{2(ij)}=\frac{1}{\alpha_1+\eta_i+\eta_j}(\eta_{i-1}\widetilde{p}_{2(i-1,j)}+\eta_{j-1}\widetilde{p}_{2(i,j-1)}),\ 2\le i\le s-3,\ i+2\le j\le s-1;$$

$$\widetilde{p}_{k(i,i+1)}=\frac{1}{g_\alpha(k)+\eta_i+\eta_{i+1}}(g_\alpha(k-1)\widetilde{p}_{k-1(i,i+1)}+2\eta_i\widetilde{p}_{k(ii)}+$$

$$+\eta_{i-1}\widetilde{p}_{k(i-1,i+1)}),\ 3\le k\le m+1,\ 2\le j\le s-2;$$

$$\widetilde{p}_{m+2(i,i+1)}=\frac{1}{\eta_i+\eta_{i+1}}(g_\alpha(m+1)\widetilde{p}_{m+1(i,i+1)}+2\eta_i\widetilde{p}_{m+2(ii)}+$$

$$+\eta_{i-1}\widetilde{p}_{m+2(i-1,i+1)}),\ 2\le i\le s-2;$$

$$\widetilde{p}_{k(ij)}=\frac{1}{g_\alpha(k)+\eta_i+\eta_j}(g_\alpha(k-1)\widetilde{p}_{k-1(ij)}+\eta_{i-1}\widetilde{p}_{k(i-1,j)}+$$

$$+\eta_{j-1}\widetilde{p}_{k(i,j-1)}),\ 3\le k\le m+1,\ 2\le i\le s-3,\ i+2\le j\le s-1;$$

$$\widetilde{p}_{m+2(ij)}=\frac{1}{\eta_i+\eta_j}(g_\alpha(m+1)\widetilde{p}_{m+1(ij)}+\eta_{i-1}\widetilde{p}_{m+2(i-1,j)}+$$

$$+\eta_{j-1}\widetilde{p}_{m+2(i,j-1)}),\ 2\le i\le s-3,\ i+2\le j\le s-1. \tag{3}$$

Рекуррентные соотношения (3) позволяют вычислять стационарные вероятности $\widetilde{p}_{k(ij)}$ в виде линейных функций от параметров $p_{ki}\,(2\le k\le m+2, 1\le i\le s)$ в следующей последовательности:

$$\widetilde{p}_{1(0s)};\ \widetilde{p}_{1(0j)},\ 1\le j\le s-1;\ \widetilde{p}_{k(11)},\ 2\le k\le m+2;\ \widetilde{p}_{k(12)},\ 2\le k\le m+2;$$

$$\widetilde{p}_{k(13)},\widetilde{p}_{k(14)},\ldots,\widetilde{p}_{k(1,s-1)},\ 2\le k\le m+1;\ \widetilde{p}_{m+2(1j)},\ 3\le j\le s-1;$$

$$\widetilde{p}_{k(22)},\ 2\le k\le m+2;\ \widetilde{p}_{2(2j)},\ 3\le j\le s-1;\ \widetilde{p}_{k(23)},\ 3\le k\le m+2;$$

$$\widetilde{p}_{k(24)},\widetilde{p}_{k(25)},\ldots,\widetilde{p}_{k(2,s-1)},\ 3\le k\le m+1;\ \widetilde{p}_{m+2(2j)},\ 4\le j\le s-1;$$

$$\widetilde{p}_{k(33)},\ 2\le k\le m+2;\ \widetilde{p}_{2(3j)},\ 4\le j\le s-1;\ \widetilde{p}_{k(34)},\ 3\le k\le m+2;$$

$$\widetilde{p}_{k(35)},\ \widetilde{p}_{k(36)},\dots,\widetilde{p}_{k(3,s-1)},\ 3\le k\le m+1;\ \widetilde{p}_{m+2(3j)},\ 5\le j\le s-1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\widetilde{p}_{k(ii)},\ 2\le k\le m+2;\ \widetilde{p}_{2(ij)},\ i+1\le j\le s-1;\ \widetilde{p}_{k(i,i+1)},\ 3\le k\le m+2;$$

$$\widetilde{p}_{k(i,i+2)},\widetilde{p}_{k(i,i+3)},\dots,\widetilde{p}_{k(i,s-1)},\ 3\le k\le m+1;\ \widetilde{p}_{m+2(ij)},\ i+2\le j\le s-1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\widetilde{p}_{k(s-2,s-2)},\ 2\le k\le m+2;\ \widetilde{p}_{k(s-2,s-1)},\ 3\le k\le m+2;$$

$$\widetilde{p}_{k(s-1,s-1)},\ 2\le k\le m+2.$$

Для определения неизвестных параметров p_{ki} $(2\le k\le m+2,\ 1\le i\le s)$ используем систему, состоящую из $s(m+1)$ уравнений

$$\begin{gathered}
-(f_\lambda(k)+\mu_1+\mu_s)p_{k(1s)}+f_\lambda(k-1)p_{k-1(1s)}+2\mu_s p_{k+1(ss)}+\\
+\mu_{s-1}p_{k(1,s-1)}=0,\ 2\le k\le m+1;\\
-(\mu_1+\mu_s)p_{m+2(1s)}+f_\lambda(m+1)p_{m+1(1s)}+\mu_{s-1}p_{m+2(1,s-1)}=0;\\
-(\lambda+2\mu_s)p_{2(ss)}+\mu_{s-1}p_{2(s-1,s)}=0;\\
-(\lambda+\mu_{s-1}+\mu_s)p_{2(s-1,s)}+2\mu_{s-1}p_{2(s-1,s-1)}+\mu_{s-2}p_{2(s-2,s)}=0;\\
-(\lambda+\mu_i+\mu_s)p_{2(is)}+\mu_{i-1}p_{2(i-1,s)}+\mu_{s-1}p_{2(i,s-1)}=0,\ 2\le i\le s-2;\\
-(f_\lambda(k)+2\mu_s)p_{k(ss)}+f_\lambda(k-1)p_{k-1(ss)}+\mu_{s-1}p_{k(s-1,s)}=0,\ 3\le k\le m+1;\\
-2\mu_s p_{m+2(ss)}+f_\lambda(m+1)p_{m+1(ss)}+\mu_{s-1}p_{m+2(s-1,s)}=0;\\
-(f_\lambda(k)+\mu_{s-1}+\mu_s)p_{k(s-1,s)}+f_\lambda(k-1)p_{k-1(s-1,s)}+2\mu_{s-1}p_{k(s-1,s-1)}+\\
+\mu_{s-2}p_{k(s-2,s)}=0,\ 3\le k\le m+1;\\
-(\mu_{s-1}+\mu_s)p_{m+2(s-1,s)}+f_\lambda(m+1)p_{m+1(s-1,s)}+2\mu_{s-1}p_{m+2(s-1,s-1)}+\\
+\mu_{s-2}p_{m+2(s-2,s)}=0;\\
-(f_\lambda(k)+\mu_i+\mu_s)p_{k(is)}+f_\lambda(k-1)p_{k-1(is)}+\mu_{i-1}p_{k(i-1,s)}+\\
+\mu_{s-1}p_{k(i,s-1)}=0,\ 3\le k\le m+1,\ 2\le i\le s-2;\\
-(\mu_i+\mu_s)p_{m+2(is)}+f_\lambda(m+1)p_{m+1(is)}+\mu_{i-1}p_{m+2(i-1,s)}+\\
+\mu_{s-1}p_{m+2(i,s-1)}=0,\ 2\le i\le s-2.
\end{gathered}\tag{4}$$

Уравнения (4), как и уравнение

$$-(\lambda+\mu_s)p_{1(0s)}+2\mu_s p_{2(ss)}+\mu_{s-1}p_{1(0,s-1)}=0,$$

не применялись для получения соотношений (3).

Используя условие нормировки (2), определяем стационарные вероятности по формулам

$$p_0=\left(1+\sum_{j=1}^{s}\widetilde{p}_{1(0j)}+\sum_{k=2}^{m+2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=i}^{s}\widetilde{p}_{k(ij)}\right)^{-1},\ \ p_k=p_0\widetilde{p}_k,\ 1\le k\le m+2;$$

$$\widetilde{p}_1=\sum_{j=1}^{s}\widetilde{p}_{1(0j)};\ \ \widetilde{p}_k=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=i}^{s}\widetilde{p}_{k(ij)},\ 2\le k\le m+2,$$

где p_k — стационарная вероятность наличия в системе k заявок.

Стационарные характеристики системы $M/E_s/2/m$ со случайным отбрасыванием заявок, а именно среднее число заявок в системе $\mathbf{E}(C)$, среднюю длину очереди $\mathbf{E}(Q)$, вероятность обслуживания поступившей заявки (относительную пропускную способность системы) $\mathbf{P}_{\rm sv}$ и среднее время ожидания $\mathbf{E}(W)$, находим по формулам

$$\mathbf{E}(C)=\sum_{k=1}^{m+2} kp_k, \quad \mathbf{E}(Q)=\sum_{k=3}^{m+2}(k-2)p_k, \quad \mathbf{E}(W)=\frac{\mathbf{E}(Q)}{\lambda \mathbf{P}_{\text{sv}}},$$

$$\mathbf{P}_{\text{sv}}=\frac{\overline{\mu}(2(1-p_0)-p_1)}{\lambda}, \quad \overline{\mu}=\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\mu_i}\right)^{-1}. \tag{5}$$

Формула для $\mathbf{P}_{\text{sv}}$ получена как отношение среднего числа заявок, обслуженных за единицу времени, к интенсивности потока поступающих заявок.

Если случайное отбрасывание заявок не применяется, т.е. рассматривается стандартная система $M/E_s/2/m$, то в уравнениях (1), (4) и соотношениях (3), (5) необходимо положить

$$f_\lambda(k)=\lambda, \quad g_\alpha(k)=\alpha_1, \quad 1\le k\le m+1; \quad \mathbf{P}_{\text{sv}}=1-p_{m+2}.$$

СИСТЕМЫ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ДЛИНУ ОЧЕРЕДИ

Для системы $M/E_s/2/\infty$ не имеется ограничения на длину очереди, поэтому для существования стационарного распределения числа заявок должно выполняться условие $\lambda<2\overline{\mu}$. В случае применения случайного отбрасывания заявок предположим, что вероятности β_k определяются согласно правилу: $0<\beta_k\le 1$ для $3\le k\le \widetilde{h}-1$ и $\beta_k=\widetilde{\beta}<1$ при $k\ge\widetilde{h}$, где $\widetilde{h}\ge 4$. Тогда для существования стационарного распределения числа заявок должно выполняться условие $\lambda\widetilde{\beta}<2\overline{\mu}$.

Отыскание приближенных значений стационарных вероятностей $p_k\,(k\ge 0)$ для систем без ограничения на длину очереди сводится к использованию полученных ранее рекуррентных соотношений для больших значений m. Число $N=m+2$ выбираем настолько большим, чтобы выполнялось одно (или каждое) из условий, задающих точность определения стационарных вероятностей. Эти условия можно задать, например, в виде

$$\mathbf{E}(C)_{(N)}-\mathbf{E}(C)_{(N-1)}<\varepsilon_1, \quad \mathbf{E}(Q)_{(N)}-\mathbf{E}(Q)_{(N-1)}<\varepsilon_2. \tag{6}$$

Здесь $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ — положительные числа, задающие требуемую точность вычислений, $\mathbf{E}(C)_{(N)}$ и $\mathbf{E}(Q)_{(N)}$ — приближенные значения стационарных характеристик $\mathbf{E}(C)$ и $\mathbf{E}(Q)$, вычисленные с использованием стационарных вероятностей $p_{k(N)}$ $(0\le k\le N)$; $p_{k(N)}$ — приближенное значение стационарной вероятности p_k, полученное в результате усечения бесконечной системы уравнений для стационарных вероятностей.

Если случайное отбрасывание заявок не применяется, то (6) можно заменить условием

$$\frac{\lambda}{\overline{\mu}}-(2(1-p_{0(N)})-p_{1(N)})<\varepsilon, \tag{7}$$

следующим из уравнения баланса $\overline{\mu}(2(1-p_0)-p_1)=\lambda$, справедливого для систем обслуживания без потерь заявок.

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим примеры определения стационарных характеристик следующих систем обслуживания: $M/E_3/2/\infty$, $M/E_5/2/\infty$, $M_h/E_5/2/\infty$, $M/E_{10}/2/10$, $M_h/E_{10}/2/10$, индекс h указывает на системы со случайным отбрасыванием заявок (применяется стратегия с фиксированным пороговым значением h).

Зададим параметры показательных распределений: $\lambda=0.8$ для систем $M/E_3/2/\infty$ и $M/E_5/2/\infty$, $\lambda=1$ для системы $M_h/E_5/2/\infty$ и $\lambda=1.2$ для систем $M/E_{10}/2/10$, $M_h/E_{10}/2/10$. Для распределений Эрланга положим: $\mu_1=1$, $\mu_2=1.5$, $\mu_3=3$ $(M/E_3/2/\infty)$, $\mu_i=2.5$, $1\le i\le 5$ $(M/E_5/2/\infty$, $M_h/E_5/2/\infty)$; $\mu_i=5, 1\le i\le 10$ $(M/E_{10}/2/10$, $M_h/E_{10}/2/10)$. Для системы $M_h/E_{10}/2/10$ положим: $h=5$, $\beta_k=1$ при $3\le k\le h-1$ и $\beta_k=\beta=0.8$ для $h\le k\le 11$. Для системы $M_h/E_5/2/\infty$ вероятности β_k зададим согласно правилу: $\beta_k=1$ для $3\le k\le h-1$ и $\beta_k=\widetilde{\beta}=0.8$ при $k\ge h=8$.

Таблица 1

k	Значения стационарных вероятностей p_k					
	$M / E_3 / 2 / \infty$		$M / E_5 / 2 / \infty$		$M_h / E_5 / 2 / \infty$	
	Рекуррентный метод	**GPSS World**	**Рекуррентный метод**	**GPSS World**	**Рекуррентный метод**	**GPSS World**
0	0.107863	0.107851	0.105818	0.105674	0.028609	0.028676
1	0.184273	0.184498	0.188364	0.188245	0.066508	0.066483
2	0.174770	0.175434	0.188103	0.189168	0.089283	0.089211
3	0.139766	0.140118	0.150642	0.150181	0.098813	0.099310
4	0.105300	0.105057	0.110232	0.109749	0.101983	0.102443
5	0.077663	0.077834	0.077922	0.077417	0.102823	0.103105
6	0.056858	0.056728	0.054438	0.054282	0.103327	0.104044
7	0.041522	0.041007	0.037901	0.038106	0.101389	0.101116
8	0.030298	0.030199	0.026364	0.026618	0.090648	0.091187
9	0.022103	0.021731	0.018336	0.018722	0.065648	0.064937
10	0.016122	0.015969	0.012753	0.013044	0.045915	0.045056
11	0.011760	0.011806	0.008870	0.009094	0.031981	0.031495
12	0.008578	0.008498	0.006169	0.006058	0.022250	0.021863
13	0.006257	0.006086	0.004290	0.004254	0.015476	0.015600
14	0.004564	0.004230	0.002984	0.002894	0.010763	0.010645
15	0.003329	0.003083	0.002075	0.001922	0.007486	0.007425
20	0.000687	0.000792	0.000338	0.000395	0.001218	0.001178
30	0.000029	0.000053	0.000009	0.000010	0.000032	0.000033
40	$1.249 \cdot 10^{-6}$	0.000003	$2.367 \cdot 10^{-7}$	0.000000	$8.544 \cdot 10^{-7}$	0.000001

Таблица 2

k	Значения стационарных вероятностей p_k			
	$M / E_{10} / 2 / 10$		$M_h / E_{10} / 2 / 10$	
	Рекуррентный метод	**GPSS World**	**Рекуррентный метод**	**GPSS World**
0	0.001865	0.001844	0.008138	0.007916
1	0.005772	0.005594	0.025212	0.024909
2	0.010656	0.010692	0.046448	0.046143
3	0.016321	0.016115	0.071745	0.071826
4	0.023458	0.023517	0.099747	0.100429
5	0.033117	0.032945	0.122541	0.123736
6	0.046574	0.046523	0.116957	0.116592
7	0.065413	0.065241	0.109099	0.108310
8	0.092139	0.092325	0.101503	0.101355
9	0.128131	0.128026	0.093835	0.093712
10	0.188662	0.189233	0.089480	0.089595
11	0.217266	0.217091	0.072571	0.072770
12	0.170626	0.170854	0.042723	0.042706

Значения стационарных вероятностей p_k и стационарных характеристик для систем $M / E_3 / 2 / \infty$, $M / E_5 / 2 / \infty$, $M_h / E_5 / 2 / \infty$, $M / E_{10} / 2 / 10$, $M_h / E_{10} / 2 / 10$, найденные с использованием рекуррентных соотношений, полученных в настоящей работе, представлены в табл. 1–3. Здесь также приведены результаты вычислений, реализованных с помощью имитационных моделей перечисленных сис-

Т а б л и ц а 3

Система	Метод	Значения стационарных характеристик			
		$\mathbf{E}(C)$	$\mathbf{E}(Q)$	$\mathbf{E}(W)$	$\mathbf{P}_{sv}$
$M / E_3 / 2 / \infty$	Рекуррентный	3.592	1.992	2.490	1.000
	GPSS World	3.595	1.995	2.493	1.000
$M / E_5 / 2 / \infty$	Рекуррентный	3.329	1.729	2.162	1.000
	GPSS World	3.330	1.729	2.161	1.000
$M_h / E_5 / 2 / \infty$	Рекуррентный	5.964	4.088	4.357	0.938
	GPSS World	5.957	4.081	4.351	0.939
$M / E_{10} / 2 / 10$	Рекуррентный	9.287	7.297	7.331	0.829
	GPSS World	9.291	7.301	7.335	0.829
$M_h / E_{10} / 2 / 10$	Рекуррентный	6.673	4.714	4.814	0.816
	GPSS World	6.674	4.715	4.813	0.816

тем обслуживания для значения времени моделирования $t = 10^6$. Имитационные модели построены с применением инструментальных средств GPSS World [13].

При вычислении приближенных значений стационарных вероятностей p_k значение N выбиралось настолько большим, чтобы для систем $M / E_3 / 2 / \infty$ и $M / E_5 / 2 / \infty$ выполнялось условие (7) при $\varepsilon = 10^{-7}$, а для системы $M_h / E_5 / 2 / \infty$ — условия (6) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}$. Полученные минимальные значения N для этих систем соответственно равны 49, 43 и 51.

Анализируя результаты, представленные в табл. 3, видим, что управление интенсивностью входящего потока путем случайного отбрасывания заявок позволяет значительно уменьшить среднюю длину очереди при незначительном снижении пропускной способности системы. Так, средняя длина очереди в системе $M_h / E_{10} / 2 / 10$ на 35.4% меньше, чем в системе $M / E_{10} / 2 / 10$, а снижение относительной пропускной способности составляет всего 1.6%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе с помощью метода фиктивных фаз построены рекуррентные алгоритмы для вычисления стационарного распределения числа заявок в системах типа $M / E_s / 2 / m$ с эрланговским распределением времени обслуживания произвольного порядка $s \geq 2$, включая случаи $m = \infty$ и систем со случайным отбрасыванием заявок. Предлагаемый рекуррентный метод не содержит итераций и подготовительных преобразований, что позволяет сократить объем вычислений по сравнению с известными методами. Использование полученных рекуррентных соотношений дает возможность сократить число решаемых уравнений для стационарных вероятностей с $(s+1)(2+s(m+1))/2$ до $s(m+1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brockmeyer E., Halstrom H.L., Jensen A. The life and works of A.K. Erlang. Copenhagen: Danish Academy of Technical Sciences, 1948. 275 p.
2. Neuts M.F. Matrix-geometric solutions in stochastic models. Baltimore: The John’s Hopkins University Press, 1981. 390 p.
3. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. Москва: РУДН, 1995. 529 с.
4. Бочаров П.П., Литвин В.Г. Методы анализа и расчета систем массового обслуживания с распределениями фазового типа. *Автоматика и телемеханика*. 1986. № 5. С. 5–23.
5. Takahashi Y., Takami Y. A numerical method for the steady-state probabilities of a $GI / G / c$ queueing system in a general class. *J. Oper. Res. Soc. Japan*. 1976. Vol. 19, N 2. P. 147–157.
6. Рыжиков Ю.И. Рекуррентный расчет многоканальных систем обслуживания с неограниченной очередью. *Автоматика и телемеханика*. 1985. № 6. С. 88–93.

7. Рыжиков Ю.И. Алгоритм расчета многоканальной системы с эрланговским обслуживанием. *Автоматика и телемеханика*. 1980. № 5. С. 30–37.
8. Chydziński A. Nowe modele kolejkowe dla wezlow sieci pakietowych. Gliwice: Pracownia Komputerowa Jacka Skalmierskiego, 2013. 286 s.
9. Tikhonenko O., Kempa W.M. Queue-size distribution in M/G/1-type system with bounded capacity and packet dropping. *Communications in Computer and Information Science*. 2013. Vol. 356. P. 177–186.
10. Zhernovyi Yu., Kopytko B., Zhernovyi K. On characteristics of the $M^{\theta}/G/1/m$ and $M^{\theta}/G/1$ queues with queue-size based packet dropping. *J. of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 2014. Vol. 13, N 4. P. 163–175.
11. Жерновый К.Ю. Определение стационарных характеристик двухканальных систем с эрланговским распределением времени обслуживания. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 1. С. 108–121.
12. Жерновый Ю.В., Жерновый К.Ю. Определение стационарных характеристик трехканальных систем с эрланговским распределением времени обслуживания. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 2. С. 134–145.
13. Zhernovyi Yu. Creating models of queueing systems using GPSS World: Programs, detailed explanations and analysis of results. Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. 220 p.

Надійшла до редакції 30.01.2017

Ю.В. Жерновий

РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ ДВОКАНАЛЬНИХ СИСТЕМ С ЕРЛАНГІВСЬКИМ ЧАСОМ ОБСЛУГОВУВАННЯ.

Анотація. Запропоновано метод дослідження систем обслуговування $M/E_s/2/m$, $M/E_s/2/\infty$, в тому числі систем із застосуванням випадкового відкидання замовлень. Отримано рекурентні співвідношення для обчислення стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі та стаціонарних характеристик. Побудовані алгоритми перевірено на імітаційних моделях, створених за допомогою інструментальних засобів GPSS World.

Ключові слова: двоканальна система обслуговування, ерлангівський час обслуговування, випадкове відкидання замовлень, метод фіктивних фаз, рекурентні співвідношення, стаціонарні характеристики.

Yu.V. Zhernovyi

RECURRENCE RELATIONS FOR TWO-CHANNEL QUEUING SYSTEMS WITH ERLANGIAN SERVICE TIMES

Abstract. We propose a method of studying $M/E_s/2/m$, $M/E_s/2/\infty$ queueing systems including the case of random dropping of customers. Recurrence relations are obtained for computing the stationary distribution of the number of customers in a system and its steady-state characteristics. The developed algorithms are tested on examples using simulation models constructed with the help of the GPSS World tools.

Keywords: two-channel queueing systems, Erlangian service times, random dropping of customers, fictitious phase method, recurrence relations, steady-state characteristics.

Жерновый Юрий Васильевич,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Львовского национального университета имени Ивана Франко, e-mail: yu.zhernovyi@lnu.edu.ua.