УДК 519.6

Н.В. МАЙКО

ОЦЕНКА С ВЕСОМ ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ОТ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ ДИРИХЛЕ

Аннотация. Получена оценка с весом точности разностной схемы повышенного порядка аппроксимации на девятиточечном шаблоне для первой краевой задачи для уравнения Пуассона в прямоугольнике на обобщенных решениях. В оценке учтено влияние краевого условия Дирихле и показано, что точность схемы, порядок которой по шагу равен четырем во внутренних узлах сеточного множества, повышается соответственно на полпорядка и на порядок вблизи сторон и углов прямоугольника.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, краевая задача, условие Дирихле, разностная схема, оценка точности с весом, учет влияния краевого условия.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Оценки точности разностных схем с учетом влияния краевых и начальных условий получены в ряде публикаций (например, [1–7]). В работах [1–4] рассмотрены традиционные конечно-разностные аппроксимации краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике и параллелепипеде и доказано повышение точности приближенных решений вблизи той части границы области, где задано краевое условие Дирихле. Влияние начальных и краевых условий для одно- и двумерного уравнений теплопроводности изучены в работах [5–7].

В настоящей статье исследована разностная схема повышенного порядка аппроксимации на девятиточечном шаблоне для уравнения Пуассона в прямоугольнике с краевым условием Дирихле. Цель работы — изучить влияние краевого условия на повышение точности сеточного решения в приграничных узлах и получить оценку погрешности в норме с весом. В применяемой для этого методике (см. также [4]) используется представление приближенного решения с помощью разностной функции Грина, для которой доказывается оценка в сеточной норме. Для оценивания погрешности аппроксимации на обобщенных решениях исходной задачи обычным образом применяется лемма Брэмбла–Гильберта.

Рассмотрим задачу

$$\Delta u(x) = -f(x), \; x \in D,$$
$$u(x) = 0, \; x \in \Gamma, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $D = \{x = (x_1, x_2): 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ — прямоугольник, $\Gamma = \partial D$ — граница прямоугольника D.

Используем традиционные обозначения теории разностных схем [8]. Введем сеточные множества:

$$\omega_\alpha = \{x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \; i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, \; h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha\}, \; N_\alpha \ge 2 \text{ — целое},$$
$$\overline{\omega}_\alpha = \omega_\alpha \cup \{0\} \cup \{1\}, \; \alpha = 1, 2;$$
$$\omega = \omega_1 \times \omega_2 \text{ — множество внутренних узлов}, \; \overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2,$$
$$\gamma = \overline{\omega} \setminus \omega \text{ — множество граничных узлов};$$
$$\gamma_{-\alpha} = \{x \in \gamma: x_\alpha = 0, \; x_{3-\alpha} \in \omega_{3-\alpha}\}, \; \gamma_{+\alpha} = \{x \in \gamma: x_\alpha = 1, \; x_{3-\alpha} \in \omega_{3-\alpha}\},$$
$$\gamma_\alpha = \gamma_{-\alpha} \cup \gamma_{+\alpha}, \; \alpha = 1, 2.$$

С помощью операторов [9]

$$T_1 v(x) = \frac{1}{h_1^2} \int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi|)\, v(\xi, x_2)\, d\xi, \quad x \in \omega,$$

$$T_2 v(x) = \frac{1}{h_2^2} \int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|)\, v(x_1, \xi)\, d\xi, \quad x \in \omega,$$

аппроксимируем задачу (1) разностной схемой

$$\begin{gathered} \Lambda y(x) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y(x) = -T_1 T_2 f(x), \ x \in \omega, \\ y(x) = 0, \ x \in \gamma, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_\alpha y(x) = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}(x)$, $x \in \omega$, $\alpha = 1, 2$.

Для погрешности $z(x) = y(x) - u(x)$ имеем задачу

$$\begin{gathered} \Lambda z(x) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 z(x) = -\psi(x), \ x \in \omega, \\ z(x) = 0, \ x \in \gamma, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\psi(x) = T_1 T_2 f(x) + \Lambda u(x) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 u(x) = -\Lambda_1 \eta_1(x) - \Lambda_2 \eta_2(x)$ — погрешность аппроксимации,

$$\eta_\alpha(x) = T_{3-\alpha} u(x) - u(x) - \frac{h_{3-\alpha}^2}{12} \Lambda_{3-\alpha} u(x), \ x \in \omega \ (\alpha = 1, 2).$$

СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введем пространство $\overset{0}{H}_h$ сеточных функций, заданных на $\overline{\omega}$ и обращающихся в нуль на γ, со скалярным произведением

$$(y, v) = (y, v)_{L_2(\omega)} = \sum_{x \in \omega} h_1 h_2\, y(x) v(x)$$

и нормой

$$\| v \| = \| v \|_{L_2(\omega)} = \sqrt{(v, v)} = \left(\sum_{x \in \omega} h_1 h_2 v^2(x) \right)^{1/2}.$$

Сеточная функция $\eta_\alpha(x)$ определена в узлах $x \in \omega \cup \gamma_\alpha$ и обращается в нуль в узлах $x \in \gamma_\alpha$. Доопределим ее нулем на остальной части границы γ; тогда $\eta_\alpha \in \overset{0}{H}_h$. Таким образом, задачу (3) можно записать в виде операторного уравнения

$$A' z = A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2, \ z, \eta_\alpha \in \overset{0}{H}_h, \tag{4}$$

где $A' = A_1 + A_2 - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} A_1 A_2$, $A_\alpha = -\Lambda_\alpha y$, $A_\alpha \colon \overset{0}{H}_h \to \overset{0}{H}_h$, $\alpha = 1, 2$.

Лемма 1. Оператор A' самосопряжен и положительно определен в $\overset{0}{H}_h$. Для него справедливы оценки

$$\frac{2}{3} A \le A' \le A, \tag{5}$$

$$\frac{2}{3} \| Ay \| \le \| A'y \| \le \| Ay \| \quad \forall y \in \overset{0}{H}_h, \tag{6}$$

где $A = A_1 + A_2$.

Доказательство. Операторы A_1 и A_2 самосопряжены: $A_\alpha^* = A_\alpha$, поскольку

$$(A_\alpha y, v) = (-y_{x_\alpha \bar{x}_\alpha}, v) = (y, -v_{x_\alpha \bar{x}_\alpha}) = (y, A_\alpha v) \quad \forall y, v \in \overset{0}{H}_h \quad (\alpha = 1, 2);$$

перестановочны: $A_1 A_2 = A_2 A_1$, так как

$$A_1 A_2 y = (y_{\bar{x}_2 x_2})_{\bar{x}_1 x_1} = (y_{\bar{x}_1 x_1})_{\bar{x}_2 x_2} = A_2 A_1 y \quad \forall y \in \overset{0}{H}_h;$$

удовлетворяют неравенствам [8]

$$(A_\alpha y, y) \le \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2 \frac{\pi h_\alpha}{2 l_\alpha} \| y \|^2 \le \frac{4}{h_\alpha^2} \| y \|^2 \quad \forall y \in \overset{0}{H}_h,$$

$$(A_\alpha y, y) \ge \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2 l_\alpha} \| y \|^2 \ge \frac{8}{l_\alpha^2} \| y \|^2 \quad \forall y \in \overset{0}{H}_h,$$

т.е. $\frac{8}{l_\alpha^2} I \le A_\alpha \le \frac{4}{h_\alpha^2} I$ $(\alpha = 1, 2)$, I — тождественный оператор, откуда, в частности, следует положительная определенность операторов A_1 и A_2.

Тогда оператор $A_1 A_2$ самосопряжен: $(A_1 A_2)^* = A_1 A_2$, так как

$$(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^* = A_2 A_1 = A_1 A_2;$$

положительно определен: $A_1 A_2 \ge \frac{64}{l_1^2 l_2^2} E$, так как

$$(A_1 A_2 y, y) = (A_1 A_2^{1/2} A_2^{1/2} y, y) = (A_2^{1/2} A_1 A_2^{1/2} y, y) = (A_1 A_2^{1/2} y, A_2^{1/2} y) \ge$$

$$\ge \frac{8}{l_1^2} (A_2^{1/2} y, A_2^{1/2} y) = \frac{8}{l_1^2} (A_2 y, y) \ge \frac{8}{l_1^2} \cdot \frac{8}{l_2^2} \| y \|^2 \quad \forall y \in \overset{0}{H}_h.$$

Отсюда следует самосопряженность и положительная определенность операторов A и A', а также неравенство $A' \le A$ в (5). Докажем теперь оценку $\frac{2}{3} A \le A'$ в (5):

$$A' = A_1 + A_2 - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} A_1 A_2 = A_1 \left(E - \frac{h_2^2}{12} A_2 \right) + A_2 \left(E - \frac{h_1^2}{12} A_1 \right) \ge$$

$$\ge A_1 \left(E - \frac{h_2^2}{12} \cdot \frac{4}{h_2^2} E \right) + A_2 \left(E - \frac{h_1^2}{12} \cdot \frac{4}{h_1^2} E \right) = \frac{2}{3} (A_1 + A_2) = \frac{2}{3} A.$$

Из оценок (5) следуют неравенства (6). Действительно, имеем

$$\| Ay \|^2 = (Ay, Ay) = (A A^{1/2} y, A^{1/2} y) \le \frac{3}{2} (A' A^{1/2} y, A^{1/2} y) =$$

$$= \frac{3}{2} (A' y, Ay) \le \frac{3}{2} \| A' y \| \cdot \| Ay \|,$$

откуда $\frac{2}{3} \| Ay \| \le \| A' y \|$; аналогично $\| A' y \| \le \| Ay \|$. □

Из положительной определенности оператора A' следует однозначная разрешимость задачи (4).

Получим теперь важные для дальнейшего изложения оценки. Имеем

$$\| A'y\|^2 \geq \frac{4}{9}\| A'y\|^2 = \frac{4}{9}(A_1 y + A_2 y,\ A_1 y + A_2 y) =$$

$$= \frac{4}{9}(\| A_1 y\|^2 + \| A_2 y\|^2 + 2(A_1 y,\ A_2 y)) \geq \frac{8}{9}(A_1 y,\ A_2 y) =$$

$$= \frac{8}{9}\sum_{x\in\omega} h_1 h_2\, y_{\bar{x}_1 x_1}\, y_{\bar{x}_2 x_2} = \frac{8}{9}\| B_k^* y\|_*^2 \quad \forall y \in \overset{0}{H}_h,$$

где операторы $B_k^* : \overset{0}{H}_h \to H_h^*$ определяются по формулам:

а) $B_1^* y = -y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}$, б) $B_2^* y = -y_{x_1 x_2}$, в) $B_3^* y = -y_{\bar{x}_1 x_2}$, г) $B_4^* y = -y_{x_1\bar{x}_2}$,

а H_h^* — пространство сеточных функций, определенных на сетке $\widetilde{\omega}$:

а) $\widetilde{\omega} = \omega_1^+ \times \omega_2^+$, б) $\widetilde{\omega} = \omega_1^- \times \omega_2^-$, в) $\widetilde{\omega} = \omega_1^+ \times \omega_2^-$, г) $\widetilde{\omega} = \omega_1^- \times \omega_2^+$,

со скалярным произведением $(y, v)_* = \sum_{x\in\widetilde{\omega}} h_1 h_2\, y(x) v(x)$ и нормой $\| y\|_* = \sqrt{(y,\ y)_*}$.

Для сопряженного к B_k^* оператора $B_k : H_h^* \to \overset{0}{H}_h$ имеем

$$(B_k y, v) = (y, B_k^* v) \quad \forall y \in H_h^*,\ \forall v \in \overset{0}{H}_h,$$

где

а) $B_1 y = -y_{x_1 x_2}$, б) $B_2 y = -y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}$, в) $B_3 y = -y_{x_1\bar{x}_2}$, г) $B_4 y = -y_{\bar{x}_1 x_2}$.

Далее нам понадобится следующее утверждение [9, с. 54].

Лемма 2. Пусть:

1) $A: H \to H$ — линейный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (y, v) и нормой $\| y\| = \sqrt{(y,\ y)}$;

2) $B: H^* \to H$ — линейный оператор, действующий из гильбертова пространства H^* со скалярным произведением $(y, v)_*$ и нормой $\| y\|_* = \sqrt{(y,\ y)_*}$ в гильбертово пространство H $(H^* \supseteq H)$;

3) существует A^{-1};

4) $\| B^* v\|_* \leq \gamma \| Av\|$ $\forall v \in H$, где $B^*: H \to H^*$ — оператор, сопряженный к оператору $B: H^* \to H$.

Тогда

$$\| A^{-1} Bv\| \leq \gamma \| v\|_* \quad \forall v \in H^*.$$

Применяя лемму 2 к операторам $A' : \overset{0}{H}_h \to \overset{0}{H}_h$, $B_k : H_h^* \to \overset{0}{H}_h$, $B_k^* : \overset{0}{H}_h \to H_h^*$ $(k = \overline{1, 4})$, из неравенства

$$\| B_k^* y\|_* \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}\| A'y\| \quad \forall y \in \overset{0}{H}_h$$

получаем оценку

$$\| A'^{-1} B_k y\|_* \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}\| y\|_* \quad \forall y \in H_h^*. \tag{7}$$

ОЦЕНКА РАЗНОСТНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

Обозначим $G(x, \xi) = G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ функцию Грина разностной краевой задачи

$$\Lambda_\xi G(x, \xi) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}\Lambda_{1\xi}\Lambda_{2\xi} G(x, \xi) = -\frac{\delta(x_1, \xi_1)\,\delta(x_2, \xi_2)}{h_1 h_2},\ \xi \in \omega, \tag{8}$$

$$G(x, \xi) = 0,\ \xi \in \gamma,$$

ISSN 1019-5262. Кибернетика и системный анализ, 2018, том 54, № 1

где $\delta(m,n)$ — символ Кронекера. Тогда решение задачи (3) можно представить в виде

$$z(x) = (G(x,\cdot), \psi(\cdot)) = \sum_{\xi \in \omega} h_1 h_2 G(x,\xi)\psi(\xi), \ x \in \omega. \tag{9}$$

Получим оценку функции Грина.

Лемма 3. Имеет место неравенство

$$\| G(x,\cdot) \| \le \frac{3}{2\sqrt{2}} \rho(x), \ x \in \omega ,$$

где $\| G(x,\cdot) \| = \left(\sum_{\xi \in \omega} h_1 h_2 G^2(x,\xi) \right)^{1/2}$,

$$\rho(x) = \min\{\sqrt{x_1 x_2}, \ \sqrt{x_1(l_2 - x_2)}, \ \sqrt{(l_1 - x_1) x_2}, \ \sqrt{(l_1 - x_1)(l_2 - x_2)}\} .$$

Доказательство. Обозначим $H(s)$ функцию Хевисайда: $H(s) = \begin{cases} 1, & s \ge 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$

Задачу (8) можно записать иначе:

$$\Lambda_\xi G(x,\xi) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_{1\xi} \Lambda_{2\xi} G(x,\xi) = -(H(x_1 - \xi_1) H(x_2 - \xi_2))_{\xi_1 \xi_2}, \ \xi \in \omega,$$

$$G(x,\xi) = 0, \ \xi \in \gamma,$$

или в операторном виде:

$$A'_\xi G(x,\xi) = -B_{1\xi}(H(x_1 - \xi_1) H(x_2 - \xi_2)) .$$

Отсюда с учетом неравенства (7) имеем

$$\| G(x,\cdot) \| = \| -A'^{-1}_\xi B_{1\xi}(H(x_1 - \cdot) H(x_2 - \cdot)) \| \le \frac{3}{2\sqrt{2}} \| H(x_1 - \cdot) H(x_2 - \cdot) \|_* =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{\xi \in \omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 H^2(x_1 - \xi_1) H^2(x_2 - \xi_2) \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{\xi_1 \in \omega_1^+} h_1 H^2(x_1 - \xi_1) \right)^{1/2} \left(\sum_{\xi_2 \in \omega_2^+} h_2 H^2(x_2 - \xi_2) \right)^{1/2} = \tag{10}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{\xi_1 = h_1}^{x_1} h_1 \right)^{1/2} \left(\sum_{\xi_2 = h_2}^{x_2} h_2 \right)^{1/2} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{x_1 x_2} .$$

Задачу (8) можно также записать в виде

$$\Lambda_\xi G(x,\xi) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_{1\xi} \Lambda_{2\xi} G(x,\xi) = -(H(\xi_1 - x_1) H(\xi_2 - x_2))_{\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2}, \ \xi \in \omega,$$

$$G(x,\xi) = 0, \ \xi \in \gamma,$$

т.е.

$$A'_\xi G(x,\xi) = -B_{2\xi}(H(\xi_1 - x_1) H(\xi_2 - x_2)) .$$

Применяя оценку (7), получаем

$$\| G(x,\cdot) \| = \| -A'^{-1}_\xi B_{2\xi}(H(\cdot - x_1) H(\cdot - x_2)) \| \le \frac{3}{2\sqrt{2}} \| H(\cdot - x_1) H(\cdot - x_2) \|_* =$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{\xi\in\omega_1^-\times\omega_2^-} h_1h_2H^2(\xi_1-x_1)H^2(\xi_2-x_2)\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{\xi_1\in\omega_1^-} h_1H^2(\xi_1-x_1)\right)^{1/2}\left(\sum_{\xi_2\in\omega_2^-} h_2H^2(\xi_2-x_2)\right)^{1/2}= \qquad (11)$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{\xi_1=x_1}^{l_1-h_1} h_1\right)^{1/2}\left(\sum_{\xi_2=x_2}^{l_2-h_2} h_2\right)^{1/2}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{(l_1-x_1)(l_2-x_2)}.$$

Запишем задачу (8) иначе:

$$\Lambda_\xi G(x,\xi)+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\Lambda_{1\xi}\Lambda_{2\xi}G(x,\xi)=(H(x_1-\xi_1)H(\xi_2-x_2))_{\xi_1\bar{\xi}_2},\ \ \xi\in\omega,$$

$$G(x,\xi)=0,\ \ \xi\in\gamma,$$

или в операторном виде:

$$A'_\xi G(x,\xi)=B_{3\xi}(H(x_1-\xi_1)H(\xi_2-x_2)).$$

Отсюда с учетом неравенства (7) имеем

$$\|G(x,\cdot)\|=\|A'^{-1}_\xi B_{3\xi}(H(x_1-\cdot)H(\cdot-x_2))\|\le\frac{3}{2\sqrt{2}}\|H(x_1-\cdot)H(\cdot-x_2)\|_*=$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{\xi\in\omega_1^+\times\omega_2^-} h_1h_2H^2(x_1-\xi_1)H^2(\xi_2-x_2)\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{\xi_1\in\omega_1^+} h_1H^2(x_1-\xi_1)\right)^{1/2}\left(\sum_{\xi_2\in\omega_2^-} h_2H^2(\xi_2-x_2)\right)^{1/2}= \qquad (12)$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{\xi_1=h_1}^{x_1} h_1\right)^{1/2}\left(\sum_{\xi_2=x_2}^{l_2-h_2} h_2\right)^{1/2}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{x_1(l_2-x_2)}.$$

Задачу (8) можно записать и таким образом:

$$\Lambda_\xi G(x,\xi)+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\Lambda_{1\xi}\Lambda_{2\xi}G(x,\xi)=(H(\xi_1-x_1)H(x_2-\xi_2))_{\bar{\xi}_1\xi_2},\ \ \xi\in\omega,$$

$$G(x,\xi)=0,\ \ \xi\in\gamma,$$

т.е.

$$A'_\xi G(x,\xi)=B_{4\xi}(H(\xi_1-x_1)H(x_2-\xi_2)).$$

Тогда

$$\|G(x,\cdot)\|=\|A'^{-1}_\xi B_{4\xi}(H(\cdot-x_1)H(x_2-\cdot))\|\le\frac{3}{2\sqrt{2}}\|H(\cdot-x_1)H(x_2-\cdot)\|_*=$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{\xi\in\omega_1^-\times\omega_2^+} h_1h_2H^2(\xi_1-x_1)H^2(x_2-\xi_2)\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{\xi_1\in\omega_1^-}h_1H^2(\xi_1-x_1)\right)^{1/2}\left(\sum_{\xi_2\in\omega_2^+}h_2H^2(x_2-\xi_2)\right)^{1/2}= \tag{13}$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{\xi_1=x_1}^{l_1-h_1}h_1\right)^{1/2}\left(\sum_{\xi_2=h_2}^{x_2}h_2\right)^{1/2}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{(l_1-x_1)x_2}\,.$$

Из оценок (10)–(13) следует утверждение леммы. □

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Применим полученную в лемме 3 оценку функции Грина для доказательства основного утверждения.

Теорема 1. Пусть решение $u(x_1,x_2)$ задачи (1) удовлетворяет условию $u\in W_2^6(D)$. Тогда для точности разностной схемы (2) при $0<C_1\le h_1/h_2\le C_2$ имеет место априорная оценка с весом

$$\|\rho^{-1}z\|\le M\,|h|^4\,|u|_{W_2^6(D)},$$

где $\rho(x)=\min\{\sqrt{x_1x_2},\ \sqrt{x_1(l_2-x_2)},\ \sqrt{(l_1-x_1)x_2},\ \sqrt{(l_1-x_1)(l_2-x_2)}\}$, M — не зависящая от h_1 и h_2 константа, $|h|=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$.

Доказательство. Из представления (9) имеем

$$|z(x)|=|(G(x,\cdot),\psi(\cdot))|\le\|G(x,\cdot)\|\cdot\|\psi\|\le\frac{3}{2\sqrt{2}}\rho(x)\|\psi\|,\quad x\in\omega. \tag{14}$$

Рассмотрим множитель $\|\psi\|$, где $\psi(x)=-\eta_{1\bar{x}_1x_1}(x)-\eta_{2\bar{x}_2x_2}(x)$,

$$\eta_\alpha(x)=T_{3-\alpha}u(x)-u(x)-\frac{h_{3-\alpha}^2}{12}u_{\bar{x}_{3-\alpha}x_{3-\alpha}}(x),\ x\in\omega\ \ (\alpha=1,2),$$

оценивая слагаемые $\eta_{1\bar{x}_1x_1}(x)$ и $\eta_{2\bar{x}_2x_2}(x)$.

Рассмотрим функционал $\eta_{1\bar{x}_1x_1}(x)$. С помощью линейной замены $(\xi_\alpha-x_\alpha)/h_\alpha=s_\alpha$, $\alpha=1,2$, отобразим ячейку

$$e(x)=\{\xi=(\xi_1,\xi_2):|\xi_\alpha-x_\alpha|<h_\alpha,\alpha=1,2\}$$

на квадрат $E=\{s=(s_1,s_2):|s_\alpha|<1,\alpha=1,2\}$ и положим

$$u(\xi_1,\xi_2)=u(x_1+h_1s_1,x_2+h_2s_2)=U(s_1,s_2)\,.$$

Функционал $\eta_{1\bar{x}_1x_1}(x)$ преобразуется к виду

$$\eta_{1\bar{x}_1x_1}(x)=\frac{1}{h_1^2}\left[\int_{-1}^{1}(1-|s_2|)(U(1,s_2)-2U(0,s_2)+U(-1,s_2))ds_2-\right.$$
$$-(U(1,0)-2U(0,0)+U(-1,0))-$$
$$-\frac{1}{12}(U(1,1)-2U(1,0)+U(1,-1))+\frac{1}{6}(U(0,1)-2U(0,0)+U(0,-1))-$$
$$\left.-\frac{1}{12}(U(-1,1)-2U(-1,0)+U(-1,-1))\right].$$

Этот функционал ограничен в пространстве $W_2^6(E)$ вследствие вложения $W_2^6(E) \subset C(\bar{E})$ и обращается в нуль на полиномах пятой степени. Например, для полинома x_2^2 имеем

$$\eta_{1\bar{x}_1 x_1}(x) = \left(\frac{1}{h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |\xi - x_2|) \xi^2 d\xi - x_2^2 - \frac{h_2^2}{12} (x_2^2)_{\bar{x}_2 x_2} \right)_{\bar{x}_1 x_1} =$$

$$= \left(\frac{h_2^2}{6} + x_2^2 - x_2^2 - \frac{h_2^2}{12} \cdot 2 \right)_{\bar{x}_1 x_1} = 0 .$$

Тогда согласно лемме Брэмбла–Гильберта [9, с. 29] получим оценку

$$|\eta_{1\bar{x}_1 x_1}(x)| \le \frac{\widetilde{M}}{h_1^2} |U|_{W_2^6(E)},$$

где $\widetilde{M}$ — не зависящая от h_1, h_2 и U постоянная, $|U|_{W_2^6(E)}$ — полунорма в $W_2^6(E)$:

$$|U|^2_{W_2^6(E)} = \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 = 6 \\ (\alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0)}} \iint_E \left(\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} U(s_1, s_2)}{\partial s_1^{\alpha_1} \partial s_2^{\alpha_2}} \right)^2 ds_1 ds_2 .$$

Возвращаясь к переменным ξ_1, ξ_2 и учитывая соотношения $ds_1 ds_2 = \dfrac{d\xi_1 d\xi_2}{h_1 h_2}$, $\dfrac{\partial U}{\partial s_\alpha}(s_1, s_2) = \dfrac{\partial u}{\partial \xi_\alpha}(\xi_1, \xi_2)$ $(\alpha = 1, 2)$, имеем

$$|\eta_{1\bar{x}_1 x_1}(x)| \le \frac{\widetilde{M}}{h_1^2} \frac{|h|^6}{\sqrt{h_1 h_2}} |u|_{W_2^6(e(x))},$$

откуда при условии $0 < C_1 \le h_1 / h_2 \le C_2$ следует неравенство

$$|\eta_{1\bar{x}_1 x_1}(x)| \le M_1 \frac{|h|^4}{\sqrt{h_1 h_2}} |u|_{W_2^6(e(x))}, \quad x \in \omega . \tag{15}$$

Аналогично оценивается и функционал $\eta_{2\bar{x}_2 x_2}(x)$:

$$|\eta_{2\bar{x}_2 x_2}(x)| \le M_2 \frac{|h|^4}{\sqrt{h_1 h_2}} |u|_{W_2^6(e(x))}, \quad x \in \omega . \tag{16}$$

В оценках (15) и (16) константы M_1 и M_2 не зависят от h_1, h_2 и u; $|u|_{W_2^6(e(x))}$ — полунорма в $W_2^6(e(x))$.

Из неравенств (15) и (16) следует оценка

$$\|\psi\| \le \|\eta_{1\bar{x}_1 x_1}\| + \|\eta_{2\bar{x}_2 x_2}\| \le$$

$$\le M_1 |h|^4 \left(\sum_{x \in \omega} |u|^2_{W_2^6(e(x))} \right)^{1/2} + M_2 |h|^4 \left(\sum_{x \in \omega} |u|^2_{W_2^6(e(x))} \right)^{1/2} = M_3 |h|^4 |u|_{W_2^6(D)},$$

которая с (14) дает неравенство

$$|z(x)| \le M_4 \, \rho(x) |h|^4 |u|_{W_2^6(D)}, \quad x \in \omega. \tag{17}$$

Отсюда окончательно получаем оценку с весом $\|\rho^{-1} z\| \le M |h|^4 |u|_{W_2^6(D)}$; здесь константы M_3, M_4, M не зависят от h_1, h_2 и u, а $|u|_{W_2^6(D)}$ — полунорма в $W_2^6(D)$. $\square$

Оценка (17) показывает, что разностная схема (2) имеет четвертый порядок точности, причем точность выше вблизи сторон прямоугольника D, что отражает влияние краевого условия Дирихле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галба Е.Ф. О порядке точности разностной схемы для уравнения Пуассона со смешанным граничным условием. *Оптимизация алгоритмов программного обеспечения ЭВМ.* Киев: Ин.-т кибернетики имени В.М. Глушкова АН УССР, 1985. С. 30–34.
2. Makarov V. On a priori estimate of difference schemes giving an account of the boundary effect. C.R. Acad. Bulg. Sci. (Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences). 1989. Vol. 42, N 5. P. 41–44.
3. Makarov V.L., Demkiv L.I. Weight uniform accuracy estimate of finite-difference method for Poisson equation taking into account boundary effect. Numerical Analysis and Its Application, 4th International Conference, Lozentz, Bulgaria, 2008, June 16–20. P. 92–103.
4. Майко Н.В., Рябичев В.Л. Оценка точности разностной схемы для двумерного уравнения Пуассона с учетом эффекта от краевых условий. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. Т. 52, № 5. С. 113–124.
5. Майко Н.В. Оценки точности разностных схем для одномерного параболического уравнения с учетом эффекта от начальных и краевых условий. *Кибернетика и системный анализ.* 2014. № 5. С. 154–163.
6. Mayko N.V. The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for the two-dimensional heat equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2013. N 3(113). P. 91–106.
7. Майко Н.В. Улучшенные оценки точности разностной схемы для двумерного параболического уравнения с учетом эффекта от краевых и начальных условий. *Кибернетика и системный анализ.* 2017. Т. 53, № 1. С. 99–107.
8. Samarskii A.A. The theory of difference schemes. New York: Marcel Dekker, Inc., 2001. 762 p.
9. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. Москва: Высшая школа, 1987. 296 с.

Надійшла до редакції 14.12.2016

Н.В. Майко

ОЦІНКА З ВАГОЮ ТОЧНОСТІ РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ПУАССОНА З УРАХУВАННЯМ ЕФЕКТУ ВІД КРАЙОВОЇ УМОВИ ДІРІХЛЕ

Анотація. Отримано оцінку з вагою точності різницевої схеми підвищеного порядку апроксимації на дев'ятиточковому шаблоні для першої крайової задачі для рівняння Пуассона в прямокутнику на узагальнених розв'язках. В оцінці враховано вплив крайової умови Діріхле і встановлено, що точність схеми, порядок якої за кроком дорівнює чотирьом у внутрішніх вузлах сіткової множини, збільшується відповідно на півпорядку і на порядок поблизу сторін і кутів прямокутника.

Ключові слова: рівняння Пуассона, крайова задача, умова Діріхле, різницева схема, оцінка точності з вагою, врахування впливу крайової умови.

N.V. Mayko

THE WEIGHTED ERROR ESTIMATE OF THE FINITE-DIFFERENCE SCHEME OF THE INCREASED APPROXIMATION ORDER FOR THE TWO-DIMENSIONAL POISSON EQUATION WITH ALLOWANCE FOR THE DIRICHLET BOUNDARY CONDITION

Abstract. We obtain the weighted error estimate of the finite-difference scheme of the increased approximation order on a nine-point template for the first boundary-value problem for Poisson's equation in a rectangle on generalized solutions. The estimate takes into account the influence of the Dirichlet boundary condition and shows that the accuracy order is higher near the sides of the rectangle than at the inner points of the mesh set.

Keywords: Poisson's equation, boundary value problem, Dirichlet's boundary condition, finite-difference scheme, weighted error estimate, boundary effect.

Майко Наталия Валентиновна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: mayko@knu.ua.