УДК 519.21

Ю.В. ЖЕРНОВЫЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ЭРЛАНГОВСКИМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Аннотация. Предложен метод исследования систем обслуживания $M/E_s/1/m$, $E_r/E_s/1/m$ и $E_r/M/n/m$, включая случай $m=\infty$. Получены рекуррентные соотношения для вычисления стационарного распределения числа заявок в системе и стационарных характеристик. Построенные алгоритмы проверены на примерах с использованием имитационных моделей, созданных с помощью инструментальных средств GPSS World.

Ключевые слова: система обслуживания, эрланговские распределения, метод фиктивных фаз, рекуррентные соотношения, стационарные характеристики.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ эффективности функционирования систем массового обслуживания с непуассоновским входящим потоком и распределением времени обслуживания, отличным от показательного, является достаточно сложным и выполняется только для простых частных случаев. В настоящее время разработаны методики, обеспечивающие возможность проведения анализа немарковских систем с помощью марковских моделей. Такой подход сводится к использованию метода фиктивных фаз, основанного на представлении непоказательных распределений в виде распределений фазового типа [1–6]. Исследуемая система «марковизируется» представлением исходных распределений в виде последовательной (распределение Эрланга), параллельной (гиперэкспоненциальное распределение) или параллельно-последовательной системы фаз с показательно распределенным временем пребывания в каждой из них.

Учет фаз требует фиксации соответствующих состояний и приводит к увеличению громоздкости описания системы обслуживания с распределениями фазового типа. Непосредственное решение системы уравнений для стационарных вероятностей состояний может оказаться невозможным ввиду большой размерности матрицы коэффициентов системы. Наиболее целесообразным является алгоритмический подход, предполагающий получение решения систем уравнений либо в виде рекуррентных формул, либо в виде матрично-рекуррентных соотношений и алгоритмов. Матрично-геометрический подход, предложенный в [1, 3, 4], основан на предварительном анализе решаемой системы уравнений, в результате которого она разбивается на подсистемы меньшего порядка, связанные между собой рекуррентными зависимостями. Если матрицы коэффициентов этих подсистем удается обратить, то вследствие их рекуррентной связанности можно получить рекуррентные формулы в матричном или скалярном виде для решений исходной системы.

Разработанный в [2, 5, 6] матричный рекуррентно-итерационный метод решения векторно-матричных уравнений баланса переходов между состояниями для систем обслуживания с распределениями фазового типа имеет ряд недостатков: выполнение условий сходимости итераций приводит к дополнительным требованиям, предъявляемым к матрицам переходов между состояниями, а наличие самих итераций увеличивает время счета.

Цель настоящей работы — построение рекуррентных алгоритмов для вычисления стационарного распределения числа заявок в следующих системах обслуживания с эрланговскими распределениями: $M/E_s/1/m$, $E_r/E_s/1/m$ и $E_r/M/n/m$, включая случай $m=\infty$. Предлагаемый метод основан на использовании прямых рекуррентных соотношений, следующих непосредственно из уравнений системы для стационарных вероятностей. В отличие от рекуррентно-итерационного метода он не содержит итераций, а в отличие от матрично-геометрического подхода он не предполагает предварительных преобразований решаемой системы уравнений. Аналогичный подход использовался ранее в [7, 8], где разработаны рекуррентные алгоритмы для систем $M/E_2/2/m$, $M/E_2/2/\infty$, $M/E_2/3/m$ и $M/E_2/3/\infty$, а также для таких же систем со случайным отбрасыванием заявок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ $M/E_s/1/m$

Рассмотрим систему $M/E_s/1/m$, где m — максимальное число заявок, которые одновременно могут находиться в очереди. Входящий поток заявок — простейший, т.е. интервалы времени между моментами прибытия соседних по времени заявок являются независимыми случайными величинами, показательно распределенными с параметром λ. Время обслуживания каждой заявки распределено согласно обобщенному закону Эрланга порядка s, т.е. представляет сумму s независимых случайных величин, показательно распределенных соответственно с параметрами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$.

На основании метода фаз введем следующие обозначения для состояний системы: s_0 — в системе нет заявок; s_{ki} — в системе k заявок $(1 \le k \le m+1)$, обслуживаемая заявка пребывает на i-й фазе обслуживания $(1 \le i \le s)$. Стационарные вероятности пребывания системы в состояниях s_0 и s_{ki} обозначим p_0 и p_{ki} соответственно. Для определения стационарных вероятностей получим систему уравнений:

$$
\begin{gathered}
-\lambda p_0 + \mu_s p_{1s} = 0; \\
-(\lambda + \mu_1)\, p_{11} + \lambda p_0 + \mu_s p_{2s} = 0; \\
-(\lambda + \mu_i)\, p_{1i} + \mu_{i-1} p_{1,\, i-1} = 0, \quad 2 \le i \le s; \\
-(\lambda + \mu_1)\, p_{k1} + \lambda p_{k-1,1} + \mu_s p_{k+1,\, s} = 0, \quad 2 \le k \le m; \\
-(\lambda + \mu_i)\, p_{ki} + \lambda p_{k-1,\, i} + \mu_{i-1} p_{k,\, i-1} = 0, \quad 2 \le k \le m, \quad 2 \le i \le s; \\
-\mu_1 p_{m+1,1} + \lambda p_{m1} = 0; \\
-\mu_i p_{m+1,\, i} + \lambda p_{mi} + \mu_{i-1} p_{m+1,\, i-1} = 0, \quad 2 \le i \le s;
\end{gathered}
\tag{1}
$$

$$
p_0 + \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^{s} p_{ki} = 1. \tag{2}
$$

Введем обозначения

$$
\alpha_i = \frac{\lambda}{\mu_i}, \quad 1 \le i \le s; \qquad \eta_i = \frac{\mu_i}{\mu_1}, \quad 2 \le i \le s; \qquad \tilde{p}_{ki} = \frac{p_{ki}}{p_0}, \quad 1 \le k \le m+1, \ 1 \le i \le s,
$$

тогда с помощью уравнений (1) находим

$$
\tilde{p}_{1s} = \alpha_s; \ \tilde{p}_{1i} = \frac{\alpha_1 + \eta_{i+1}}{\eta_i} \tilde{p}_{1,\, i+1}, \ i = s-1, s-2, \ldots, 1;
$$

$$\widetilde{p}_{2s} = \frac{1}{\eta_s}((\alpha_1+1)\widetilde{p}_{11} - \alpha_1);$$

$$\widetilde{p}_{k\,i} = \frac{1}{\eta_i}((\alpha_1+\eta_{i+1})\,\widetilde{p}_{k,\,i+1} - \alpha_1 \widetilde{p}_{k-1,\,i+1}), \quad 2 \le k \le m, \quad i = s-1, s-2, \ldots, 1;$$

$$\widetilde{p}_{k\,s} = \frac{1}{\eta_s}((\alpha_1+1)\widetilde{p}_{k-1,1} - \alpha_1 \widetilde{p}_{k-2,1}), \quad 3 \le k \le m; \tag{3}$$

$$\widetilde{p}_{m+1,1} = \alpha_1 \widetilde{p}_{m\,1}; \qquad \widetilde{p}_{m+1,\,i} = \frac{1}{\eta_i}(\alpha_1 \widetilde{p}_{m\,i} + \eta_{i-1}\widetilde{p}_{m+1,\,i-1}), \quad 2 \le i \le s.$$

Рекуррентные соотношения (3) позволяют вычислять неизвестные $\widetilde{p}_{k\,i}$ в последовательности $\widetilde{p}_{1s}$; $\widetilde{p}_{1i}$, $i = s-1, s-2, \ldots, 1$; $\widetilde{p}_{2s}$; $\widetilde{p}_{2i}$, $i = s-1, s-2, \ldots, 1$; …, $\widetilde{p}_{m\,s}$; $\widetilde{p}_{m\,i}$, $i = s-1, s-2, \ldots, 1$; $\widetilde{p}_{m+1,1}$; $\widetilde{p}_{m+1,\,i}$, $2 \le i \le s$. Затем, используя условие нормировки (2), определяем стационарные вероятности по формулам

$$p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{m+1} \widetilde{p}_k\right)^{-1}, \quad \widetilde{p}_k = \sum_{i=1}^{s} \widetilde{p}_{k\,i}, \; p_k = p_0 \widetilde{p}_k, \; 1 \le k \le m+1,$$

где p_k — стационарная вероятность наличия в системе k заявок.

Стационарные характеристики системы $M/E_s/1/m$, а именно среднее число заявок в системе $\mathbf{E}(C)$, среднюю длину очереди $\mathbf{E}(Q)$, вероятность обслуживания поступившей заявки (относительную пропускную способность системы) $\mathbf{P}_{\text{sv}}$ и среднее время ожидания $\mathbf{E}(W)$, находим по формулам

$$\mathbf{E}(C) = \sum_{k=1}^{m+1} k p_k, \quad \mathbf{E}(Q) = \sum_{k=2}^{m+1} (k-1) p_k; \tag{4}$$

$$\mathbf{P}_{\text{sv}} = 1 - p_{m+1}, \; \mathbf{E}(W) = \frac{\mathbf{E}(Q)}{\lambda \mathbf{P}_{\text{sv}}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ $E_r / E_s / 1 / m$

Рассмотрим систему $E_r/E_s/1/m$, которая отличается от системы $M/E_s/1/m$ тем, что интервалы времени между моментами прибытия соседних по времени заявок представляют сумму r независимых случайных величин, показательно распределенных соответственно с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.

Введем следующие обозначения для состояний системы: $s_{0\,i}$ — в системе нет заявок, интервал времени до прибытия первой заявки находится в i-й фазе ($1 \le i \le r$); $s_{k\,i\,j}$ — в системе k заявок ($1 \le k \le m+1$), интервал времени до прибытия очередной заявки находится в i-й фазе ($1 \le i \le r$), обслуживаемая заявка пребывает на j-й фазе обслуживания ($1 \le j \le s$). Стационарные вероятности пребывания системы в состояниях $s_{0\,i}$ и $s_{k\,i\,j}$ обозначим $p_{0\,i}$ и $p_{k\,i\,j}$ соответственно. Для определения стационарных вероятностей получим систему уравнений:

$$-\lambda_1 p_{01} + \mu_s p_{11s} = 0;$$

$$-\lambda_i p_{0\,i} + \lambda_{i-1} p_{0,\,i-1} + \mu_s p_{1\,i\,s} = 0, \; 2 \le i \le r;$$

$$-(\lambda_1 + \mu_1) p_{111} + \lambda_r p_{0r} + \mu_s p_{21s} = 0;$$

$$-(\lambda_1 + \mu_j) p_{11j} + \mu_{j-1} p_{11,\,j-1} = 0, \; 2 \le j \le s;$$

$$-(\lambda_1 + \mu_1) p_{k11} + \lambda_r p_{k-1,\,r1} + \mu_s p_{k+1,1s} = 0, \; 2 \le k \le m;$$

$$-(\lambda_1 + \mu_j) p_{k1j} + \lambda_r p_{k-1,\,rj} + \mu_{j-1} p_{k1,\,j-1} = 0, \; 2 \le k \le m, \; 2 \le j \le s;$$

$$-(\lambda_i+\mu_1)p_{ki1}+\lambda_{i-1}p_{k,i-1,1}+\mu_s p_{k+1,is}=0,\ 1\le k\le m,\ 2\le i\le r;$$

$$-(\lambda_i+\mu_j)p_{kij}+\lambda_{i-1}p_{k,i-1,j}+\mu_{j-1}p_{ki,j-1}=0,\ 1\le k\le m,\ 2\le i\le r,\ 2\le j\le s;$$

$$-(\lambda_1+\mu_1)p_{m+1,11}+\lambda_r(p_{mr1}+p_{m+1,r1})=0;$$

$$-(\lambda_i+\mu_1)p_{m+1,i1}+\lambda_{i-1}p_{m+1,i-1,1}=0,\ 2\le i\le r; \tag{5}$$

$$-(\lambda_1+\mu_j)p_{m+1,1j}+\lambda_r(p_{mrj}+p_{m+1,rj})+\mu_{j-1}p_{m+1,1,j-1}=0,\ 2\le j\le s;$$

$$-(\lambda_i+\mu_j)p_{m+1,ij}+\lambda_{i-1}p_{m+1,i-1,j}+\mu_{j-1}p_{m+1,i,j-1}=0,\ 2\le i\le r,\ 2\le j\le s;$$

$$\sum_{i=1}^{r}p_{0i}+\sum_{k=1}^{m+1}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}p_{kij}=1. \tag{6}$$

Введем обозначения

$$\alpha_{ij}=\frac{\lambda_i}{\mu_j},\ 1\le i\le r,\ 1\le j\le s;\ \eta_j=\frac{\mu_j}{\mu_1},\ 2\le j\le s;\ \tilde p_{0i}=\frac{p_{0i}}{p_{01}},\ 1\le i\le r;$$

$$\tilde p_{kij}=\frac{p_{kij}}{p_{01}},\ 1\le k\le m+1,\ 1\le i\le r,\ 1\le j\le s;\ \tilde p_{0i}=q_i,\ 1\le i\le r,\ q_1=1,$$

тогда с помощью уравнений (5) находим

$$\tilde p_{11s}=\alpha_{1s};\ \tilde p_{11j}=\frac{\alpha_{11}+\eta_{j+1}}{\eta_j}\tilde p_{11,j+1},\ j=s-1,s-2,\dots,1;$$

$$\tilde p_{1is}=\frac{1}{\eta_s}(\alpha_{i1}q_i-\alpha_{i-1,1}q_{i-1}),\ 2\le i\le r;$$

$$\tilde p_{21s}=\frac{1}{\eta_s}((\alpha_{11}+1)\tilde p_{111}-\alpha_{r1}q_r);$$

$$\tilde p_{k1s}=\frac{1}{\eta_s}((\alpha_{11}+1)\tilde p_{k-1,11}-\alpha_{r1}\tilde p_{k-2,r1}),\ 3\le k\le m+1;$$

$$\tilde p_{k1j}=\frac{1}{\eta_j}((\alpha_{11}+\eta_{j+1})\tilde p_{k,1,j+1}-\alpha_{r1}\tilde p_{k-1,r,j+1}),\ 2\le k\le m,\ j=s-1,s-2,\dots,1;$$

$$\tilde p_{kis}=\frac{1}{\eta_s}((\alpha_{i1}+1)\tilde p_{k-1,i1}-\alpha_{i-1,1}\tilde p_{k-1,i-1,1}),\ 2\le k\le m+1,\ 2\le i\le r; \tag{7}$$

$$\tilde p_{kij}=\frac{1}{\eta_j}((\alpha_{i1}+\eta_{j+1})\tilde p_{ki,j+1}-\alpha_{i-1,1}\tilde p_{k,i-1,j+1}),$$

$$1\le k\le m+1,\ 2\le i\le r,\ j=s-1,s-2,\dots,1;$$

$$\tilde p_{m+1,1j}=\frac{1}{\eta_j}((\alpha_{11}+\eta_{j+1})\tilde p_{m+1,1,j+1}-\alpha_{r1}(\tilde p_{mr,j+1}+\tilde p_{m+1,r,j+1}),$$

$$j=s-1,s-2,\dots,1.$$

Рекуррентные соотношения (7) позволяют вычислять неизвестные $\tilde p_{kij}$ как функции от q_i, $2\le i\le r$, в такой последовательности:

$$\tilde p_{11s};\ \tilde p_{11j},\ j=s-1,s-2,\dots,1;\ \tilde p_{1is},\ 2\le i\le r;\ \tilde p_{12j},\ j=s-1,s-2,\dots,1;$$

$$\tilde p_{13j},\ j=s-1,s-2,\dots,1;\dots,\ \tilde p_{1rj},\ j=s-1,s-2,\dots,1;$$

$$\widetilde{p}_{21s};\ \widetilde{p}_{21j},\ j=s-1, s-2, \ldots, 1;\ \widetilde{p}_{2is},\ 2\le i\le r;\ \widetilde{p}_{22j},\ j=s-1, s-2, \ldots, 1;$$

$$\widetilde{p}_{23j},\ j=s-1, s-2, \ldots, 1; \ldots,\ \widetilde{p}_{2rj},\ j=s-1, s-2, \ldots, 1;$$

....

$$\widetilde{p}_{m1s};\ \widetilde{p}_{m1j},\ j=s-1, s-2, \ldots, 1;\ \widetilde{p}_{mis},\ 2\le i\le r;\ \widetilde{p}_{m2j},\ j=s-1, s-2, \ldots, 1;$$

$$\widetilde{p}_{m3j},\ j=s-1, s-2, \ldots, 1; \ldots,\ \widetilde{p}_{mrj},\ j=s-1, s-2, \ldots, 1;$$

$$\widetilde{p}_{m+1,1s};\ \widetilde{p}_{m+1,is},\ 2\le i\le r;\ \widetilde{p}_{m+1,i,s-1},\ 2\le i\le r;\ \widetilde{p}_{m+1,1,s-1};$$

$$\widetilde{p}_{m+1,i,s-2},\ 2\le i\le r;\ \widetilde{p}_{m+1,1,s-2};$$

....

$$\widetilde{p}_{m+1,i1},\ 2\le i\le r;\ \widetilde{p}_{m+1,11}.$$

Для определения неизвестных q_i, $2\le i\le r$, можно использовать любые $r-1$ уравнений из следующих r уравнений системы (5):

$$-(\lambda_1+\mu_1)p_{m+1,11}+\lambda_r(p_{mr1}+p_{m+1,r1})=0;$$

$$-(\lambda_i+\mu_1)p_{m+1,i1}+\lambda_{i-1}p_{m+1,i-1,1}=0,\quad 2\le i\le r.$$

Эти уравнения не были задействованы при получении соотношений (7). Затем, используя условие нормировки (6), определяем стационарные вероятности по формулам

$$p_{01}=\left(1+\sum_{i=2}^{r}\widetilde{p}_{0i}+\sum_{k=1}^{m+1}\widetilde{p}_k\right)^{-1};\ \widetilde{p}_0=\sum_{i=1}^{r}\widetilde{p}_{0i};\ \widetilde{p}_k=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\widetilde{p}_{kij},\ 1\le k\le m+1;$$

$$p_k=p_{01}\widetilde{p}_k,\ 0\le k\le m+1.$$

Стационарные характеристики системы $E_r/E_s/1/m$ находим по формулам (4) и с помощью равенств

$$\mathbf{E}(W)=\frac{\mathbf{E}(Q)}{\bar{\lambda}P_{\text{sv}}},\ \mathbf{P}_{\text{sv}}=\frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}}(1-p_0),\ \bar{\lambda}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\lambda_i}},\ \bar{\mu}=\frac{1}{\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{\mu_j}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ $E_r/M/n/m$

Рассмотрим n-канальную систему $E_r/M/n/m$, в которой интервалы времени между моментами прибытия соседних по времени заявок представляет собой сумму r независимых случайных величин, показательно распределенных с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ соответственно, а время обслуживания каждой заявки распределено по показательному закону с параметром μ.

Введем следующие обозначения для состояний системы: s_{ki} — в системе k заявок $(0\le k\le m+n)$, интервал времени до прибытия очередной заявки находится в i-й фазе $(1\le i\le r)$. Стационарные вероятности пребывания системы в состояниях s_{ki} обозначим p_{ki}. Для определения стационарных вероятностей получим систему уравнений:

$$-\lambda_1 p_{01}+\mu p_{11}=0;$$

$$-\lambda_i p_{0i}+\lambda_{i-1}p_{0,i-1}+\mu p_{1i}=0,\ 2\le i\le r;$$

$$-(\lambda_1+k\mu)p_{k1}+\lambda_r p_{k-1,\,r}+(k+1)\mu p_{k+1,1}=0,\ 1\le k\le n-1;$$

$$-(\lambda_i+k\mu)p_{k\,i}+\lambda_{i-1}p_{k,\,i-1}+(k+1)\mu p_{k+1,\,i}=0,\ 2\le i\le r,\ 1\le k\le n-1;$$

$$-(\lambda_1+n\mu)p_{k1}+\lambda_r p_{k-1,\,r}+n\mu p_{k+1,1}=0,\ n\le k\le n+m-1; \tag{8}$$

$$-(\lambda_i+n\mu)p_{k\,i}+\lambda_{i-1}p_{k,\,i-1}+n\mu p_{k+1,\,i}=0,\ 2\le i\le r,\ n\le k\le n+m-1;$$

$$-(\lambda_1+n\mu)p_{n+m,1}+\lambda_r(p_{n+m-1,\,r}+p_{n+m,\,r})=0;$$

$$-(\lambda_i+n\mu)p_{n+m,\,i}+\lambda_{i-1}p_{n+m,\,i-1}=0,\ 2\le i\le r;$$

$$\sum_{k=0}^{n+m}\sum_{i=1}^{r}p_{k\,i}=1. \tag{9}$$

Введем обозначения

$$\alpha_i=\frac{\lambda_i}{\mu},\ 1\le i\le r;\ \tilde{p}_{k\,i}=\frac{p_{k\,i}}{p_{n+m,\,r}},\ 0\le k\le n+m,\ 1\le i\le r,$$

тогда с помощью уравнений (8) находим:

$$\tilde{p}_{n+m,\,r}=1;\ \tilde{p}_{n+m,\,i}=\frac{\alpha_{i+1}+n}{\alpha_i}\tilde{p}_{n+m,\,i+1},\ i=r-1,r-2,\ldots,1;$$

$$\tilde{p}_{n+m-1,\,r}=\frac{\alpha_1+n}{\alpha_r}\tilde{p}_{n+m,1}-1;$$

$$\tilde{p}_{ki}=\frac{1}{\alpha_i}((\alpha_{i+1}+n)\tilde{p}_{k,\,i+1}-n\tilde{p}_{k+1,\,i+1}),\ k=n+m-1,\ n+m-2,\ldots,\ n;$$

$$i=r-1,r-2,\ldots,1;$$

$$\tilde{p}_{kr}=\frac{1}{\alpha_r}((\alpha_1+n)\tilde{p}_{k+1,1}-n\tilde{p}_{k+2,1}),\ k=n+m-2,n+m-3,\ldots,\ n-1;$$

$$\tilde{p}_{kr}=\frac{1}{\alpha_r}((\alpha_1+k+1)\tilde{p}_{k+1,\,1}-(k+2)\tilde{p}_{k+2,1}),\ k=n-2,n-3,\ldots,0; \tag{10}$$

$$\tilde{p}_{ki}=\frac{1}{\alpha_i}((\alpha_{i+1}+k)\tilde{p}_{k,\,i+1}-(k+1)\tilde{p}_{k+1,\,i+1}),\ k=n-1,n-2,\ldots,1;\ i=r-1,r-2,\ldots,1;$$

$$\tilde{p}_{0i}=\frac{1}{\alpha_i}(\alpha_{i+1}\tilde{p}_{0,\,i+1}-\tilde{p}_{1,\,i+1}),\ i=r-1,r-2,\ldots,1.$$

Рекуррентные соотношения (10) позволяют вычислять неизвестные $\tilde{p}_{ki}$ в такой последовательности:

$$\tilde{p}_{n+m,\,i},\ i=r-1,r-2,\ldots,1;\ \tilde{p}_{n+m-1,\,r};$$

$$\tilde{p}_{n+m-1,\,i},\ i=r-1,r-2,\ldots,1;\ \tilde{p}_{n+m-2,\,r};$$

$$\tilde{p}_{n+m-2,\,i},\ i=r-1,r-2,\ldots,1;\ \tilde{p}_{n+m-3,\,r};$$

....

$$\tilde{p}_{1i},\ i=r-1,r-2,\ldots,1;\ \tilde{p}_{0r};$$

$$\tilde{p}_{0i},\ i=r-1,r-2,\ldots,1.$$

Используя условие нормировки (9), определяем стационарные вероятности по формулам

$$p_{n+m,\,r}=\left(1+\sum_{i=1}^{r-1}\tilde{p}_{n+m,\,i}+\sum_{k=0}^{n+m-1}\tilde{p}_k\right)^{-1};$$

$$\tilde{p}_k=\sum_{i=1}^{r}\tilde{p}_{ki},\ p_k=p_{n+m,r}\tilde{p}_k,\ 0\le k\le n+m.$$

Стационарные характеристики системы $E_r / M / n / m$ находим по формулам

$$\mathbf{E}(C) = \sum_{k=1}^{m+n} k p_k, \quad \mathbf{E}(Q) = \sum_{k=1}^{m} k p_{n+k}; \quad \mathbf{E}(W) = \frac{\mathbf{E}(Q)}{\bar{\lambda}\mathbf{P}_{\text{sv}}};$$

$$\mathbf{P}_{\text{sv}} = \frac{\mu}{\bar{\lambda}}\left(\sum_{k=1}^{n-1} k p_k + n\sum_{k=n}^{n+m} p_k\right), \quad \bar{\lambda} = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\lambda_i}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ $M / E_s / 1 / \infty$, $E_r / E_s / 1 / \infty$, $E_r / M / n / \infty$

Для систем $M / E_s / 1 / \infty$, $E_r / E_s / 1 / \infty$, $E_r / M / n / \infty$ ограничение на длину очереди отсутствует и для существования стационарного распределения числа заявок для этих систем должны выполняться соответственно условия $\lambda < \bar{\mu}$, $\bar{\lambda} < \bar{\mu}$, $\bar{\lambda} < n\mu$.

Значения стационарных вероятностей p_k $(k \ge 0)$ для системы $M / E_s / 1 / \infty$ можно найти путем использования рекуррентных соотношений (3), записанных в следующем виде:

$$\tilde{p}_{1s} = \alpha_s; \ \tilde{p}_{1i} = \frac{\alpha_1 + \eta_{i+1}}{\eta_i} \tilde{p}_{1,\, i+1}, \ i = s-1, s-2, \ldots, 1;$$

$$\tilde{p}_{2s} = \frac{1}{\eta_s}((\alpha_1 + 1)\tilde{p}_{11} - \alpha_1);$$

$$\tilde{p}_{k\,i} = \frac{1}{\eta_i}((\alpha_1 + \eta_{i+1})\tilde{p}_{k,\, i+1} - \alpha_1 \tilde{p}_{k-1,\, i+1}), \ k \ge 2, \ i = s-1, s-2, \ldots, 1;$$

$$\tilde{p}_{k\,s} = \frac{1}{\eta_s}((\alpha_1 + 1)\tilde{p}_{k-1,1} - \alpha_1 \tilde{p}_{k-2,1}), \ k \ge 3;$$

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\bar{\mu}}, \ \tilde{p}_k = \sum_{i=1}^{s} \tilde{p}_{k\,i}, \ p_k = p_0 \tilde{p}_k, \ k \ge 1.$$

Для системы $E_r / E_s / 1 / \infty$ имеем $p_0 = 1 - \dfrac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}}$. Отыскание приближенных значений стационарных вероятностей p_k $(k \ge 1)$ для системы $E_r / E_s / 1 / \infty$ и p_k $(k \ge 0)$ для системы $E_r / M / n / \infty$ сводится к использованию соответственно рекуррентных соотношений (7) и (10) для больших значений m. Пусть для этих систем $N = n + m$. Число N выбираем настолько большим, чтобы выполнялось одно из условий (или каждое условие), задающих точность определения стационарных вероятностей. Эти условия можно задать, например, в виде

$$\mathbf{E}(C)_{(N)} - \mathbf{E}(C)_{(N-1)} < \varepsilon_1, \quad \mathbf{E}(Q)_{(N)} - \mathbf{E}(Q)_{(N-1)} < \varepsilon_2. \qquad (11)$$

Здесь ε_1, ε_2 — положительные числа, задающие требуемую точность вычислений; $\mathbf{E}(C)_{(N)}$ и $\mathbf{E}(Q)_{(N)}$ — приближенные значения стационарных характеристик $\mathbf{E}(C)$ и $\mathbf{E}(Q)$, вычисленные с использованием стационарных вероятностей $p_{k(N)}$ $(0 \le k \le N)$; $p_{k(N)}$ — приближенное значение стационарной вероятности p_k, полученное в результате усечения бесконечной системы уравнений для стационарных вероятностей.

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим примеры определения стационарных характеристик следующих систем обслуживания: $M / E_{100} / 1 / 10$, $E_3 / E_{50} / 1 / 10$, $E_{100} / M / 10 / 10$, $E_2 / M / 5 / \infty$.

Таблица 1

Число заявок в системе, k	Значения стационарных вероятностей p_k			
	$M / E_{100} / 1 / 10$		$E_3 / E_{50} / 1 / 10$	
	Рекуррентный метод	GPSS World	Рекуррентный метод	GPSS World
0	0,003606	0,003634	0,000004	0,000003
1	0,008282	0,008254	0,000032	0,000035
2	0,013205	0,013315	0,000105	0,000118
3	0,019430	0,019286	0,000305	0,000291
4	0,028232	0,028171	0,000881	0,000883
5	0,040973	0,040644	0,002545	0,002613
6	0,059464	0,059122	0,007357	0,007595
7	0,086301	0,086010	0,021265	0,021211
8	0,125249	0,125691	0,061430	0,061851
9	0,181775	0,181820	0,175503	0,175747
10	0,263811	0,264213	0,433036	0,431969
11	0,169672	0,169840	0,297536	0,297684

Таблица 2

Число заявок в системе, k	Значения стационарных вероятностей p_k			
	$E_{100} / M / 10 / 10$		$E_2 / M / 5 / \infty$	
	Рекуррентный метод	GPSS World	Рекуррентный метод	GPSS World
0	$5{,}57 \cdot 10^{-10}$	0,000000	0,005031	0,005173
1	$2{,}42 \cdot 10^{-8}$	0,000001	0,031107	0,031166
2	$4{,}38 \cdot 10^{-7}$	0,000001	0,084558	0,083728
3	0,000005	0,000006	0,137913	0,136979
4	0,000031	0,000023	0,154252	0,153420
5	0,000152	0,000154	0,127862	0,127433
6	0,000552	0,000555	0,100017	0,100434
7	0,001555	0,001439	0,078236	0,078978
8	0,003483	0,003183	0,061199	0,061907
9	0,006330	0,006131	0,047872	0,048805
10	0,009535	0,009529	0,037446	0,038017
11	0,013542	0,013490	0,029292	0,029510
12	0,019235	0,018833	0,022913	0,023252
13	0,027319	0,027174	0,017923	0,018196
14	0,038802	0,038687	0,014020	0,013870
15	0,055112	0,054987	0,010967	0,010991
16	0,078282	0,078169	0,008579	0,008425
17	0,111178	0,111005	0,006710	0,006581
18	0,157293	0,157165	0,005249	0,004911
19	0,216249	0,216963	0,004106	0,003834
20	0,261344	0,262504	0,003212	0,003156
30	–	–	0,000275	0,000341
40	–	–	0,000024	0,000029
50	–	–	$2{,}03 \cdot 10^{-6}$	0,000005

Таблица 3

Система	Метод	Значения стационарных характеристик			
		$\mathbf{E}(C)$	$\mathbf{E}(Q)$	$\mathbf{E}(W)$	$\mathbf{P}_{sv}$
$M / E_{100} / 1 / 10$	Рекуррентный метод	8,514	7,518	7,545	0,830
	GPSS World	8,518	7,521	7,549	0,830
$E_3 / E_{50} / 1 / 10$	Рекуррентный метод	9,885	8,885	8,885	0,833
	GPSS World	9,883	8,881	8,880	0,834
$E_{100} / M / 10 / 10$	Рекуррентный метод	17,610	7,631	7,647	0,832
	GPSS World	17,623	7,643	7,668	0,831
$E_2 / M / 5 / \infty$	Рекуррентный метод	6,276	2,109	2,531	1,000
	GPSS World	6,279	2,108	2,528	1,000

Зададим параметры показательных распределений: $\lambda = 1{,}2$ для системы $M / E_{100} / 1/ 10$; $\mu = 0{,}1$ для системы $E_{100} / M / 10/ 10$; $\mu = 0{,}2$ для системы $E_2 / M / 5/ \infty$. Для распределений Эрланга положим $\mu_i = 100$, $1 \le i \le 100$ $(M / E_{100} / 1/ 10)$; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3{,}6$, $\mu_i = 50$, $1 \le i \le 50$ $(E_3 / E_{50} / 1/ 10)$; $\lambda_i = 120$, $1 \le i \le 100$ $(E_{100} / M / 10/ 10)$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 5/3$ $(E_2 / M / 5/ \infty)$.

Значения стационарных вероятностей p_k и стационарных характеристик для систем $M / E_{100} /1/10$, $E_3 / E_{50} /1/10$, $E_{100} / M /10/10$, $E_2 / M / 5/ \infty$, найденные с использованием рекуррентных соотношений, полученных в настоящей работе, представлены в табл. 1–3. В таблицах приведены также результаты вычислений, реализованных с помощью имитационных моделей перечисленных систем обслуживания для значения времени моделирования $t = 10^6$. Имитационные модели построены с использованием инструментальных средств GPSS World [9].

При вычислении приближенных значений стационарных вероятностей p_k для системы $E_2 / M / 5/ \infty$ значение N выбиралось настолько большим, чтобы выполнялись условия (11) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-9}$. Полученное минимальное значение N, при котором выполняются условия (11), равно 100.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье с помощью метода фиктивных фаз построены рекуррентные алгоритмы для вычисления стационарного распределения числа заявок в следующих системах обслуживания с эрланговскими распределениями: $M / E_s /1/ m$, $E_r / E_s /1/ m$ и $E_r / M / n / m$, включая случай $m = \infty$. Рассматриваемый рекуррентный метод не содержит итераций и преобразований подготовительного характера, что позволяет сократить объем вычислений по сравнению с известными методами. Полученные значения стационарных характеристик подтверждены результатами имитационного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Neuts M. F. Matrix-geometric solutions in stochastic models. Baltimore: The John’s Hopkins University Press, 1981. 390 p.
2. Takahashi Y., Takami Y. A numerical method for the steady-state probabilities of a GI/G/c queueing system in a general class. *J. Oper. Res. Soc. Japan.* 1976. Vol. 19, N 2. P. 147–157.
3. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. Москва: РУДН, 1995. 529 с.
4. Бочаров П. П., Литвин В. Г. Методы анализа и расчета систем массового обслуживания с распределениями фазового типа. *Автоматика и телемеханика.* 1986. № 5. С. 5–23.

5. Рыжиков Ю. И. Рекуррентный расчет многоканальных систем обслуживания с неограниченной очередью. *Автоматика и телемеханика.* 1985. № 6. С. 88–93.
6. Рыжиков Ю. И. Алгоритм расчета многоканальной системы с эрланговским обслуживанием. *Автоматика и телемеханика.* 1980. № 5. С. 30–37.
7. Жерновый К. Ю. Определение стационарных характеристик двухканальных систем с эрланговским распределением времени обслуживания. *Кибернетика и системный анализ.* 2017. Т. 53, № 1. С. 108–121.
8. Жерновый Ю. В., Жерновый К. Ю. Определение стационарных характеристик трехканальных систем с эрланговским распределением времени обслуживания. *Кибернетика и системный анализ.* 2017. Т. 53, № 2. С. 134–145.
9. Zhernovyi Yu. Creating models of queueing systems using GPSS World: Programs, detailed explanations and analysis of results. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. 220 p.

Надійшла до редакції 28.11.2016

Ю.В. Жерновий

ВИЗНАЧЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕЯКИХ СИСТЕМ ОБСЛУГОВУВАННЯ З ЕРЛАНГІВСЬКИМИ РОЗПОДІЛАМИ

Анотація. Запропоновано метод дослідження систем обслуговування $M/E_s/1/m$, $E_r/E_s/1/m$ та $E_r/M/n/m$, в тому числі для випадку $m=\infty$. Отримано рекурентні співвідношення для обчислення стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі та стаціонарних характеристик. Побудовані алгоритми перевірено на прикладах з використанням імітаційних моделей, створених за допомогою інструментальних засобів GPSS World.

Ключові слова: система обслуговування, ерлангівські розподіли, метод фіктивних фаз, рекурентні співвідношення, стаціонарні характеристики.

Yu.V. Zhernovyi

DETERMINING STEADY-STATE CHARACTERISTICS OF CERTAIN QUEUEING SYSTEMS WITH ERLANGIAN DISTRIBUTIONS

Abstract. We propose a method to study $M/E_s/1/m$, $E_r/E_s/1/m$ and $E_r/M/n/m$ queueing systems, including the case of $m=\infty$. Recurrence relations are obtained to compute the stationary distribution of the number of customers in the system and the steady-state characteristics. The developed algorithms are tested on examples using simulation models constructed with the assistance of the GPSS World tools.

Keywords: queueing systems, Erlangian distribution, fictitious phase method, recurrence relations, steady-state characteristics.

Жерновый Юрий Васильевич,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Львовского национального университета имени Ивана Франко, e-mail: yu.zhernovyi@lnu.edu.ua.