УДК 517.596

Г.М. ПЕРУН, В.К. ЯСИНСКИЙ

СТОХАСТИЧЕСКАЯ *m*-ТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛУВИНЕРОВСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Аннотация. Рассмотрена задача о существовании с вероятностью единица функции Грина стохастической *m*-точечной задачи Коши для параболического уравнения высшего порядка с возмущениями типа белого шума только с отрицательными значениями. Получены оценки в пространствах функций, норма которых содержит математическое ожидание.

Ключевые слова: *m*-точечная задача Коши, существование с вероятностью единица, формула Ито, функция Грина, условие параболичности, математическое ожидание.

ВВЕДЕНИЕ

Нелокальные многоточечные параболические сингулярные задачи для детерминированных уравнений изучены в работе [1]. Исследованию структуры и свойств фундаментального решения нелокальной *m*-точечной задачи для эволюционного уравнения с псевдобесселевым оператором, которое построено для негладкого символа в точке $\sigma = 0$, посвящена статья [2]. В работах [3, 4] даны решения краевых задач для уравнения второго порядка параболического типа с непрерывными возмущениями типа белого шума. В работе [5] рассмотрена корректная разрешимость задачи Коши для линейного стохастического дифференциально-разностного уравнения с частными производными и марковскими параметрами. Существованию с вероятностью единица матрицанта задачи с импульсным воздействием для линейного стохастического параболического уравнения высшего порядка посвящена статья [6].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На вероятностном базисе $(\Omega, F, \{F_t,\ t \ge t_0\}, P)$ рассмотрим многоточечную по t [2] стохастическую задачу Коши (МСЗК)

$$du_t(t,x,\omega) = \left[\sum_{|k|\le 2b} A_k D_x^k u(t,x,\omega)\right] dt + \left[\sum_{|k|\le b} C_k D_x^k u(t,x,\omega)\right] d^* w(t,\omega), \qquad (1)$$

$$x \in R^n,\ t > 0,\ \omega \in \Omega,\ d^* w(t,\omega) = d(-|w(t,\omega)|)$$

с начальными условиями

$$\mu u(t,x,\omega)|_{t=0} - \mu_1 u(t,x,\omega)|_{t=t_1} - \ldots - \mu_m u(t,x,\omega)|_{t=t_m} = \varphi(x,\omega) \equiv \varphi(x), \qquad (2)$$

$$u(t,x,\omega)|_{t=0} = 1;\ u(t,x,\omega)|_{t=t_i} = \varphi_i(x,\omega),\ i = 1,\ldots,m. \qquad (3)$$

Условия (2), (3) для $\{x^*, \omega^*\} \subset \{R^n, \Omega\}$ проиллюстрированы на рис. 1. Здесь $\sum_{|k|\le 2b} A_k D_x^k$, $\sum_{|k|\le b} C_k D_x^k$ — дифференциальные многочлены; $w(t,\omega)$ — стандартный скалярный винеровский процесс; $\{\mu_1,\ldots,\mu_m\} \in (0; +\infty)$, $m = \{2, 3, \ldots\}$; $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\} \in (0, T]$ — фиксированные моменты времени, $0 < t_1 < t_2 < \ldots$ $\ldots < t_m = T$; $\varphi(x)$ с вероятностью единица допускает преобразование Фурье.

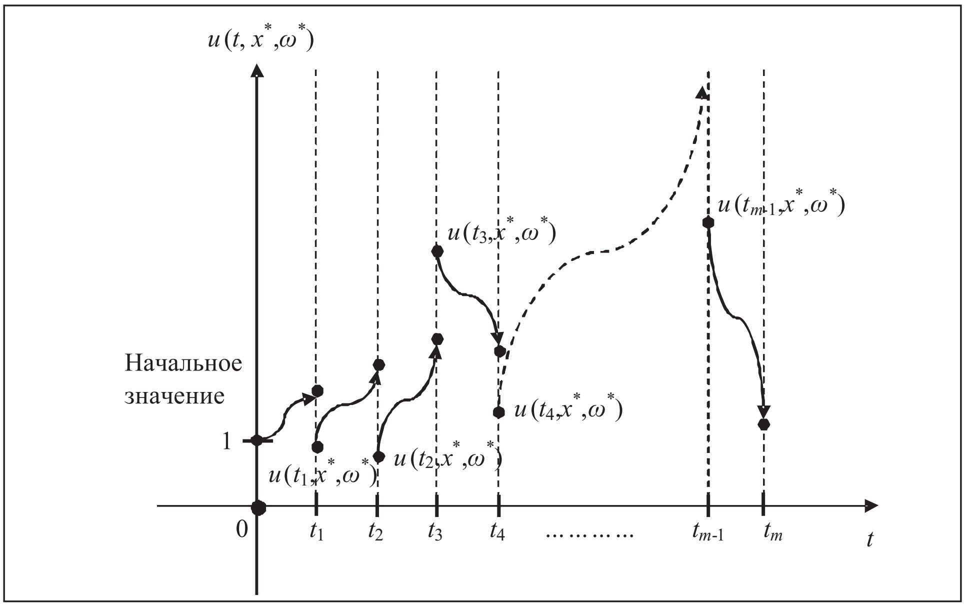

Рис. 1

Определение 1. Под «мягким» решением задачи (1)–(3) понимаем случайную функцию $u(t, x, \omega)$, согласованную с потоком σ-алгебр $\{F_t\}$ и такую, что при каждом $t \in (0, T]$ с вероятностью единица удовлетворяет уравнение

$$u(t, x, \omega) = \mu^{-1}(\varphi(x) + \mu_1 u|_{t=t_1} + \mu_2 u|_{t=t_2} + \ldots + \mu_m u|_{t=t_m}) + \\ + \int_0^t \sum_{|k| \le 2b} A_k D_x^k u(\tau, x, \omega)\, d\tau + \int_0^t \sum_{|k| \le b} C_k D_x^k u(\tau, x, \omega)\, d^* w(\tau) \tag{4}$$

при условии, что стохастический интеграл Винера–Ито существует, $w(\tau) \equiv w(\tau, \omega)$.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ ЕДИНИЦА

Изложим основной результат в виде теоремы 1.

Теорема 1. Пусть на вероятностном базисе $(\Omega, F, \{F_t,\ t \ge t_0 = 0\}, P)$ задана МСЗК (1)–(3). Пусть также выполняются следующие условия:

1) $\mathrm{Re} \sum_{|k| \le 2b} A_k (i\sigma)^k + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Im} \sum_{|k| \le b} C_k (i\sigma)^k\right)^2 \le -\delta_1 |\sigma|^{2b} + \delta_2,\ \delta_1, \delta_2 > 0,\ \sigma \in R^n$

(аналог условия параболичности для детерминированного уравнения [8]);

2) при каждом $\sigma \in R^n$, $\omega \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\sum_{s=1}^m \mu_s \mathrm{E}\{|Q(t_s, \sigma, \omega)|\} < \mu < \infty, \tag{5}$$

где $Q(t, \sigma, \omega)$ — нормальное фундаментальное решение (НФР), которое определено ниже, $\mathrm{E}\{\cdot\}$ — операция математического ожидания.

Тогда с вероятностью единица существует функция Грина $G(t, \vec{t}, x, \omega)$, $\vec{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$, с помощью которой решение задачи (1)–(3) задается выражением

$$u(t, x, \omega) = \int_{R^n} G(t, \vec{t}, x - \xi, \omega) \varphi(\xi, \omega) d\xi.$$

Замечание 1. Сложный вероятностный базис $(\Omega, F, \{F_t, t \geq t_0\}, P)$ построен относительно потока σ-алгебр $\{F_t, t \geq t_0 = 0\}$, который учитывает условие (2). Условие (3) является так называемой m-точечной задачей Коши [3, 4, 9, 10] и отслеживается во многих прикладных задачах. Построение σ-алгебры F представляет отдельную задачу теории меры [7].

Доказательство. Решение задачи (1)–(3) будем находить в виде обратного преобразования Фурье [1] некоторой функции $v(t, \sigma, \omega)$:

$$u(t, x, \omega) = F^{-1}_{\sigma \to x} v(t, \sigma, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{i\sigma x} v(t, \sigma, \omega) d\sigma, \; x \in R^n.$$

Под знаком интеграла в результате применения оператора уравнения (1) получим стохастическую задачу для обыкновенного стохастического уравнения с непрерывными возмущениями [7]

$$d_t v(t, \sigma, \omega) = \left[\sum_{|k| \leq 2b} A_k (i\sigma)^k v(t, \sigma, \omega) \right] dt + \left[\sum_{|k| \leq b} C_k (i\sigma)^k v(t, \sigma, \omega) \right] d^* w(t). \quad (6)$$

Из условия (2) вытекает, что для решения (6) выполняется соотношение

$$\mu v(t, \sigma, \omega)|_{t=0} - \mu_1 v(t, \sigma, \omega)|_{t=t_1} - \ldots - \mu_m v(t, \sigma, \omega)|_{t=t_m} = \widetilde{\varphi}(\sigma). \quad (7)$$

Как известно [7], общее решение уравнения (6) определяется по формуле Ито

$$v(t, \sigma, \omega) =$$

$$= c \exp \left\{ \left(\sum_{|k| \leq 2b} A_k (i\sigma)^k - \frac{1}{2} \left(\sum_{|k| \leq b} C_k (i\sigma)^k \right)^2 \right) t + \sum_{|k| \leq b} C_k (i\sigma)^k (-|w(t, \omega)|) \right\}, \quad c \in R^1.$$

С учетом условия (7) найдем решение задачи (6), (7), полученной в образах Фурье, а именно

$$v(t, \sigma, \omega) = \left(\mu - \sum_{s=1}^{m} \mu_s Q(t_s, \sigma, \omega) \right)^{-1} Q(t, \sigma, \omega) \widetilde{\varphi}(\sigma) \equiv Q_1(t, \vec{t}, \sigma, \omega) \widetilde{\varphi}(\sigma),$$

где

$$Q(t, \sigma, \omega) \equiv$$

$$\equiv \exp \left\{ \left(\sum_{|k| \leq 2b} A_k (i\sigma)^k - \frac{1}{2} \left(\sum_{|k| \leq b} C_k (i\sigma)^k \right)^2 \right) t + \sum_{|k| \leq b} C_k (i\sigma)^k (-|w(t, \omega)|) \right\}.$$

Замечание 2. Преобразование Фурье функции $Q_1(t, \vec{t}, \sigma, \omega)$ назовем функцией Грина задачи (1)–(3) и обозначим

$$G(t, \vec{t}, x, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{i\sigma x} Q_1(t, \vec{t}, \sigma, \omega) \, d\sigma.$$

При выполнении условия параболичности [8] и условия (5) теоремы 1 для $Q_1(t, \vec{t}, \sigma, \omega)$ имеет место неравенство

$$|Q_1(t, \vec{t}, \sigma, \omega)| \leq c(\mu) \exp \left\{ -\delta_0 |\sigma|^k t + \frac{1}{2} \left(\frac{|w(t)|}{\sqrt{t}} \right)^2 \right\}.$$

Следовательно, преобразование Фурье функции $v(t, \sigma, \omega)$ существует. Подставим функцию $v(t, \sigma, \omega)$ в формулу для преобразования Фурье [3] и используем теорему о преобразовании Фурье свертки [1]. Получим решение задачи (1)–(3), которое определяется по формуле (4). Теорема 1 доказана.

ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ГРИНА

Оценим функцию Грина для задачи (1)–(3).

Теорема 2. Для производных функции Грина задачи (1)–(3) справедливо неравенство

$$|\,\mathrm{E}\{D_x^k G(t, \vec{t}, x, \omega)\}| \le$$

$$\le \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{m} c_k \mu^{-(p+1)} \left(t + pt_s \right)^{-\frac{n+|k|}{2b}} \exp\left\{ -c_4 \left| x \left(t + pt_s \right)^{-\frac{1}{2b}} \right|^q \right\}, \; q = \frac{2b}{2b-1}. \quad (8)$$

Доказательство. При условии (5) величину $\left(\mu - \sum_{s=1}^{m} \mu_s Q(t_s, \sigma, \omega) \right)^{-1}$ можно разложить в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по степеням μ, тогда выражение для $Q_1(t, \vec{t}, \sigma, \omega)$ приобретет вид

$$Q_1(t, \vec{t}, \sigma, \omega) = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^{-(p+1)} \left(\sum_{s=1}^{m} \mu_s Q(t_s, \sigma, \omega) \right)^p Q(t, \sigma, \omega).$$

Введем обозначение для членов ряда (8):

$$\Psi_p(t, \vec{t}, \sigma, \omega) = \left(\sum_{s=1}^{m} \mu_s Q(t_s, \sigma, \omega) \right)^p \mu^{-p} Q(t, \sigma, \omega).$$

С помощью этой величины получим представление функции Грина

$$G(t, \vec{t}, x, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{i\sigma x} \sum_{p=0}^{\infty} \mu^{-1} \Psi_p(t, \vec{t}, \sigma, \omega)\, d\sigma. \quad (9)$$

Применим к функции $G(t, \vec{t}, x, \omega)$ лемму о преобразовании Фурье для целых функций [8]. Проверим выполнение условия леммы для $\Psi_p(t, \vec{t}, \sigma, \omega)$.

Используя соотношение, вытекающее из свойств математического ожидания интеграла Винера–Ито [7], получаем

$$\mathrm{E}\{Q(t, \sigma, \omega)\} = \exp\left\{ \sum_{|k| \le 2b} A_k (i\sigma)^k t \right\}.$$

Далее следует применить известное неравенство [1]

$$\left(\sum_{s=1}^{m} |b_s| \right)^p \le m^p \sum_{s=1}^{m} |b_s|^p,$$

в результате получим

$$\mathrm{E}\{\Psi_p(t,\vec{t},\sigma+i\gamma,\omega)\}\le m^p\sum_{s=1}^{m}\mu_s^{-p}\exp\{-c_1(t+pt_s)|\sigma|^{2b}+c_2(t+pt_s)|\gamma|^{2b}\},$$

$$c_1,c_2>0.$$

Проведем замену переменных $\sigma\left(t+pt_s\right)^{-\frac{1}{2b}}=z$ в интеграле (9). Тогда преобразование Фурье функции $\Psi_p(t,\vec{t},\sigma,\omega)$ на основании упомянутой леммы из [8] позволяет записать неравенство

$$\left|\int_{R^n}e^{i\sigma x}\mathrm{E}\{\Psi_p(t,\vec{t},\sigma,\omega)\}d\sigma\right|\le$$

$$\le c_3m^p\sum_{s=1}^{m}\mu^{-p}\left(t+pt_s\right)^{-\frac{n}{2b}}\times\exp\left\{-c_4\left|x\left(\sum_{s=1}^{m}\left(t+pt_s\right)^{-\frac{1}{2b}}\right)\right|^q\right\},\ c_4>0.$$

Отсюда для производных функции $G(t,\vec{t},x,\omega)$ вытекает неравенство

$$|\mathrm{E}\{G_x^k(t,\vec{t},x,\omega)\}|\le\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{m}c_k\mu^{-(p+1)}\left(t+pt_s\right)^{\frac{-n+|k|}{2b}}\exp\left\{-c_4\left|x\left(t+pt_s\right)^{-\frac{1}{2b}}\right|^q\right\}.$$

Получили утверждение теоремы 2.

ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Рассмотрим решение $u(t,x,\omega)$ задачи (1)–(3), которое определяется по формуле (4) при условии, что $\varphi(x,\omega)$ принадлежит пространству $C(R^n,\mathrm{E})$, а также $G(t,\vec{t},x-\xi,\omega)$ и $\varphi(x,\omega)$ являются независимыми случайными величинами для всех x и ξ из R^n, $t\in(0,T)$. Тогда получим оценку для математического ожидания

$$|\mathrm{E}\{D_x^ku(t,x,\omega)\}|\le\int_{R^n}|\mathrm{E}\{D_x^kG(t,\vec{t},x-\xi,\omega)\}|\cdot\mathrm{E}\{|\varphi(\xi,\omega)|\}d\xi\le$$

$$\le\int_{R^n}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{m}c_k\mu^{-(p+1)}\left(t+pt_s\right)^{-\frac{n+|k|}{2b}}\exp\left\{-c_4\left|(x-\xi)\left(t+pt_s\right)^{-\frac{1}{2b}}\right|^q\right\}\times$$

$$\times\mathrm{E}\left\{\left|\varphi(\xi,\omega)\right|_{C(R^n,E)}\right\}d\xi.$$

В заданном интеграле выполним замену переменных $(x-\xi)\left(t+pt_s\right)^{-\frac{1}{2b}}=z$. Далее продолжим оценивание:

$$|\mathrm{E}\{D_x^ku(t,x,\omega)\}|\le$$

$$\le \sup_x \left|\varphi\right|_{\{C(R^n),\,E\}} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{m} c_k \mu^{-(p+1)}\left(t+pt_s\right)^{-\frac{n+|k|}{2b}}\left(t+pt_s\right)^{-\frac{n}{2b}}\int_{R^n}\exp\{-c_4 z^q\}dz \le$$

$$\le c\left|\varphi\right|_{\{C(R^n),\,E\}} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{m} \mu^{-(p+1)}\left(t+pt_s\right)^{-\frac{k}{2b}}.$$

В результате получили следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть на вероятностном базисе $(\Omega, F, \{F_t, t \ge t_0\})$ задана m-точечная задача Коши (1)–(3). Тогда ее решение удовлетворяет неравенство

$$|\,\mathrm{E}\{D_x^k u(t,x,\omega)\}| \le c t^{-\frac{|k|}{2b}} \sup_x \mathrm{E}\{\varphi(x,\omega)\}$$

при условии, что $\varphi(x,\omega)$ принадлежит пространству $(C(R^n), \mathrm{E})$ с конечной нормой

$$\left|\varphi\right|_{\{C(R^n),\,E\}} = \sup_x \mathrm{E}\{|\,\varphi(x)|\},$$

и

$$|\,\mathrm{E}\{D_x^{2b} u(t,x,\omega)\}| \le c|\,\mathrm{E}\{D_x^{2b}\varphi(x,\omega)\}|$$

при условии, что

$$\left|\varphi\right|_{\{C^{2b}(R^n),\,E\}} \equiv \sup_x \mathrm{E}\{|\,D_x^{2b}\varphi(x)|\}. \qquad (10)$$

Замечание 3. Установлено существование функции Грина и решение стохастической непрерывно возмущенной m-точечной задачи Коши. С помощью специально введенной нормы (10), содержащей операцию математического ожидания, установится их связь с функцией Грина и решением детерминированной задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована m-точечная задача Коши для полувинеровского (содержащего только отрицательные значения винеровского процесса) уравнения с частными производными параболического типа. Эту задачу можно решать с помощью интеграла Дороговцева [11, 12], если в моменты времени $t = 0$, $t = 1$, ... , $t = t_m$ не известны начальные значения искомого решения задачи (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матійчук М.І. Параболічні сингулярні крайові задачі. Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. 176 с.
2. Городецький В.В., Спіжавка Д.І. Багатоточкова задача для еволюційних рівнянь з псевдобесселевими операторами. *Доповіді НАН України.* 2009. № 12. С. 7–12.
3. Гихман И.И. Граничная задача для стохастического дифференциального уравнения параболического типа. *Украинский математический журнал.* 1979. Т. 31, № 5. С. 483–489.
4. Гихман И.И. О смешанной задаче для стохастического дифференциального уравнения параболического типа. *Украинский математический журнал.* 1980. Т. 32, № 3. С. 367–372.
5. Ясинський В.К., Бодрик Н.П. Дослідження властивостей сильного розв'язку задачі Коші для лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння з частинними похідними і марковськими параметрами. *Науковий вісник Чернівецького університету імені Юрія Федьковича. Сер. Математика.* 2011. Т. 1, № 1–2. С. 158–167.

6. Перун Г.М. Задача з імпульсною дією для лінійного стохастичного параболічного рівняння вищого порядку. *Український математичний журнал.* 2008. Т. 60, № 10. С. 1422–1426.
7. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Москва: Наука, 1977. 567 с.
8. Эйдельман С.Д. Параболические системы. Москва: Наука, 1964. 444 с.
9. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Теорія випадкових процесів. Чернівці: Золоті литаври, 2008. 796 с.
10. Ясинський В.К. Математична теорія процесів випадку. Чернівці: Видавничий дім «Родовід», 2014. 272 с.
11. Дороговцев А.В. Стохастический анализ и случайное преобразование в гильбертовом пространстве. Киев: Наукова думка, 1992. 120 с.
12. Шевляков А.Ю. Формула Ито для расширенного стохастического интеграла. *Теория вероятностей и математическая статистика.* 1982. Вып. 22. С. 146–157.

Надійшла до редакції 06.06.2017

Г.М. Перун, В.К. Ясинський

СТОХАСТИЧНА *m*-ТОЧКОВА ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НАПІВВІНЕРОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Анотація. Розглянуто задачу про існування з імовірністю одиниця функції Гріна стохастичної *m*-точкової задачі Коші для параболічного рівняння вищого порядку зі збуреннями типу білого шуму тільки з від'ємними значеннями. Отримано оцінки в просторах функцій, норма яких містить математичне сподівання.

Ключові слова: *m*-точкова задача Коші, існування з імовірністю одиниця, формула Іто, функція Гріна, умова параболічності, математичне сподівання.

G.M. Perun, V.K. Yasinsky

STOCHASTIC *m*-POINT CAUCHY PROBLEM OF PARABOLIC TYPE WITH SEMIDIFFUSION PERTURBATIONS

Abstract. The problem of the existence, with probability 1, of Green's function of a stochastic *m*-point Cauchy problem for a higher-order parabolic equation with white noise perturbations taken only with negative values is considered. Estimates are obtained in spaces of functions whose norm contains the mathematical expectation.

Keywords: *m*-point Cauchy problem, existence with probability 1, Ito's formula, Green's function, parabolicity condition, mathematical expectation.

Перун Галина Михайловна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Черновицкого национального университета имени Юрия Федьковича, e-mail: perungm@ukr.net.

Ясинский Владимир Кириллович,
доктор физ.-мат. наук, профессор Черновицкого национального университета имени Юрия Федьковича.