УДК 539.3

И.Т. СЕЛЕЗОВ

РАЗВИТИЕ И ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА КОШИ–ПУАССОНА В ЭЛАСТОДИНАМИКЕ СЛОЯ И УРАВНЕНИЕ ТИМОШЕНКО

Аннотация. Рассмотрено обобщение метода Коши–Пуассона на n-мерное евклидово пространство и его приложение к построению гиперболических аппроксимаций высокого порядка. В евклидовом пространстве введены ограничения на производные. Рассмотрено гиперболическое вырождение по параметрам и приведена его реализация в виде необходимых и достаточных условий. В качестве частного случая четырехмерного евклидова пространства с сохранением операторов до шестого порядка получено обобщенное гиперболическое уравнение поперечных колебаний пластин с коэффициентами, зависящими только от числа Пуассона. Это уравнение включает как частные случаи все известные уравнения Бернулли–Эйлера, Кирхгофа, Релея, Тимошенко. Отмечено нетривиальное построение Тимошенко уравнения изгибных колебаний балки и соответствие с теорией Коссера как развития исследований Максвелла и Эйнштейна о распространении возмущений с конечной скоростью в сплошной среде.

Ключевые слова: метод Коши–Пуассона, евклидово пространство, эластодинамика, упругий слой.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование волновых процессов в реальных кибернетических системах, а именно моделирование распространения волн в вырожденных гиперболических системах так, чтобы сохранялась конечность скорости распространения возмущений, приводит к необходимости исследования вырожденных операторов. Построение гиперболических уравнений, описывающих реальные явления распространения возмущений с конечной скоростью, является важной проблемой. Такое моделирование впервые исследовал Максвелл [1]. Проанализировав процесс моделирования электромагнитного поля, Максвелл в отличие от традиционной модели Больцмана [2] показал конечность скорости распространения возмущений в газе. Построение гиперболических моделей как развитие исследований Максвелла реализовал Энштейн [3] и при исследовании гравитационных волн развил Вебер [4]. В 2017 г. Нобелевскую премию получили ученые Берри Бэрриш, Кип Торн и Райнер Вайсс за многолетние исследования, в результате которых экспериментально определена скорость распространения гравитационных волн. Отметим, что многочисленные попытки обнаружения гравитационных волн предпринимались, еще начиная от Энштейна.

В дальнейшем было много обобщений при построении моделей, описывающих распространение тепла, диффузии и др. [5]. Отметим также исследование, касающееся инъекции медицинского препарата в ткань, где представлено новое обобщение диффузионного уравнения в гиперболическое [6].

С математической точки зрения, по существу, параболический оператор второго порядка, предсказавший распространение возмущений с бесконечной скоростью, обобщался в гиперболический оператор также второго порядка, однако описывающий распространение возмущений с конечной скоростью.

В работах [7, 8] предложен метод решения задачи эластодинамики для слоя разложением по малой толщинной координате. Это понижает размерность задачи на единицу, т.е. сводит трехмерную задачу к двухмерной. На n-мерное евклидово пространство метод обобщен в [9]. Представленное ранее исследование в n-мерном евклидовом пространствеве требует введения дополнительных ограничений при вырождении по малым параметрам.

В настоящей статье представлено обобщение метода Коши–Пуассона на n-мерное евклидово пространство R^n и введено ограничение на производные. Рассмотрено гиперболическое вырождение и построение гиперболических аппроксимаций более высокого порядка. В частном случае при $n = 4$ приведено построение волновых гиперболических уравнений для упругого слоя. Эта аппроксимация более высокого порядка в отличие от предыдущих исследований, входящих в нее как частные случаи. Представлено уравнение Тимошенко изгибных колебаний балки как нетривиальное обобщение классической теории сплошных сред.

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА КОШИ–ПУАССОНА НА *n*-МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО R^n

В евклидовом пространстве R^n с координатами x^q, $q = \overline{1, n}$, рассматривается математическая модель, представленная конечной системой дифференциальных уравнений в частных производных, для которой ставится краевая задача в области $\Omega \times [0, X^m]$, $X^m > 0$, ограниченной гиперповерхностями $x^s = \pm h^s$, $h^s > 0$ (индекс s фиксирован): $\Omega = \{x \in R^n : -\infty < (x^1, x^2, \ldots, x^{s-1}, x^{s+1}, \ldots, x^{n-1}) < \infty,$ $x^n \geq 0,\ -h^s \leq x^s \leq h^s\}$.

Полагаем, что гиперповерхности $x^s = \pm h^s$ удалены от срединной гиперповерхности $x^s = 0$ и рассматривается разложение относительно $x^s = 0$. Описан случай, когда на гиперповерхностях $x^s = \pm h^s$ заданы условия.

Предполагается, что модель зависит от конечного числа ν параметров ε_r, $r = \overline{1, \nu}$. Формально такую модель можно задать как систему k дифференциальных уравнений в частных производных p-го порядка с k неизвестными u_i $(i = \overline{1, k})$ и n аргументами [10]

$$F_i(x^1, \ldots, x^n; u_1, \ldots, u_k; u_{1,1}, \ldots, u_{k,n}; \ldots u_{1,\underbrace{1\ldots1}_{P\text{ раз}}}, \ldots, u_{k,\underbrace{n\ldots n}_{P\text{ раз}}}; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu) =$$

$$= P_i(x^1, \ldots, x^n) \text{ в области } \Omega. \tag{1}$$

Задается система граничных условий на гиперповерхностях $x^s = -h^s, x^s = h^s$

$$f_j(x^1, \ldots, x^n; u_1, \ldots, u_k; u_{1,1}, \ldots, u_{k,\underbrace{n\ldots n}_{P\text{ раз}}}; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu)\big|_{x^s = \pm h^s} = Q_j^{\pm},\ \ j = \overline{1, (k \cdot p)}. \tag{2}$$

В (1), (2) индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей координате, в общем случае $p \neq n$, F_l зависит от всех возможных частных производных до p-го порядка включительно, положение гиперповерхности может зависеть от u_i и их производных. Решение краевой задачи (l), (2) состоит в определении функций u_i, преобразующих уравнения (1) в тождества, и в выборе из множества этих функций таких, которые удовлетворяют условиям (2).

Предположение о малости параметров. Параметры ε_ν предполагаются малыми $\varepsilon_\nu \ll 1$. В результате можно рассматривать вырождение по параметрам $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu$ и задачу существенно упростить: уменьшение порядка системы дифференциальных уравнений, частичная декомпозиция и т.д. Эту задачу можно рассматривать как отображение дифференциального оператора в частных производных из R^n в R^{n-1}.

Отклонения гиперповерхностей $x^s = \pm h^s$ от гиперповерхности $x^s = 0$ предполагаются также малыми. Изменение функций вдоль гиперповерхности $x^s = 0$ характеризуется величиной l. Тогда $\varepsilon_0 = \dfrac{h^s}{l} \ll 1$. Величина $2h$ предполагается конечной положительной $2h = \text{finite} > 0$. Если величина l равна длине волны λ, т.е. $l = \lambda$, то в гиперболическом операторе это соответствует выходу на характеристику, определяемую главной частью оператора.

Ограничение на производные. В отличие от [9] вводится ограничение на класс дифференциальных операторов. Производные компонент, параллельных срединной поверхности гиперслоя, должны быть четными $u_{k,s}$ при $s = 2, 4, \ldots$, что сужает класс рассматриваемых задач. В случае нечетных производных $u_{k,n}$ при $k = s$ поле может проникать внутрь слоя и разложения будут непригодны.

Разложение в ряд как понижение размерности задачи. При рассмотрении задачи эластодинамики в размерном виде для слоя Коши и Пуассон предполагали малость толщины слоя по сравнению с планарным размером. При обобщении на евклидово пространство это условие отмечалось ранее как изменение искомых функций вдоль гиперповерхности, превышающее их изменение вдоль нормали.

Разложение полевых функций в степенные ряды по координате s относительно срединной гиперповерхности приводит к вырожденной задаче определения коэффициентов рядов, зависящих теперь только от $n-1$ координаты

$$u_i(t, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}(t, x^2, \ldots, x^{s-1}, x^s, \ldots, x^n)(x^s)^k.$$

Таким образом размерность задачи понижена на 1.

В этом случае разложения справедливы для любого поля, характеризуемого гладкими (бесконечно дифференцируемыми) функциями так, чтобы существовали сходящиеся разложения. При формальном построении решений можно строить разложения в степенные ряды по нормали к координатной линии, предполагая, что искомые функции из класса C^{∞}.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ И КОНЕЧНОСТЬ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим частный случай, когда дифференциальные уравнения (1) и граничные условия (2) представлены как сумма линейных и нелинейных частей с линейным оператором L более высокого порядка p, чем порядок p_1 нелинейного оператора [11]

$$a_{ilq}(x^1, \ldots, x^n; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu) \frac{\partial^q u_l}{\partial x^{1(\alpha_1)} \ldots \partial x^{n(\alpha_n)}} +$$

$$+ \hat{F}_i \left(x^1, \ldots, x^n; u_1, \ldots, u_k; \frac{\partial u_l}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial u_k}{\partial x^n}; \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^1 \partial x^2}, \ldots; \frac{\partial^{p1} u_l}{\partial x^{1(p1)}}, \ldots, \frac{\partial^{p1} u_k}{\partial x^{n(p1)}} \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu \right) = P_i \text{ в области } \Omega,\ i = \overline{1, k},\ l = \overline{1, k},$$

$$q = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,\ q = \overline{1, p},\ p_1 = \overline{1, (p-1)}, \tag{3}$$

$$\left\{ b_{ilq}(x^1, \ldots, x^n; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu) \frac{\partial^q u_l}{\partial x^{1(\alpha_1)} \ldots \partial x^{n(\alpha_n)}} + \right.$$

$$\left. + \hat{f}_i \left(x^1, \ldots, x^n; u_1, \ldots; \ldots \frac{\partial^{p2} u_k}{\partial x^{n(p2)}}; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu \right) \right\} \Bigg|_{x^s = \pm h^s} = Q_j^{\pm},$$

$$j = p \cdot k,\ q = \overline{1, (p-1)},\ p_2 = \overline{1, (p-2)},\ l = \overline{1, k}. \tag{4}$$

Систему уравнений (3), (4) при $\varepsilon_r \to 0$ будем называть вырожденной. Если гиперболическая система дифференциальных уравнений (3) при вырождении по параметрам остается гиперболической, то такое вырождение будем называть гиперболическим.

При вырождении можно получить уравнения различного типа. Возможны три случая: вырождение к уравнениям гиперболического, параболического или смешанного типа. Вопрос лишь в том, какое из них правильное. Согласно принципу гиперболического вырождения по малому параметру необходимо, чтобы исходная гиперболическая система вырождалась также в гиперболическую. Именно поэтому только предельные гиперболические системы интересны с точки зрения конечности скорости распространения возмущений и симметрии [9].

Дифференциальные уравнения и граничные условия можно записать в виде [12]

$$L_i \equiv a_{ilq} \frac{\partial^q u_l}{\partial x^{1(\alpha_1)} \ldots \partial x^{n(\alpha_n)}} + F_i = P_i \text{ в области } \Omega, \ t \geq 0,$$

$$(i, l) = \overline{1, k}, \ q = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \ q = \overline{1, p}, \tag{5}$$

$$\left\{ b_{jlq} \frac{\partial^q u_l}{\partial x^{1(\alpha_1)} \ldots \partial x^{n(\alpha_n)}} + f_j \right\}_{x^s = \pm h^s} = Q_j^{\pm}, \ j = p \cdot k, \ q = \overline{1, (p-1)}, \ l = \overline{1, k}. \tag{6}$$

Таким образом, (5) — система k уравнений p-го порядка с k неизвестными функциями, которые должны определяться как ее решения, удовлетворяющие граничным условиям (6) и начальным условиям в случае начально-краевой задачи так, чтобы гарантировалась корректная постановка задачи. Первый член в (5) — главная часть оператора, второй член F_i — часть оператора. В (6) f_j — оператор более низкого порядка, чем первый член. Подразумевается соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, а индексы перед запятой обозначают частное дифференцирование по соответствующей координате. Предполагается, что коэффициенты a_{ilq} и b_{jlq} постоянные, но они могут зависеть от малого параметра $\varepsilon_r \ll 1$.

В отличие от уравнений общего вида (1), (2) систему уравнений (5) можно классифицировать по типу дифференциальных уравнений в частных производных. Если система уравнений (5) гиперболического типа, то в случае корректно поставленной задачи Коши для (5), (6) в области Ω существуют решения в форме слабых распространяющихся разрывов (разрывы производных самого высокого порядка в дифференциальном операторе). Это соответствует реальности: в действительных физических средах или системах любое возмущение распространяется с конечной скоростью, определяемой свойствами среды или системы. Согласно математической формулировке принципа конечных скоростей решение задачи Коши с полностью определенными начальными данными конечно относительно пространственных производных при каждой фиксированной величине временной координаты [13]. Отметим, что главная часть оператора ответственна за разрешимость начально-краевой задачи по Коши–Ковалевской [14].

Необходимо получить гиперболические аппроксимации, т.е. построить отображение исходного пространства $R^n(\varepsilon_r)$ в вырожденное пространство, $R^n(\varepsilon_r) \to R^n$, удовлетворяющее условию предельной корректности — быть гиперболического типа, т.е. условию конечной скорости распространения возмущений [5, 15]. В этом случае в вырожденном пространстве вместо функций $u(x)$ появляются новые функции $\hat{u}(x)$.

В дальнейшем рассматривается случай координатного вырождения $\varepsilon_0 = 2h / l \to 0, 2h = \text{finite}$. Разложение полевых функций в степенные ряды по вырожденной координате s относительно срединной гиперповерхности приводит к вырожденной задаче определения коэффициентов рядов, зависящих только от $n-1$ координаты

$$u_i(t,x^2,\ldots,x^{n-1},x^n)=\sum_{k=1}^{\infty}u_{ik}(t,x^2,\ldots,x^{s-1},x^s,\ldots,x^n)(x^s)^k. \qquad (7)$$

Подстановка (7) в уравнения в частных производных (5) и граничные условия (6) дает рекуррентные соотношения из уравнений (5) и множество систем дифференциальных уравнений бесконечного порядка из (6) в R^{n-1}. Рекуррентные соотношения позволяют выразить все коэффициенты в возрастающих приближениях через несколько начальных.

Следующий шаг — усечение разными путями этих бесконечных систем при сохранении членов, соответствующих различным правилам. Можно из рекуррентных соотношений выразить все u_{ik} в терминах минимального конечного числа искомых функций, соответствующих числу систем дифференциальных уравнений. Подстановка этих функций в усеченные уравнения приводит к разрешающим уравнениям, что позволяет получать различные аппроксимации, т.е. упрощенные модели. Правила сохранения членов должны быть такого вида, чтобы эта система была гиперболического типа.

Необходимое условие. Гиперболичность оператора *n*-го порядка — необходимое условие существования конечной скорости распространения возмущений в *n*-м приближении.

Для построения гиперболической аппроксимации *n*-го порядка нужно сохранить в бесконечных системах все пространственно-временные дифференциальные операторы до заданного порядка *n*. Сохранение всех членов оператора до определенного порядка приводит к главной части оператора гиперболического типа.

Достаточное условие. Корректная постановка начально-краевой задачи [14] — достаточное условие существования конечности скорости распространения возмущений.

Например, сохранение операторов до четвертого порядка в *n*-мерном евклидовом пространстве приводит к гиперболической аппроксимации, соответствующей уравнению Тимошенко, но не содержащей корректирующего коэффициента типа толщинного сдвига. Сохранение операторов до шестого порядка приводит к новому более высокому приближению — обобщенному гиперболическому уравнению.

ОБОБЩЕННОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В УПРУГОМ СЛОЕ

С учетом изложенного ранее рассмотрим построение вырожденных моделей для случая R^4 — задачу эластодинамики для слоя. Сформулируем соответствующую начально-краевую задачу для упругой изотропной среды в терминах перемещений u_1, u_2, u_3, зависящих от ортогональных координат x_1, x_2, x_3 и времени t, следующим образом: найти вектор-функцию $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ как решение уравнений в $\Omega\times[0,T]$, $T>0$,

$$\nabla^2 u_k+(1+\lambda/G)\partial_k(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})+P_k=\partial_{tt}u_k,\ k=1,2,3, \qquad (8)$$

удовлетворяющую граничным условиям

$$\sigma_{33}\big|_{x_3=\xi/2}=q^+(x_1,x_2,t),\ \sigma_{33}\big|_{x_3=-\xi/2}=q^-(x_1,x_2,t),$$

$$\sigma_{3i}\big|_{x_3=\xi/2}=p_i^+(x_1,x_2,t),\ \sigma_{3i}\big|_{x_3=-\xi/2}=p_i^-(x_1,x_2,t),\ i=1,2, \qquad (9)$$

и начальным условиям

$$u_k\big|_{t=0}=0,\ \partial_t u_k\big|_{t=0}=0,\ k=1,2,3. \qquad (10)$$

Компоненты вектора перемещения представляются в виде степенных рядов по x_3

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_{i\nu}(x_1, x_2, t) x_3^{\nu}, \; i = 1, 2, 3. \qquad (11)$$

Функции $u_{i\nu}$ предполагаются дифференцируемыми столько раз, сколько требуется, все производные $u_{i\nu}$ непрерывны, а ряды (11) сходятся равномерно; массовые силы P_k в дальнейшем не учитываются; $\xi = 2h$, $\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{e}_3$ — оператор градиента, $\vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$, — базисные векторы; ∂_k и ∂_t — частные производные по координате x_k и времени t, $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ — лапласиан, $\{\cdot\}$ — символ скалярного умножения. Выражение для компонент тензора напряжений имеет вид

$$\sigma_{ik} = \lambda u_{n,n} \delta_{ik} + G(u_{i,k} + u_{k,i}).$$

Здесь $\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k \end{cases}$ — символ Кронекера, G и λ — постоянные Ламе, выражаемые через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν, $G = E/2(1+\nu)$, $\lambda = E\nu/(1+\nu)(1-2\nu)$.

Безразмерные величины вводим по формулам, принимая в качестве характерных толщину $2h$ (м), скорость сдвиговых волн c_s (м/с) и плотность ρ (кг/м^3):

$$u_k^* = \frac{1}{2h}u_k, \; (x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{2h}(x_1, x_2), \; t^* = \frac{c_s}{2h}t, \; q^* = \frac{1}{G}q, \; h^* = \frac{1}{2}, \; c_s^2 = G/\rho.$$

При исследовании распространения волн вводятся безразмерные величины $l^* = \frac{1}{2h}l$ — длина волны, $c^* = \frac{c}{c_s}$ — фазовая скорость.

Обобщенное дифференциальное уравнение относительно поперечной координаты $u_3 = w_0$ имеет вид (звездочки опускаются)

$$\left\{\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_1 \nabla^2 \nabla^2\right)_K - a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 + a_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4}\right]_{TM} - \right.$$

$$\left. - b_1 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\nabla^2 - b_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4}\nabla^2 + b_4 \frac{\partial^6}{\partial t^6}\right\}_{TMC} w_0 =$$

$$= \left\{\left[1 - d_1 \nabla^2 + d_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]_{TM} + d_3 \nabla^2 \nabla^2 - d_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 + d_5 \frac{\partial^4}{\partial t^4}\right\}_{TMC} (q^+ - q^-), \qquad (12)$$

где $w_0(x_1, t)$ — поперечное отклонение (прогиб), t — время, $(q_1 - q_2)$ — поперечная нагрузка, коэффициенты

$$a_1 = \frac{1}{6(1-\nu)}, \; a_2 = \frac{2-\nu}{6(1-\nu)}, \; a_3 = \frac{7-8\nu}{48(1-\nu)},$$

$$b_1 = \frac{1}{120(1-\nu)}, \; b_2 = \frac{4\nu^2 - 16\nu + 1}{480(1-\nu)^2}, \; b_3 = \frac{16\nu^2 - 37\nu + 19}{5760(1-\nu)^2}, \; b_4 = \frac{64\nu^2 - 104\nu + 41}{7680(1-\nu)^2},$$

$$d_1 = \frac{2-\nu}{8(1-\nu)}, \; d_2 = \frac{1}{8}, \; d_3 = \frac{\nu^2 - 4\nu + 3}{384(1-\nu)^2}, \; d_4 = \frac{4\nu^2 - 12\nu + 7}{768(1-\nu)^2}, \; d_5 = \frac{1}{384}.$$

В (12) оператор с индексом K соответствует уравнению Бернулли–Эйлера (распространен на пластины Кирхгофом), оператор с индексом TM — уравнению

Тимошенко (распространен на пластины Уфляндом и развит Миндлиным), уравнение Релея входит в оператор *TM* при $a_3 = 0$, оператор с индексом *TMC* соответствует обобщенному уравнению (построен автором настящей статьи).

Из приведенного аналитического построения следует как частный случай уравнение Тимошенко, но без введения корректирующего параметра — коэффициента сдвига.

АНАЛИЗ РАЗРЕШИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ КОШИ–ПУАССОНА

После введения безразмерных величин, представленных ранее, а также проведения громоздких и длинных вычислений найдены коэффициенты α_{ik} и b_{mn}, которые зависят только от коэффициента Пуассона ν. В дальнейшем они вычислялись при $\nu = 0.3$, характеризующем много материалов. Величины найденных коэффициентов составляют $a_1 = 0.238$, $a_2 = 0.405$, $a_3 = 0.137$, $b_1 = 0.012$, $b_2 = 0.028$, $b_3 = 0.003$, $b_4 = 0.004$.

Получены условия разрешимости шестого и четвертого гиперболических приближений при распространении поперечных (изгибных) волн в балке-полоске. Результаты расчетов представлены на рис. 1.

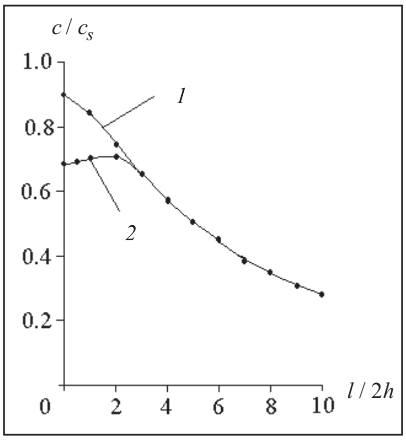

Рис. 1. Разрешимость гиперболических приближений четвертого (кривая *1*) и шестого (кривая *2*) порядков при распространении изгибных волн в балке-полоске

Разрешимость приближений исследовалась посредством подстановки в уравнение (12) решения типа бегущей волны вида $\exp[i(kx - \omega t)]$, где $k = 2\pi / l$, а $\omega = c2\pi / l$.

Показано, что приближение шестого порядка имеет один действительный корень в интервале длин волн $l \in [0, 10)$ (см. рис. 1), а при $l > 10$ имеет три действительных корня.

Приведенное построение гиперболических приближений дало возможность получить аналитические выражения для коэффициентов разложений в отличие от неопределенного корректирующего коэффициента, характеризующего толщинный сдвиг и входящего в уравнение Тимошенко.

МОДЕЛЬ ТИМОШЕНКО. НОВЫЙ ВЗГЛЯД

Рассмотрим уточненные уравнения типа Тимошенко для стержней, пластин и оболочек в соответствии с фундаментальными исследованиями Максвелла, Эйнштейна, Ландау о распространении возмущений с конечной скоростью. Максвелл после фундаментальных исследований в области электромагнетизма [1] впервые представил гиперболическое уравнение распространения волн с конечной скоростью в газах [2] вместо параболического, описывающего распространение возмущений с бесконечной скоростью.

С.П. Тимошенко [16] впервые обобщил параболическое уравнение распространения изгибных колебаний балки на гиперболическое уравнение, применив феноменологический подход так, что нормаль не остается нормалью к срединной поверхности при изгибных деформациях балки, что не учитывается моделью сплошной среды. В классических моделях Бернулли–Эйлера, Кирхгофа [15], Релея [17] нормаль остается нормалью. Эффекты Тимошенко проявляются локально при наличии резких неоднородностей, в теории волн это короткие волны. В этом случае необходимо применение более общей теории, чем классическая, например теории Коссера [18].

Никаким корректирующим коэффициентом нельзя изменить тип дифференциального оператора, можно только подбором этого коэффициента приблизить описание к предсказываемому моделью сплошной среды.

Обобщение Тимошенко аналогично тому, что имеет место при построении и других гиперболических моделей, когда учитываются эффекты более высокого порядка, выходящие за рамки классических теорий. Например, в отличие от классической теории гиперболическая модель распространения тепла [19] объясняется неравновесной термодинамикой [20], гиперболическая модель диффузии [21] учитывает столкновение частиц, а модель гиперболической турбулентности [22] — скорость распространения турбулентности. Отметим также следующие уравнения: Смолуховского [23], статистических процессов [24], седиментации [25].

Приложение теории Коссера. В классической теории сплошных сред предполагается, что на бесконечно малый элемент действуют силы коллинеарно (рис. 2, *а*).

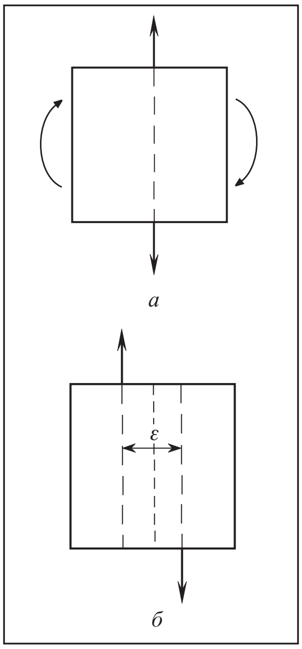

Рис. 2. Действие сил на бесконечно малый элемент: коллинеарно (*а*) и неколлинеарно (*б*)

При наличии моментного поля (см. рис. 2, *а*) его можно рассматривать как появляющееся за счет неколлинеарности сил (см. рис. 2, *б*).

Коссера [18] предполагал коллинеарность сил и вводил в рассмотрение момент θ. Однако в любом случае это можно понимать как нарушение сплошности, что соответствует уравнению Тимошенко, когда нормаль к срединной поверхности не остается нормалью после деформации.

Таким образом, введение моментных напряжений можно понимать как действие нецентральных сил, а это является нарушением сплошности, и при изгибе балки нормаль не остается нормалью к деформируемой срединной поверхности.

Такая ситуация, по существу, постулируется при выводе уравнения Тимошенко: наклон касательной к кривой изгиба представляется в виде $\partial w / \partial x = \psi + \gamma$, где ψ — изгибная деформация, γ — сдвиговая деформация. При высоких частотах или резких неоднородностях это будет проявляться.

Приведем уравнения теории Коссера. Не ограничивая общности, можно поворотом относительно вертикальной оси Ox_3 получить из (8)–(11) плоскую задачу. В соответствии с безразмерными величинами, введенными ранее и дополненными параметрами Коссера (звездочки далее опускаются)

$$\alpha^* = \frac{\alpha}{(2h)^2},\ \beta^* = \frac{\beta}{(2h)^2},\ \gamma^* = \frac{\gamma}{(2h)^2},\ \varepsilon_k^* = \frac{\varepsilon_k}{(2h)^2},\ j^* = \frac{c_s^2}{(2h)^2} j,$$

уравнения относительно вектора перемещений $\vec{u}$ и вектора поворота $\vec{\theta}$ имеют вид

$$\vec{\nabla}^2 \vec{u} + (1 + \lambda / G) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \alpha \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} + 2\alpha \vec{\nabla} \times \vec{\theta} = \partial_{tt} \vec{u},$$

$$(\beta + 2\gamma) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\theta}) - (\gamma + \varepsilon_k) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\theta} + 2\alpha \vec{\nabla} \times \vec{u} - 4\alpha \vec{\theta} = j \partial_{tt} \ddot{\vec{\theta}}.$$

Согласно теории дифференциальных операторов обобщение Тимошенко существенно нетривиально, поскольку в этом случае обобщается параболический оператор более высокого порядка (четвертого, а не второго) в отличие от всех предыдущих обобщений (диффузия, тепло и др.).

Приведем уравнения, описывающие распространение одномерных волн, следующие из (12) при повороте относительно вертикальной оси, нормальной к срединной поверхности:

— уравнение Бернулли–Эйлера, распространенное на пластины Кирхгофом [15]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{D}{\rho h}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0; \tag{13}$$

— уравнение Релея с учетом инерции вращения [17]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{D}{\rho h}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\left(\frac{I}{h}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial t^2\partial x^2}=0; \tag{14}$$

— уравнение Тимошенко с учетом сдвига [16]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{D}{\rho h}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\left(\frac{D}{k_s^2 Gh}+\frac{I}{h}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial t^2\partial x^2}+\frac{\rho I}{k_s^2 Gh}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}=0. \tag{15}$$

Уравнение (15), включающее (13) и (14), представлено в [16] и известно как уравнение Тимошенко.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведено обобщение метода Коши–Пуассона на n-мерное евклидово пространство с ограничениями на дифференциальные операторы и малость параметров вырождения. Приведены условия вырождения гиперболических аппроксимаций и конечности скорости распространения возмущений. Получено обобщенное уравнение распространения изгибных волн в слое. Отмечено уравнение Тимошенко как нетривиальное обобщение параболического оператора более высокого порядка. Из проведенных исследований следует целесообразность обобщения параболических моделей в гиперболические одного порядка. Построение более высоких гиперболических аппроксимаций не улучшает точности описания физических явлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maxwell J.C. A dynamical theory of the electromagnetic field. 1864.
2. Maxwell J.C. On the dynamical theory of gases. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond*. 1867. Vol. 157. P. 49–88.
3. Einstein A. The meaning of relativity. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1950. 150 p.
4. Вебер Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1962. 272 с.
5. Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г. Волновые гиперболические модели распространения возмущений. Киев: Наук. думка, 2015. 172 с.
6. Selezov I.T., Kryvonos Iu.G. Modeling medicine propagation in tissue: generalized statement. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 4. P. 535–542. DOI: 10.1007/ s10559-017-9955-1.
7. Cauchy A.L. Sur l'equilibre et le mouvement d'une lame solide. *Exercices Math*. 1828. Vol. 3. P. 245–326.
8. Poisson S.D. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. *Mém. Acad. Roy. Sci.* 1829. Vol. 8. P. 357–570.
9. Selezov I.T. Degenerated hyperbolic approximation of the wave theory of elastic plates. Ser. Operator Theory. Advances and Applications. Differential Operators and Related Topics. *Proc. of Mark Krein Int. Conf.*, Ukraine, Odessa, 18–22 August 1997. Basel (Switzerland): Birkhauser, 2000. Vol. 117. P. 339–354.
10. Dunford N., Schwartz J.T. Linear operators. Part II. Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space. New York; London: Interscience Publishers, 1963.
11. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. Vol. 1, 2. Interscience, New York; London, 1962.
12. Kythe P.K. Fundamental solutions for differential operators and applications. Boston: Birkhauser, 1996.
13. Калашников А.С. О понятии конечности скорости распространения возмущений. *Успехи мат. наук*. 1979. Т. 34, № 2. С. 199–200.
14. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. Москва: Мир, 1977. 504 с.
15. Kirchhoff G. Über das gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *J. Reine und Angew. Math.* 1850. Vol. 40, N 1. P. 51–58.
16. Timoshenko S.P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bar. *Phil. Mag*. 1921. Ser. 6. Vol. 41, N 245. P.744–746.

17. Rayleigh D. On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter. *Proc. London Math. Soc*. 1889. Vol. 10. P. 225.

18. Cosserat E.F. Théorie de Corps déformables. Paris: Hermann, 1909.

19. Cattaneo C. Sulla conduzione del calore. *Atti Seminario Univ. Modena*. 1948. Vol. 3. P. 3–21.

20. Luikov A.V. Application of irreversible thermodynamics methods to investigation of heat and mass transfer. *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1966. Vol. 9. P. 139–152.

21. Давыдов Б.И. Уравнение диффузии с учетом молекулярной скорости. *Докл. АН СССР*. 1935. Т. 2, № 7. С. 474–475.

22. Монин А.С. О диффузии с конечной скоростью. *Изв. АН СССР*. Сер. геогр. 1955. № 3. С. 234–248.

23. Davies R.W. The connection between the Smoluchowski equation and the Kramers–Chandrasekhar equation. *Phys. Review*. 1954. Vol. 93, N 6. P. 1169–1171.

24. Фок В.А. Решение одной задачи теории диффузии по методу конечных разностей и приложение его к диффузии света. *Труды ГОИ*. 1926. Т. 4, вып. 34. С. 1–32.

25. Selezov I. Extended models of sedimentation in coastal zone. *Vibrations in Physical Systems*. 2014. Vol. 26. P. 243–250.

Надійшла до редакції 05.09.2017

І.Т. Селезов

РОЗВИТОК ТА ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КОШІ–ПУАСОНА ДО ЕЛАСТОДИНАМІКИ ШАРУ ТА РІВНЯННЯ ТИМОШЕНКА

Анотація. Розглянуто узагальнення методу Коші–Пуасона на *n*-вимірний евклідів простір і його застосування до побудови гіперболічних апроксимацій високого порядку. В евклідовому просторі введено обмеження на похідні. Розглянуто гіперболічное виродження за параметрами і наведено його реалізацію у вигляді необхідних і достатніх умов. Як окремий випадок чотиривимірного евклідового простору зі збереженням операторів до шостого порядку отримано узагальнене гіперболічне рівняння поперпчних коливань пластин з коефіцієнтами, залежними тільки від числа Пуасона. Це рівняння включає як окремі випадки всі відомі рівняння Бернулі–Ейлера, Кірхгофа, Релея, Тимошенка. Відзначено нетривіальну побудову рівняння Тимошенка згинних коливань балки як розвиток досліджень Максвела і Ейнштейна про поширення збурень із скінченною швидкістю в суцільному середовищі та відповідність до теорії Косера.

Ключові слова: метод Коші–Пуасона, евклідів простір, еластодинаміка, пружний шар.

I.T. Selezov

DEVELOPMENT AND APPLICATION OF THE CAUCHY–POISSON METHOD TO ELASTODYNAMICS OF LAYER

Abstract. We consider a generalization of the Cauchy–Poisson method to an n-dimensional Euclidean space and its application to the construction of hyperbolic approximations. In Euclidean space, constraints on derivatives are introduced. The principle of hyperbolic degeneracy in terms of parameters is formulated and its implementation in the form of necessary and sufficient conditions is given. As a particular case of a 4-dimensional space with preserving operators up to the 6th order and dimensioning, a generalized hyperbolic equation is obtained for bending vibrations of plates with coefficients depending only on the Poisson number. As special cases, this equation includes all the well-known equations of Bernoulli–Euler, Kirchhoff, Rayleigh, and Timoshenko. As a development of Maxwell's and Einstein's research on the propagation of perturbations with finite velocity in a continuous medium, the Tymoshenko's non-trivial construction of the equation for bending vibrations of a beam is noted.

Keywords: Cauchy–Poisson method, Euclidean space, elastodynamics, elastic layer.

Селезов Игорь Тимофеевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом Института гидромеханики НАН Украины, Киев, e-mail: igor.selezov@gmail.com.