

КОМБИНАТОРНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ В ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ БАЛАНСНОЙ КОМПОНОВКИ

Аннотация. Рассмотрена оптимизационная задача балансировки заданного множества 3D-объектов в контейнере, разделенном горизонтальными стеллажами на подконтейнеры. Для аналитического описания условий непересечения объектов и размещения объектов в подконтейнерах использован метод *phi*-функций. Определены комбинаторные конфигурации, описывающие комбинаторную структуру задачи. На основании введенных конфигураций построена математическая модель, в которой при проектировании компоновки учитываются не только ограничения размещения и механические свойства системы, но и комбинаторные особенности задачи, связанные с генерацией разбиений множества объектов, размещаемых внутри подконтейнеров. Предложена стратегия решения. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: балансировка, комбинаторные конфигурации, 3D-объекты, метод *phi*-функций, математическая модель, оптимизация.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи балансировки принадлежат классу NP-сложных задач размещения [1] и являются предметом исследований вычислительной геометрии [2], а методы их решения — новым направлением теории исследования операций [3]. Суть задачи заключается в поиске оптимального размещения заданного набора 3D-объектов в некоторой ограниченной области (контейнере) с учетом ограничений поведения (*behavior constraints*), которые обеспечивают баланс рассматриваемой системы.

Необходимость учета ограничений поведения в оптимизационных задачах размещения возникает в различных прикладных областях науки и техники, например, в задачах логистики (при упаковке грузов для транспортировки или хранения), в машиностроении (при компоновке летательных аппаратов, судов, подводных лодок, а также оборудования, приборов и устройств, деталей изделия). Особый интерес к этому классу задач проявляется при проектировании ракетно-космической техники. На начальном этапе проектирования (компоновке) космического аппарата необходимо учитывать ряд ограничений на статические и динамические характеристики (центр масс, осевые и центробежные моменты инерции) [4].

В работах [5–9] рассматриваются задачи компоновки цилиндров в цилиндрическом контейнере с ограничениями поведения, учет которых необходим для уравновешивания спутниковой системы. В данных публикациях приводятся математические модели с различными функциями цели. Для решения этих задач предлагаются эвристические алгоритмы, учитывающие особенности каждой из них.

Математические модели ряда оптимизационных задач балансировки можно построить с учетом особенностей их дискретной структуры. Для математического моделирования и решения таких задач необходимо использовать комбинаторные конфигурации, имеющие соответствующие свойства. Основные подходы к математическому моделированию и решению задач оптимизации на комбинаторных конфигурациях описаны в [10, 11].

В работах [12, 13] приводятся математические модели и методы решения задач балансировки (*Balance Layout Problem, BLP*) множества 3D-объек-

тов в заданном контейнере, который разделен круговыми стеллажами на подконтейнеры. При этом разбиение множества объектов на подмножества в соответствии с размещением объектов внутри подконтейнеров считается заданным.

В настоящей работе рассматривается задача балансной компоновки 3D-объектов (шар, цилиндр, тор, сфероцилиндр, параллелепипед, правильная призма) в контейнере (формы параллелепипеда, цилиндра, параболоида вращения или усеченного конуса). При этом разбиение множества объектов по принадлежности подконтейнерам не задано.

Целью данного исследования является построение и реализация математической модели задачи оптимальной балансной компоновки множества 3D-объектов, в которой учитываются не только ограничения размещения и механические свойства системы, но и комбинаторные особенности задачи, связанные с генерацией разбиений множества объектов, размещаемых внутри подконтейнеров.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Ω — контейнер высоты H , имеющий форму параллелепипеда, цилиндра, параболоида вращения или усеченного конуса. Контейнер Ω задан в собственной неподвижной системе координат $Oxyz$, где Oz — продольная ось симметрии. Полагаем, что Ω разделен горизонтальными стеллажами S_j на отсеки Ω^j , $j \in J_m = \{1, \dots, m\}$. Расстояние между стеллажами S_j и S_{j+1} обозначим t_j , $j \in J_m$, $\sum_{j=1}^m t_j = H$. Начало собственной системы координат $Oxyz$ расположено

в центре нижнего основания контейнера.

Имеется $A = \{\mathbb{T}_i, i = 1, \dots, n\}$ — множество однородных 3D-объектов с заданными метрическими характеристиками. Каждый объект имеет высоту h_i и массу m_i , $i \in J_n = \{1, \dots, n\}$.

Объект \mathbb{T}_i задан в собственной системе координат $O_i x_i y_i z_i$. Расположение объекта \mathbb{T}_i внутри контейнера Ω определяется вектором $u_i = (v_i, z_i, \theta_i)$, где (v_i, z_i) — вектор трансляции объекта в неподвижной системе координат $Oxyz$, θ_i — угол поворота объекта \mathbb{T}_i в плоскости $O_i x_i y_i$, $v_i = (x_i, y_i)$, при этом значение z_i , $i \in J_n$, однозначно определяется подконтейнером Ω^j , $j \in J_m$, в котором размещается объект \mathbb{T}_i . На размещение объекта \mathbb{T}_i , $i \in J_n$, внутри Ω^j накладываются следующие ограничения:

$$z_i = \sum_{l=1}^j t_{l-1} + h_i,$$

где $j \in J_m$. Полагаем, что $t_0 = 0$ и $\forall i \in J_n$ существует $j^* \in J_m$: $h_i \leq t_{j^*}$.

В отличие от задач BLP, рассмотренных в [12, 13], где априори задано требование на размещение объектов в конкретных подконтейнерах Ω^j , $j \in J_m$, в данном исследовании формулируется задача балансной компоновки объектов, которая предполагает генерацию и выбор разбиения множества A на непустые подмножества A^j , $j \in J_m$. Здесь A^j — подмножество объектов, которые должны размещаться на стеллаже S_j внутри подконтейнера Ω^j .

Пусть $J_n^j \subseteq J_n$ — множество индексов объектов, размещаемых в подконтейнере Ω^j , $j \in J_m$, $\bigcup_{j=1}^m J_n^j = J_n$, $J_n^i \cap J_n^j = \emptyset$, $i \neq j \in J_m$; $k_j = |A^j|$ — количество

объектов, размещаемых в подконтейнере Ω^j , $k_j > 0$, $j \in J_m$, при этом

$$\sum_{j=1}^m k_j = n. \quad (1)$$

На суммарную массу объектов, размещаемых в подконтейнерах Ω^j , $j \in J_m$, в некоторых приложениях могут накладываться дополнительные ограничения, например

$$\sum_{i=1}^{k_1} m_i \geq \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} m_i \geq \dots \geq \sum_{i=k_1+k_2+\dots+k_{m-1}+1}^n m_i, \quad (2)$$

где $k_j = |A^j| \geq 1$, $j \in J_m$.

Кроме того, должны выполняться следующие условия размещения:

$$\text{int } \mathbb{T}_{i_1} \cap \text{int } \mathbb{T}_{i_2} = \emptyset, \quad i_1 < i_2 \in J_n^j, \quad j \in J_m, \quad (3)$$

$$\mathbb{T}_i \subset \Omega^j, \quad i \in J_n^j, \quad j \in J_m, \quad (4)$$

$$h^j \leq t_j, \quad h^j = \max \{h_i^j, i \in J_n^j\}, \quad j \in J_m. \quad (5)$$

Обозначим Ω_A систему, образованную в результате размещения объектов \mathbb{T}_i семейства A в контейнере Ω , а O_sXYZ — систему координат Ω_A , где $O_s = (x_s(v), y_s(v), z_s(v))$ — центр масс Ω_A , а оси $O_sX || Ox$, $O_sY || Oy$, $O_sZ || Oz$,

$$x_s(v) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}, \quad y_s(v) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}, \quad z_s(v) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M},$$

$M = \sum_{i=1}^n m_i$ — масса системы Ω_A .

В качестве функции цели в данном исследовании рассматривается отклонение центра масс O_s системы Ω_A от заданной точки (x_0, y_0, z_0) .

Комбинаторная задача балансной компоновки (Combinatorial Balance Layout Problem, CBLP). Необходимо определить такой вариант разбиения множества A на непустые подмножества A^j , $j \in J_m$, с учетом ограничений (1)–(5) и параметры размещения (x_i^*, y_i^*, z_i^*) объектов \mathbb{T}_i , $i \in J_n$, при котором функция цели достигнет своего минимального значения.

Полагаем, что задача имеет хотя бы одно допустимое решение.

Замечание. На размещение объектов могут задаваться также ограничения поведения (ограничения на осевые и центробежные моменты системы) и ограничения на допустимые расстояния между объектами.

Варианты разбиения множества A на непустые подмножества A^j , $j \in J_m$, определяются количеством элементов в каждом подмножестве и порядком следования последних. Рассмотрим подконтейнеры Ω^j и соответствующие им множества объектов A^j , $j \in J_m$. Тогда кортеж натуральных чисел

(k_1, k_2, \dots, k_m) такой, что $\sum_{j=1}^m k_j = n$, определяет возможное количество k_j объ-

ектов в каждом подконтейнере Ω^j . Количество всех таких кортежей равно числу композиций числа n длины m [14], которое составляет C_{n-1}^{m-1} .

Рассмотрим, сколькими способами можно разложить n различных объектов из множества A в m подконтейнеров Ω^j , $j \in J_m$, при условии, что в них находится соответственно k_1, k_2, \dots, k_m объектов, причем множества объектов A^j , $j \in J_m$, внутри соответствующих подконтейнеров Ω^j , $j \in J_m$, не упорядочены. Не теряя общности, будем различать объекты с одинаковыми значениями метрических характеристик, высоты h_i и массы m_i (например, считать их различающимися по номеру).

Упорядочим элементы множества A . Каждому объекту поставим в соответствие номер подконтейнера, в который он будет помещен. Получим кортеж, состоящий из n элементов, образующих перестановку с повторениями из m номеров $1, 2, \dots, m$, в которой первый элемент (номер первого подконтейнера) повторяется k_1 раз, второй — k_2 раз, последний — k_m раз. Каждая такая перестановка определяет свой способ раскладки, а их общее число

$$P(n, k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}.$$

Тогда количество вариантов распределения n различных объектов из множества A по m подконтейнерам Ω^j при условии, что каждый подконтейнер содержит хотя бы один объект и порядок размещения объектов внутри подконтейнера неважен, вычисляется

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} P(n, k_1, k_2, \dots, k_m) = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}. \quad (6)$$

Заметим, что число слагаемых в сумме равно числу композиций числа n длины m , которое составляет $N = \left| C_{n-1}^{m-1} \right|$.

Для генерации различных вариантов подмножеств A^j , $j \in J_m$, построим комбинаторную конфигурацию следующим образом.

Обозначим $Pt(n, m)$ множество композиций числа n длины m (соответствует распределению n различных цилиндров из множества A по m подконтейнерам Ω^j , $j \in J_m$, при условии, что каждый подконтейнер содержит хотя бы один объект и порядок объектов внутри подконтейнера неважен). При этом $|Pt(n, m)| = N = \left| C_{n-1}^{m-1} \right|$.

Пусть $(k_1, k_2, \dots, k_m) \in Pt(n, m)$, $\sum_{j=1}^m k_j = n$, $k_i \geq 1$, $i \in J_m$. Введем комбина-

торное множество \mathbb{Q} , которое представляет собой композиционный образ комбинаторных множеств (k -множество) $Pt(n, m)$, $C_n^{k_1}$, $C_{n_1}^{k_2}$, $C_{n_2}^{k_3}$, ..., $C_{n_{m-1}}^{k_m}$, порожденный множествами $I_{n_0}, I_{n_1}, I_{n_2}, \dots, I_{n_{m-1}}$ [15], где $n_i = n - k_1 - \dots - k_i$, $i \in J_{m-1}$,

$$I_{n_0} = J_n,$$

$$I_{n_1} = I_{n_0} \setminus \{j_1^{n_0}, j_2^{n_0}, \dots, j_{k_1}^{n_0}\}, (j_1^{n_0}, j_2^{n_0}, \dots, j_{k_1}^{n_0}) \in C_n^{k_1},$$

$$I_{n_2} = I_{n_1} \setminus \{j_1^{n_1}, j_2^{n_1}, \dots, j_{k_2}^{n_1}\}, (j_1^{n_1}, j_2^{n_1}, \dots, j_{k_2}^{n_1}) \in C_{n_1}^{k_2},$$

.....

$$I_{n_{m-1}} = I_{n_{m-2}} \setminus \{j_1^{n_{m-2}}, j_2^{n_{m-2}}, \dots, j_{k_{m-1}}^{n_{m-2}}\}, (j_1^{n_{m-2}}, j_2^{n_{m-2}}, \dots, j_{k_{m-1}}^{n_{m-2}}) \in C_{n_{m-2}}^{k_{m-1}},$$

$$I_{n_{m-1}} = \{j_1^{n_{m-1}}, j_2^{n_{m-1}}, \dots, j_{k_m}^{n_{m-1}}\}, (j_1^{n_{m-1}}, j_2^{n_{m-1}}, \dots, j_{k_m}^{n_{m-1}}) \in C_{n_{m-1}}^{k_m}.$$

Отметим, что

$$I_{n_0} \cup I_{n_1} \cup \dots \cup I_{n_{m-1}} = J_n = \{1, 2, \dots, n\},$$

$$I_{n_s} \cap I_{n_t} = \emptyset, s \neq t \in J_{m-1}^0 = \{0, 1, \dots, m-1\}.$$

Элемент $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}$ можно описать следующим образом:

$$q = (q_1, \dots, q_{k_1}, q_{k_1+1}, \dots, q_{k_1+k_2}, \dots,$$

$$q_{k_1+\dots+k_{m-1}}, \dots, q_{k_{m-1}+k_m}),$$

где $(q_1, \dots, q_{k_1}) = (j_1^{n_0}, j_2^{n_0}, \dots, j_{k_1}^{n_0}) \in C_n^{k_1}$,

$$(q_{k_1+1}, \dots, q_{k_1+k_2}) = (j_1^{n_1}, j_2^{n_1}, \dots, j_{k_2}^{n_1}) \in C_{n_1}^{k_2},$$

.....

$$(q_{k_1+\dots+k_{m-1}}, \dots, q_{k_{m-1}+k_m}) = (j_1^{n_{m-1}}, j_2^{n_{m-1}}, \dots, j_{k_m}^{n_{m-1}}) \in C_{n_{m-1}}^{k_m}.$$

Мощность множества \mathbb{Q} определяется формулой (6).

В дальнейшем будем называть элемент $q = (q_1, \dots, q_n)$ множества \mathbb{Q} кортежем разбиения множества объектов A на подмножества $A^j, j \in J_m$.

Определим вектор основных переменных задачи СBLP: $u = (v, z, \theta)$, где $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, $v_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, x_i, y_i, θ_i — непрерывные переменные, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, z_i — дискретные переменные.

Значения переменных $z_i, i=1, 2, \dots, n$, определяются в порядке, задаваемом элементами $q = (q_1, \dots, q_n)$ комбинаторного множества \mathbb{Q} следующим образом:

$$z_{q_i} = \sum_{l=1}^s t_{l-1} + h_{q_i}, \quad (7)$$

где

$$s = \begin{cases} 1, & \text{если } i \leq k_1, \\ 2, & \text{если } k_1 < i \leq k_1 + k_2, \\ \dots & \\ m, & \text{если } k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1} < i \leq k_1 + k_2 + \dots + k_m, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n, q_i \in \{1, 2, \dots, n\}, q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}.$$

Ограничения размещения объектов множества A в контейнере Ω вида (3), (4) описываются системой неравенств $\Upsilon_1(u, \tau) \geq 0, \Upsilon_2^*(u) \geq 0$, где $\Upsilon_1(u, \tau) \geq 0$ — ограничение, описывающее непересечение 3D-объектов, $\Upsilon_2^*(u) \geq 0$ — ограничение, описывающее включение 3D-объектов в контейнер Ω . Здесь

$$\Upsilon_1(u, \tau) = \min \{\Upsilon_1^j(u, \tau), j \in J_m\},$$

$$\Upsilon_1^j(u, \tau) = \min \{\Upsilon_{q_1 q_2}^j(u_{q_1}, u_{q_2}, u_{q_1 q_2}), q_1 < q_2 \in J_n^j\}, \quad (8)$$

$$\Upsilon_2^*(u) = \min \{ \Upsilon_2^{*j}(u), j \in J_m \}, \quad \Upsilon_2^{*j}(u) = \min \{ \Upsilon_{q_i}^*(u_{q_i}), q_i \in J_n^j \}, \quad (9)$$

$\Upsilon_{q_1 q_2}^j(u_{q_1}, u_{q_2}, u_{q_1 q_2})$ — функция, описывающая условие непересечения объектов \mathbb{T}_{q_1} и \mathbb{T}_{q_2} , $u_{q_1} = (x_{q_1}, y_{q_1}, z_{q_1}, \theta_{q_1})$, $u_{q_2} = (x_{q_2}, y_{q_2}, z_{q_2}, \theta_{q_2})$, $\Upsilon_{q_i}^*(u_{q_i})$ — функция, описывающая условие непересечения объектов \mathbb{T}_{q_i} и $\Omega^{*j} = \mathbf{R}^3 / \text{int } \Omega^j$.

Пусть $u_1 = (v_1, z_1, \theta_1) \in \mathbf{R}^3$, $u_2 = (v_2, z_2, \theta_2) \in \mathbf{R}^3$, $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$, $x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2$ — непрерывные переменные, z_1, z_2 — дискретные переменные, u_{12} — вектор дополнительных переменных.

Определение 1. Функция $\Upsilon_{12}(u_1, u_2)$ называется *D-phi*-функцией для 3D-объектов \mathbb{T}_1 и \mathbb{T}_2 , если при фиксированных значениях $z_1 = z_1^0$ и $z_2 = z_2^0$ функция $\Upsilon_{12}(v_1, z_1^0, \theta_1, v_2, z_2^0, \theta_2)$ является *phi*-функцией $\Phi_{12}(v_1, z_1^0, \theta_1, v_2, z_2^0, \theta_2)$ для объектов \mathbb{T}_1 и \mathbb{T}_2 .

Определение 2. Функция $\Upsilon'_{12}(u_1, u_2, u_{12})$ называется квази-*D-phi*-функцией для 3D-объектов \mathbb{T}_1 и \mathbb{T}_2 , если при фиксированных значениях $z_1 = z_1^0$ и $z_2 = z_2^0$ функция $\Upsilon'_{12}(v_1, z_1^0, \theta_1, v_2, z_2^0, \theta_2, u_{12})$ является квази-*phi*-функцией $\Phi'_{12}(v_1, z_1^0, \theta_1, v_2, z_2^0, \theta_2, u_{12})$ для объектов \mathbb{T}_1 и \mathbb{T}_2 .

Таким образом, в соотношениях (8), (9) при фиксированных значениях z_{q_1} и z_{q_2} имеем $\Upsilon_{q_1 q_2}^j(u_{q_1}, u_{q_2}, u_{q_1 q_2}) \equiv \Phi_{q_1 q_2}^{\mathbb{T}\mathbb{T}}(u_{q_1}, u_{q_2})$ — *phi*-функция [2] для объектов \mathbb{T}_{q_1} и \mathbb{T}_{q_2} или $\Upsilon_{q_1 q_2}^j(u_{q_1}, u_{q_2}, u_{q_1 q_2}) \equiv \Phi'_{q_1 q_2}{}^{\mathbb{T}\mathbb{T}}(u_{q_1}, u_{q_2}, u_{q_1 q_2})$ — квази-*phi*-функция [16] для объектов \mathbb{T}_{q_1} и \mathbb{T}_{q_2} ; $\Upsilon_{q_i}^*(u_{q_i}) \equiv \Phi_{q_i}^{\mathbb{T}\Omega^{*j}}(u_{q_i})$ — *phi*-функция для объектов \mathbb{T}_{q_i} и Ω^{*j} .

В случае, если заданы минимально допустимые расстояния между объектами, используются псевдонормализованные *phi*-функции (квази-*phi*-функции) для соответствующих пар объектов [2, 15].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Математическую модель задачи CBLP можно определить следующим образом:

$$F(u^*, \tau) = \min F(u, \tau) \text{ s.t. } (u, \tau) \in W, \quad (10)$$

$$W = \{(u, \tau) \in \mathbf{R}^\sigma : \Upsilon_1(u, \tau) \geq 0, \Upsilon_2^*(u) \geq 0, \mu(u) \geq 0\}, \quad (11)$$

где

$$F(u) = d = (x_s(v, z))^2 + (y_s(v, z))^2 + (z_s - z_0)^2,$$

$u = (v, z, \theta)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $v_i = (x_i, y_i)$, $i \in I_n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$,

функция $\Upsilon_1(u, \tau)$ описывается соотношением (8) при $\Xi = \bigcup_{j=1}^m \Xi^j$, $\Xi^j =$

$= \{(q_1, q_2) : q_1 < q_2 \in J_n^j\}$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_s)$ — вектор вспомогательных переменных для построения квази-*phi*-функций, $s = |\Xi|$, функция $\Upsilon_2^*(u)$ определяется формулой (9), элементы вектора z задаются соотношением (7), $\mu(u) \geq 0$ — ограничения поведения.

Например, математическая модель (10), (11) для задачи CBLP размещения цилиндров в цилиндрическом контейнере примет вид

$$\min d, \text{ s.t. } u = (v, z) \in W,$$

где $v = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$,

$$d = \left[\sum_{i=1}^n m'_i x_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n m'_i y_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n m'_i z_i \right]^2,$$

а область W описывается системой неравенств вида

$$\begin{cases} (x_{q_2} - x_{q_1})^2 + (y_{q_2} - y_{q_1})^2 - (r_{q_2} + r_{q_1})^2 \geq 0, \\ q_1, q_2 \in \Xi^j, \quad j \in J_m, \\ -x_{q_i}^2 - y_{q_i}^2 + (R_{q_i}^z - r_{q_i})^2 \geq 0, \\ q_i \in \Xi^j, \quad j \in J_m. \end{cases}$$

Заметим, что $m'_i = \frac{m_i}{M} = \text{const}$, $M = \sum_{i=1}^n m_i = \text{const}$.

Математическую модель задачи CBLP можно представить в виде задачи смешанного целочисленного программирования (MIP) с использованием булевых переменных. Однако такой подход в отличие от (10), (11) приводит к существенному увеличению числа дискретных переменных модели, а следовательно, к росту размерности задачи CBLP.

СТРАТЕГИЯ РЕШЕНИЯ

Для решения задач CBLP используется следующая стратегия.

Шаг 1. Случайным образом генерируется множество $\{q\}$ кортежей разбиения $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}$ с использованием, например алгоритма, приведенного в [17].

Шаг 2. Проверяется выполнение условий (2), (5) для каждого из кортежей $q \in \{q\}$. Строится подмножество $\{q'\} \subseteq \{q\}$, для элементов которого выполняются условия (1)–(5). Если $\{q'\} = \emptyset$, то возвращаемся к шагу 1.

Шаг 3. Строится множество допустимых стартовых точек $\{u'_0\}$ для каждого кортежа из множества $\{q'\}$.

Шаг 4. Реализуется поиск локального экстремума задачи (10), (11) для каждой стартовой точки $u'_0 \in W$ при фиксированном кортеже q' .

Шаг 5. Лучший из полученных локальных экстремумов для всех кортежей множества $\{q'\}$ и допустимых стартовых точек множества $\{u'_0\}$ выбирается в качестве локально-оптимального решения задачи CBLP.

Предложенная стратегия использует разумный выбор допустимых стартовых точек и NLP-solver для поиска локально-оптимальных решений NP-сложной задачи условной оптимизации (10), (11).

Для сокращения вычислительных затрат (времени и памяти) используется модификация LOFRT алгоритма, предложенного в [16]. Данный алгоритм позволяет свести задачу (10), (11) большой размерности с большим числом неравенств к последовательности подзадач со значительно меньшим числом переменных и неравенств.

Для решения задач нелинейного программирования используется ПРОРТ (<https://projects.coin-or.org/Ipopt>), реализующий метод внутренней точки [18].

Алгоритм поиска допустимых стартовых точек. Алгоритм включает следующие шаги для заданного кортежа q' .

Шаг 1. Генерируем случайным образом множество точек $v_i^0 = (x_i^0, y_i^0)$, $i \in I_n$, принадлежащих соответствующим сечениям контейнера. Формируем вектор $v^0 = (x_1^0, y_1^0, \dots, x_n^0, y_n^0)$. Фиксируем углы поворота $\theta_i = \theta_i^0 = 0$, $i \in I_n$.

Шаг 2. Пусть $\lambda = \lambda_i$ — коэффициент гомотетии для объектов $A_i, i \in I_n$. Используя очевидные геометрические построения, определяем вектор дополнительных переменных u'^0 размерности τ такой, что каждая phi -функция или квази- phi -функция в (11) достигает своего максимального значения по дополнительным переменным u'^0 в точке (u_λ^0, u'^0) , где $u_\lambda^0 = (v^0, \theta^0, \lambda^0)$, $\lambda^0 = 0$, $v^0 = (v_1^0, \dots, v_n^0)$, $\theta^0 = (\theta_1^0, \dots, \theta_n^0)$.

Шаг 3. Вычисляем $\alpha^0 = \min\{\Upsilon_1(u_\lambda^0, u'^0), \Upsilon_2(u_\lambda^0)\}$. Если $\alpha^0 < 0$, то переходим к шагу 4, иначе формируем точку $u_\alpha^* = (u_\lambda^0, u'^0, \alpha^0)$ и переходим к шагу 5.

Шаг 4. Задаем $\lambda = 0, \theta_i = \theta_i^0 = 0, i \in I_n$, и используем $u_\alpha^0 = (u_\lambda^0, u'^0, \alpha^0)$ в качестве стартовой точки для решения следующей вспомогательной задачи нелинейного программирования:

$$\alpha^* = \max \alpha, \text{ s.t. } u_\alpha \in W_\alpha, \quad (12)$$

$$W_\alpha = \{u_\alpha \in \mathbb{R}^{3n+\tau+1} : \Upsilon_1(u_\lambda, u') - \alpha \geq 0, \Upsilon_2(u_\lambda) - \alpha \geq 0, -\alpha \geq 0\}, \quad (13)$$

где $u_\alpha = (u_\lambda, u', \alpha)$.

Если $\alpha^* = 0$, то точка $u_\alpha^* = (u_\lambda^*, u'^*, \alpha^*)$ глобального максимума задачи (12), (13) найдена и переходим к шагу 5. Если $\alpha^* < 0$, то допустимую стартовую точку для задачи (12), (13) невозможно найти, поскольку не выполняются ограничения размещения при $\lambda = 0$. В этом случае возвращаемся к шагу 1.

Шаг 5. Полагаем, что параметры $\theta_i, i \in I_n$, — переменные. Генерируем случайным образом стартовые значения углов поворота $\theta_i^* \in [0, 2\pi), i \in I_n$.

Шаг 6. Формируем допустимую стартовую точку (u_λ^*, u'^*) , используя u_α^* , и решаем следующую вспомогательную задачу нелинейного программирования:

$$\lambda^* = \max \lambda, \text{ s.t. } (u_\lambda, u') \in W_\lambda, \quad (14)$$

$$W_\lambda = \{(u_\lambda, u') \in \mathbb{R}^{3n+\tau+1} : \Upsilon_1(u_\lambda, u') \geq 0, \Upsilon_2(u_\lambda) \geq 0, 1 - \lambda \geq 0, \lambda \geq 0\}. \quad (15)$$

Если $\lambda^* = 1$, то точка $(u_\lambda^*, u'^*) = (v^*, \theta^*, \lambda^*, u'^*)$ глобального максимума (14), (15) найдена и переходим к шагу 7. Если $\lambda^* < 1$, то возвращаемся к шагу 1.

Шаг 7. Вычисляем значение $\mu(v^*, \theta^*)$. Если $\mu(v^*, \theta^*) < 0$, то переходим к шагу 8, иначе — к шагу 9.

Шаг 8. Стартуя из точки $u_\beta^0 = (v^*, \theta^*, u'^*, \beta^0 = \mu(v^*, \theta^*))$, решаем вспомогательную задачу

$$\beta^* = \max \beta, \text{ s.t. } u_\beta \in W_\beta, \quad (16)$$

$$W_\beta = \{u_\beta \in \mathbb{R}^{3n+\tau+1} : \Upsilon_1(u, u') \geq 0, \Upsilon_2(u) \geq 0, \mu(u) - \beta \geq 0, -\beta \geq 0\}, \quad (17)$$

где β — невязка, $u_\beta = (u, u', \beta)$, $u = (v, \theta)$.

Если $\beta^* = 0$, то точка $u_\beta^* = (v^*, \theta^*, u'^*, \beta^*)$ глобального максимума задачи (16), (17) найдена, переходим к шагу 9. Если $\beta^* < 0$, то возвращаемся к шагу 1.

Шаг 9. Формируем допустимую стартовую точку $u^0 = (v^*, \theta^*, u'^*) \in W$ для задачи CBLP.

Таблица 1. Исходные данные о цилиндрах

Параметры цилиндра	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
m_i	4	2	2	1	3	3	5	5
r_i	1	0.7	0.6	0.45	0.8	0.85	0.9	1
h_i	1.27	1.3	1.77	1.57	1.49	1.32	1.96	1.59

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Задача 1. Рассматривается задача балансной компоновки цилиндров $C_i, i=1, \dots, 8$, в цилиндрическом контейнере, разделенном двумя круговыми стеллажами на подконтейнеры в целях минимизации отклонения центра масс системы Ω_A от точки (x_0, y_0, z_0) .

Пусть $n=8, m=3, H=6, R=2.5, t_1=t_2=2, (x_0, y_0, z_0)=(0,0,3)$. Массы и метрические характеристики (радиусы и высоты) цилиндров $C_i, i=1, \dots, 8$, заданы в табл. 1.

Результаты численных экспериментов для задачи 1: значение функции цели $d^* = 0.3851$ при $q^1 = (1, 4, 7, |3, 5, 8, |2, 6)$; значение функции цели $d^* = 0.8847$ при $q^2 = (3, 7, 8, |1, 5, 6, |2, 4)$; значение функции цели $d^* = 1.3938$ при $q^3 = (1, 5, 6, 8, |2, 7, |3, 4)$; значение функции цели $d^* = 1.8847$ при $q^4 = (1, 3, 5, 6, |7, 8, |2, 4)$. Наилучший результат $d^* = 0.3851$ получен для задачи 1 при $q^1 = (1, 4, 7, |3, 5, 8, |2, 6)$.

На рис. 1 приведены локально-оптимальные размещения цилиндров в подконтейнерах, соответствующие кортежам q^1, q^2, q^3 и q^4 .

Задача 2. Рассматривается задача балансной компоновки семейства 3D-объектов (шаров S_i , прямых круговых цилиндров C_i , торов Q_i , сфероцилиндров S_{C_i} , прямых прямоугольных параллелепипедов P_i и правильных призм K_i) в цилиндрическом контейнере с учетом ограничений поведения (ограничения на осевые и центробежные моменты системы) и ограничений на минимально допустимые расстояния между объектами, а также между объектами и границей контейнера в целях минимизации отклонения центра масс системы Ω_A от точки (x_0, y_0, z_0) .

Пусть $n=20, m=3, H=1, R=0.45, t_1=t_2=0.35, A = \{S_i, i=1, \dots, 4, C_i, i=5, \dots, 8, Q_i, i=9, \dots, 12, S_{C_i}, i=13, \dots, 16, P_i, i=17, 18, 19, K_{20}\}, (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0.5)$,

$$\{m_i, i=1, \dots, 20\} = \{20.944, 15.2681, 27.8764, 34.5575, 63.7115, 41.8146, 30.4106, 28.4245, 49.9649, 24.8714, 38.6888, 26.2637, 20.7764, 17.2159, 16.8756, 52.8, 52.8, 52.8, 23.1489\};$$

$r_1 = 0.1, r_2 = 0.09, r_3 = 0.11, r_4 = 0.11$ — радиусы шаров $S_i, i=1, \dots, 4$;
 $r_5 = 0.1, h_5 = 0.11, r_6 = 0.13, h_6 = 0.12, r_7 = 0.11, h_7 = 0.11, r_8 = 0.11, h_8 = 0.08$ — радиусы и полувысоты цилиндров $C_i, i=5, \dots, 8$;

$r_9 = 0.08, h_9 = 0.07, r_{10} = 0.09, h_{10} = 0.075, r_{11} = 0.07, h_{11} = 0.06, r_{12} = 0.08, h_{12} = 0.07$ — расстояния от центров образующих окружностей до осей вращения и полувысоты торов $Q_i, i=9, \dots, 12$;

$r_{13} = 0.1, h_{13} = 0.05, l_{13} = 0.07, r_{14} = 0.05, h_{14} = 0.05, l_{14} = 0.08, r_{15} = 0.08, h_{15} = 0.05, l_{15} = 0.06, r_{16} = 0.08, h_{16} = 0.04, l_{16} = 0.07$ — радиусы, полувысоты ци-

линдров и высоты шаровых сегментов для сфероцилиндров $\mathbb{S}_{C_i}, i=13, \dots, 16$;
 $w_{17} = 0.11, l_{17} = 0.1, h_{17} = 0.12, w_{18} = 0.11, l_{18} = 0.1, h_{18} = 0.12, w_{19} = 0.11,$
 $l_{19} = 0.1, h_{19} = 0.12$ — полуширины, полудлины и полувисоты параллелепипедов $\mathbb{P}_i,$
 $i=16, 18, 19$;

$r_{20} = 0.09, h_{20} = 0.11$ — длина стороны основания и полувисота правильной шестиугольной призмы.

Пусть минимально допустимые расстояния между объектами, а также между объектами и границей контейнера составляют $\rho_{\bar{i}} = \rho_{\bar{ij}} = 0.02, i < j = 1, \dots, 20$;
 допустимые значения осевых и центробежных моментов инерции составляют $\Delta J_X = \Delta J_Y = 170, \Delta J_Z = 150$ и $\Delta J_{XY} = \Delta J_{YZ} = \Delta J_{XZ} = 0$.

Результаты численных экспериментов для задачи 2: значение функции цели $d^* = 0.0019$ при $q^1 = (1, 5, 6, 9, 13, 14, 17, | 2, 3, 7, 10, 15, 18, 20, | 4, 8, 11, 12, 16, 19)$; значение функции цели $d^* = 0.0056$ при $q^2 = (3, 5, 6, 7, 10, 13, 17, | 2, 4, 11, 12, 14,$

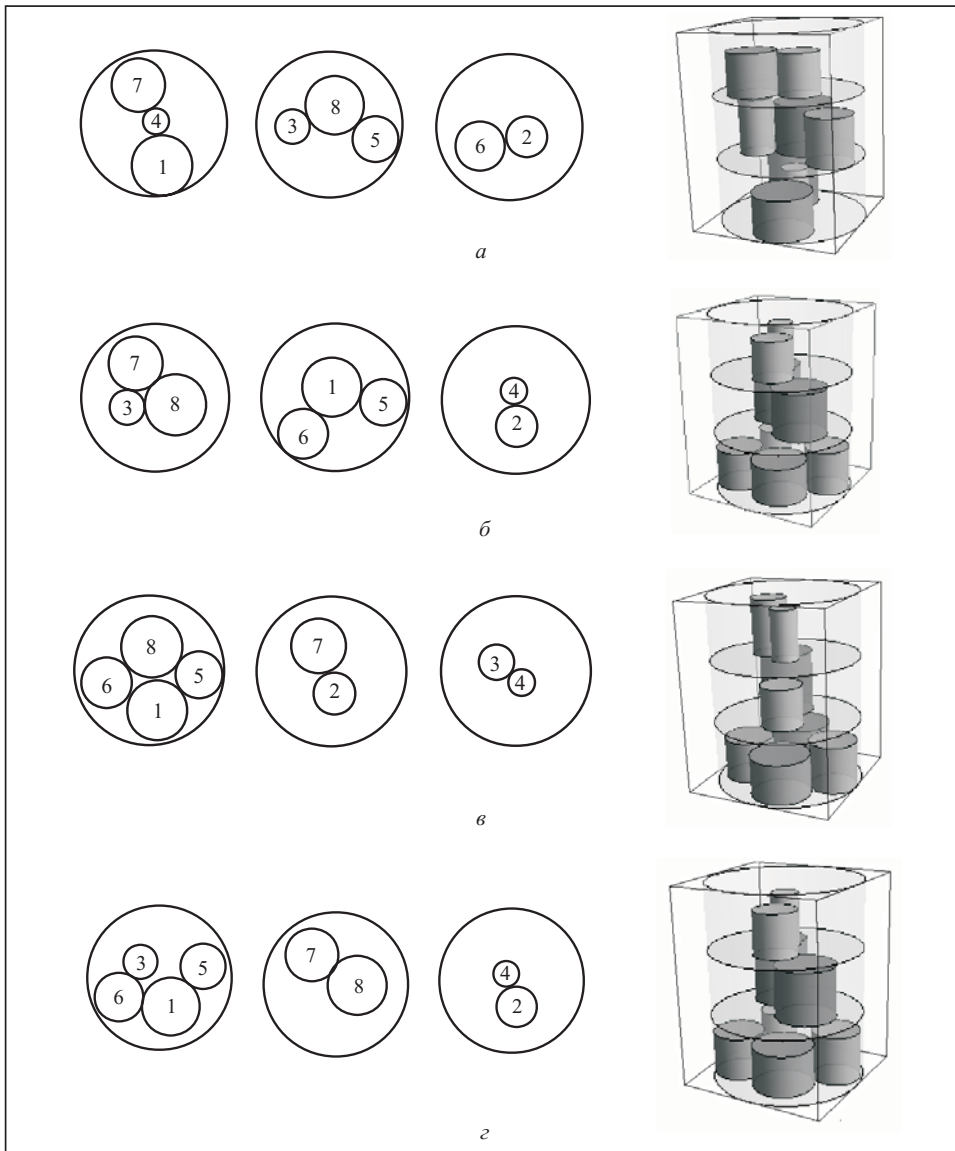


Рис. 1. Локально-оптимальные размещения цилиндров в подконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ для задачи 1, соответствующие кортежу q^1 (а), кортежу q^2 (б), кортежу q^3 (в) и кортежу q^4 (г)

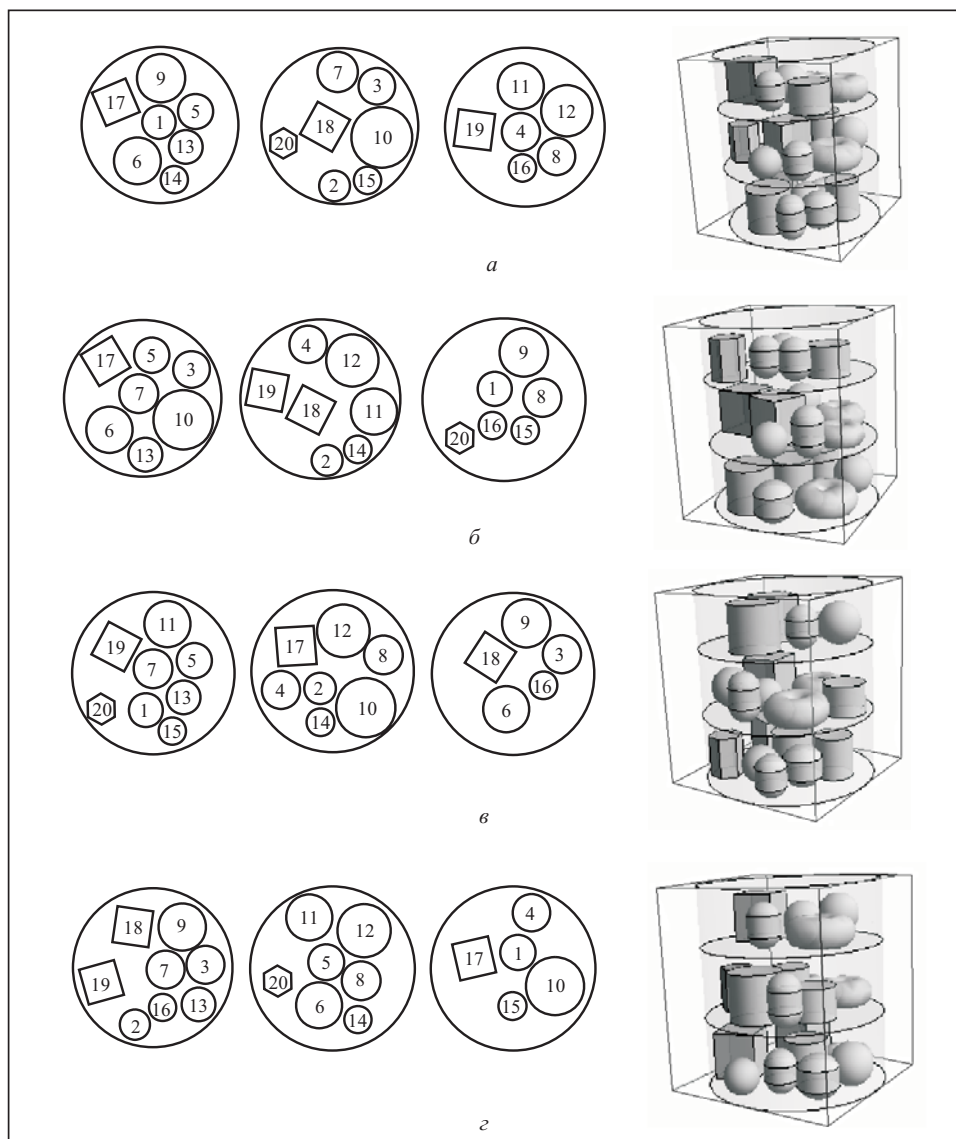


Рис. 2. Локально-оптимальные размещения объектов в подконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ для задачи 2, соответствующие кортежу q^1 (а), кортежу q^2 (б), кортежу q^3 (в) и кортежу q^4 (г)

18, 19, |1, 8, 9, 15, 16, 20); значение функции цели $d^* = 0.0018$ при $q^3 = (1, 5, 7, 11, 13, 15, 19, 20, | 2, 4, 8, 10, 12, 14, 17, | 3, 6, 9, 16, 18)$; значение функции цели $d^* = 0.0030$ при $q^4 = (2, 3, 7, 9, 13, 16, 18, 19, | 5, 6, 8, 11, 12, 14, 20, | 1, 4, 10, 15, 17)$. Наилучший результат $d^* = 0.0018$ получен для задачи 2 при $q^3 = (1, 5, 7, 11, 13, 15, 19, 20, | 2, 4, 8, 10, 12, 14, 17, | 3, 6, 9, 16, 18)$.

На рис. 2 приведены локально-оптимальные размещения объектов в подконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, соответствующие кортежам q^1, q^2, q^3 и q^4 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача балансной компоновки в контейнере 3D-объектов, разделенном горизонтальными стеллажами на подконтейнеры. Построена математическая модель, учитывающая не только ограничения размещения и ограничения

поведения, но и комбинаторные особенности задачи, связанные с необходимостью построения разбиений множества размещаемых цилиндров по подконтейнерам. Предложена стратегия решения, которая включает процедуры генерации кортежей разбиения, построения стартовых точек из области допустимых решений и локальной оптимизации. Данный подход использует принцип «мультистарта» для поиска «хороших» допустимых решений. Результаты численных экспериментов показали эффективность предложенного подхода для рассматриваемого класса задач балансной компоновки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chazelle B., Edelsbrunner H., Guibas L.J. The complexity of cutting complexes. *Discrete & Computational Geometry*. 1989. Vol. 4, N 2. P. 139–181.
2. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A. *Phi*-functions for 2D objects formed by line segments and circular arcs. *Advances in Operations Research*. 2012. DOI:10.1155/2012/346358.
3. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. *Computational Geometry: Theory and Applications*. 2010. Vol. 43, N 5. P. 535–553.
4. Modeling and optimization in space engineering. *Springer Optimization and Its Applications*. Fasano G., Pintér J.D. (Eds.). 2013. Vol. 73. 404 p.
5. Che C., Wang Y., Teng H. Test problems for quasi-satellite packing: Cylinders packing with behavior constraints and all the optimal solutions known. URL: http://www.optimizationonline.org/DB_HTML/2008/09/2093.html.
6. Space engineering. Modeling and optimization with case studies. *Springer Optimization and its Applications*. Fasano G., Pintér J.D. (Eds.). 2016. Vol. 114. 487 p.
7. Sun Z., Teng H. Optimal layout design of a satellite module. *Engineering optimization*. 2003. Vol. 35, N 5. P. 513–530.
8. Lei K. Constrained layout optimization based on adaptive particle swarm optimizer. *Advances in Computation and Intelligence: Proc. ISICA 2009*. Zhihua Cai, Zhenhua Li, Zhuo Kang, Yong Liu (Eds.). LNCS. 2009. Vol. 5821. P. 434–442.
9. Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical models of placement optimization: Two- and three-dimensional problems and applications. *Modeling and optimization in space engineering. Springer optimization and its applications*. Fasano G., Pintér J.D. (Eds.). 2013. Vol. 73. Chap. 15. P. 363–388.
10. Сергиенко И.В., Шилю В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы, решения, исследования. Киев: Наук. думка, 2003. 261 с.
11. Семенова Н.В., Колечкина Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. Київ: Наук. думка, 2009. 266 с.
12. Kovalenko A.A., Romanova T.E., Stetsyuk P.I. Balance layout problem for 3D-objects: Mathematical model and solution methods. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 4. P. 556–565. DOI:10.1007/s10559-015-9746-5.
13. Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A., Kovalenko A., Stetsyuk P. Modeling and optimization of balance layout problems. Space Engineering. *Modeling and Optimization with Case Studies. Springer Optimization and its Applications*. Fasano G., Pintér J.D. (Eds.). 2016. Vol. 114. P. 177–208.
14. Reingold E., Nievergelt J., Deo N. Combinatorial algorithms: Theory and practice. Pearson Education, 1977. 433 p.
15. Stoyan Yu.G., Grebennik I.V. Description and generation of combinatorial sets having special characteristics. *International Journal of Biomedical Soft Computing and Human Sciences. Special Volume “Bilevel Programming, Optimization Methods, and Applications to Economics”*. 2013. Vol. 18, N 1. P. 83–88.

16. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Quasi- ϕ -functions and optimal packing of ellipses. *Journal of Global Optimization*. 2015. Vol. 65, N 2. P. 283–307. DOI:10.1007/s10898-015-0331-2.
17. Grebennik I., Lytvynenko O. Random generation of combinatorial sets with special properties. *An International Quarterly Journal on Economics of Technology and Modelling Processes (ECONTECHMOD)*. 2016. Vol. 5, N 4. P. 43–48.
18. Wachter A., Biegler L.T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*. 2006. Vol. 106, N 1. P. 25–57.

Надійшла до редакції 17.07.2017

І.В. Гребеннік, Г.А. Коваленко, Т.Є. Романова, І.А. Урняєва, С.Б. Шеховцов
КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ В ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧАХ БАЛАНСНОЇ
КОМПОНОВКИ

Анотація. Розглянуто оптимізаційну задачу балансної компоновки заданої множини 3D-об'єктів у контейнері, розділеному горизонтальними стелажми на підконтейнери. Для аналітичного опису умов неперетинання об'єктів і розміщування об'єктів у підконтейнерах використано метод ϕ -функцій. Визначено комбінаторні конфігурації, що описують комбінаторну структуру задачі. Відповідно до введених конфігурацій побудовано математичну модель, в якій для проектування компоновки враховуються не тільки обмеження розміщення і механічні властивості системи, а й комбінаторні особливості задачі, пов'язані з генеруванням розбиття множини об'єктів, що розміщуються всередині підконтейнерів. Запропоновано стратегію розв'язання. Наведено результати чисельних експериментів.

Ключові слова: балансна компоновка, комбінаторні конфігурації, 3D-об'єкти, метод ϕ -функцій, математична модель, оптимізація.

I.V. Grebennik, A.A. Kovalenko, T.E. Romanova, I.A. Urniaieva, S.B. Shekhovtsov
COMBINATORIAL CONFIGURATIONS IN BALANCE LAYOUT OPTIMIZATION PROBLEMS

Abstract. The balance layout optimization problem for a given set of 3D-objects in a container divided by horizontal shelves into subcontainers is considered. For analytical description of non-overlapping and containment constraints, the ϕ -function technique is used. Combinatorial configurations describing the combinatorial structure of the problem are defined. Based on the introduced configurations, a mathematical model is constructed that takes into account not only the placement constraints and mechanical properties of the system but also the combinatorial features of the problem associated with generation of partitions of the set of objects placed inside the subcontainers. A solution strategy is proposed. The results of numerical experiments are provided.

Keywords: balance layout, combinatorial configurations, 3D-objects, ϕ -function method, mathematical model, optimization.

Гребеннік Ігорь Валерієвич,

доктор техн. наук, професор, завідуючий кафедрой Харьковского национального университета радиоэлектроники, e-mail: igor.grebennik@nure.ua.

Коваленко Анна Андреевна,

кандидат техн. наук, ассистент кафедры Харьковского национального университета радиоэлектроники, e-mail: hanna.kovalenko@nure.ua.

Романова Татьяна Евгеньевна,

доктор техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, e-mail: sherom@kharkov.ua.

Урняева Инна Анатольевна,

ассистент кафедры Харьковского национального университета радиоэлектроники, e-mail: inna.urniaieva@nure.ua.

Шеховцов Сергей Борисович,

кандидат техн. наук, доцент кафедры Харьковского национального университета внутренних дел, e-mail: tarom7@yahoo.com.